

3 Formulação Teórica

Neste capítulo serão apresentadas as equações que governam o problema físico: equações de conservação de massa e de quantidade de movimento linear, de fração volumétrica e equações constitutivas para os fluidos não newtonianos.

As equações de conservação utilizadas na mecânica dos fluidos são aplicadas sempre a partículas fluidas. Estas podem ser definidas como uma pequena massa de fluido de volume infinitesimal ∂V , com identidade fixa. As equações que governam o problema são descritas a seguir.

3.1. Equações de Conservação

3.1.1. Conservação de Massa

A equação de conservação de massa, ou equação da continuidade, corresponde à soma da “taxa de variação de massa dentro desse volume de controle” e do “fluxo de massa que cruza a superfície de controle” igual a zero. Essa definição pode ser expressa pela eq. 3-1.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3-1)$$

onde ρ é a densidade e \vec{u} é o vetor velocidade.

A eq. 3-1 é a forma geral da equação da conservação de massa e é válida para escoamentos compressíveis e incompressíveis. Considerando as hipóteses de fluido incompressível em todo o domínio e o sistema de coordenadas cartesianas, obtém-se a eq. 3-2.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3-2)$$

3.1.2. Conservação da Quantidade de Movimento Linear

A equação de conservação de quantidade de movimento linear (2ª lei de Newton) expressa que o somatório das forças externas é igual ao produto da massa pela aceleração, conforme descrito pela eq. 3-3.

$$\frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}\vec{u}) = \nabla \cdot \overline{\overline{T}} + \rho\vec{g} + \vec{F} \quad (3-3)$$

onde \vec{g} é a aceleração gravitacional, \vec{F} representa as forças de corpo externas (da interação entre as fases) e $\overline{\overline{T}}$ é o tensor das tensões, devido as forças de superfície. O tensor das tensões pode ser escrito a partir da eq. 3-4.

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (3-4)$$

sendo que $\overline{\overline{I}}$ é a matriz identidade, p é a pressão estática e $\overline{\overline{\tau}}$ é o tensor extratensão, que representa a parte viscosa do tensor das tensões. Ao cessar o movimento, este termo cai à zero.

O comportamento mecânico dos fluidos é descrito pela equação constitutiva, que relaciona a tensão com a cinemática (vide Apêndice A).

Os fluidos foram modelados como fluidos newtoniano e não newtoniano, pela equação de Fluido Newtoniano Generalizado (Bird et al, 1987), dado pelas eq. 3-5 a 3-7:

$$\overline{\overline{\tau}} = \eta(\dot{\overline{\overline{\gamma}}})\dot{\overline{\overline{\gamma}}} \quad (3-5)$$

$$\dot{\overline{\overline{\gamma}}} = \nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T \quad (3-6)$$

$$\dot{\gamma} \equiv |\dot{\overline{\overline{\gamma}}}| \equiv \sqrt{\frac{1}{2}tr(\dot{\overline{\overline{\gamma}}}^2)} \quad (3-7)$$

onde η é a função viscosidade, $\dot{\overline{\overline{\gamma}}}$ é o tensor taxa de deformação e $\dot{\gamma}$ é a intensidade da taxa de deformação. Expandindo a equação de conservação de quantidade de movimento em coordenadas cartesianas obtém-se os seguintes componentes:

▪ **Componente – x**

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (3-8)$$

▪ **Componente – y**

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad (3-9)$$

▪ **Componente – z**

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (3-10)$$

Nas eq. 3-8, 3-9 e 3-10, ρ é a densidade do fluido e $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$ e $\partial p/\partial z$ são os componentes cartesianos do gradiente de pressão. Os componentes do tensor extratensão estão representados nas eq. 3-11 a 3-16:

$$\tau_{xx} = 2\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \quad (3-11)$$

$$\tau_{yy} = 2\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (3-12)$$

$$\tau_{zz} = 2\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (3-13)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (3-14)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (3-15)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (3-16)$$

Para obter as três equações completas de conservação de quantidade de movimento linear, basta substituir as eq. 3-11 a 3-16 nas eq. 3-8 a 3-10.

3.2. Abordagem Multifásica

Há dois tipos de abordagem multifásica: Euler-Lagrange e Euler- Euler. Na abordagem de Euler-Lagrange, a fase fluida é tratada como uma série contínua, enquanto a fase discreta é resolvida através do campo de escoamento calculado. Na abordagem Euler-Euler, as fases diferentes são tratadas matematicamente como contínuas.

3.2.1. Modelo VOF (*Volume of Fluid*)

Hirt & Nichols (1981) propuseram o modelo VOF, que utiliza a abordagem Euler-Euler, para definir escoamentos onde a interface é bem definida (fases separadas). Neste modelo, considera-se que dois ou mais fluidos são imiscíveis. Como o volume de uma fase não pode ser ocupado por outras fases, utiliza-se o conceito da fração volumétrica (α_q). Supõe-se que estas frações de volume são funções contínuas do espaço e o tempo e suas somas são iguais a um.

Os campos para todas as variáveis e propriedades estão compartilhados entre as fases e representam valores baseados na média volumétrica (fração volumétrica). Assim, as variáveis e as propriedades em todas as células dadas são puramente representantes de uma das fases, ou representantes de uma mistura das fases, dependendo dos valores da fração volumétrica.

Ou seja, células com valores de α_q entre 0 e 1 contêm a interface.

- $\alpha_q = 0$: a célula está vazia (com a q -ésima fase).
- $\alpha_q = 1$: a célula está preenchida (com a q -ésima fase);
- $0 < \alpha_q < 1$: a célula contém a interface entre a fase q e uma ou mais fases.

Baseado no valor local de α_q , as propriedades e as variáveis apropriadas são atribuídas a cada volume de controle dentro do domínio.

3.2.2. Conservação de Massa

O mapeamento da interface entre as fases é realizado pela solução da equação da continuidade (eq. 3-17) para a fração volumétrica de cada fase q :

$$\frac{1}{\rho_q} \left[\frac{\partial(\alpha_q \rho_q)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{u}_q) \right] = 0 \quad (3-17)$$

A equação da fração volumétrica será computada baseada na seguinte restrição:

$$\sum_{q=1}^n \alpha_q = 1 \quad (3-18)$$

3.2.3. Cálculo das Propriedades

As propriedades que aparecem nas equações de transporte são determinadas pela presença dos componentes das fases em cada volume de controle. No sistema em questão, bifásico, a densidade em cada célula é dada pela eq. 3-19.

$$\rho = \alpha_2 \rho_2 + (1 - \alpha_2) \rho_1 \quad (3-19)$$

Todas as propriedades restantes são computadas desse modo.

3.2.4. Conservação de Quantidade de Movimento Linear

Um único conjunto (uma equação para cada componente) de equações de conservação da quantidade de movimento é resolvido para todo o domínio, e o campo resultante da velocidade é compartilhado entre as fases.

A equação da quantidade de movimento linear, eq. 3-20, é dependente das frações volumétricas de todas as fases através das propriedades ρ e η , visto que $\bar{\tau} = \eta(\dot{\gamma})\bar{\gamma}$.

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\tau} + \rho \vec{g} \quad (3-20)$$

3.3. Modelo Reológico

Foram estudados diversos modelos reológicos utilizados no processo de perfuração de poços de petróleo, conforme descritos no Apêndice A. No presente trabalho, utilizou-se o modelo SMD para descrever o comportamento viscoplásticos destes fluidos. Este modelo foi proposto por Mendes & Dutra (2004), para representar a viscosidade conforme eq. 3-21:

$$\tau = \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right) \right\} [\tau_0 + k \dot{\gamma}^n] \quad (3-21)$$

Esta função foi desenvolvida a partir do modelo de Papanastasiou (1987), que utiliza um termo exponencial para baixas taxas de deformação, para acoplar regiões escoadas e não escoadas. Portanto, esta função contínua tem a vantagem de poder ser utilizada em simulações de escoamentos com o método dos volumes finitos.

O modelo SMD apresenta um patamar de viscosidade para baixas tensões de cisalhamento, seguido por uma queda brusca da viscosidade (tensão limite de escoamento), e uma região subsequente de *power-law* (Figura 3.1).

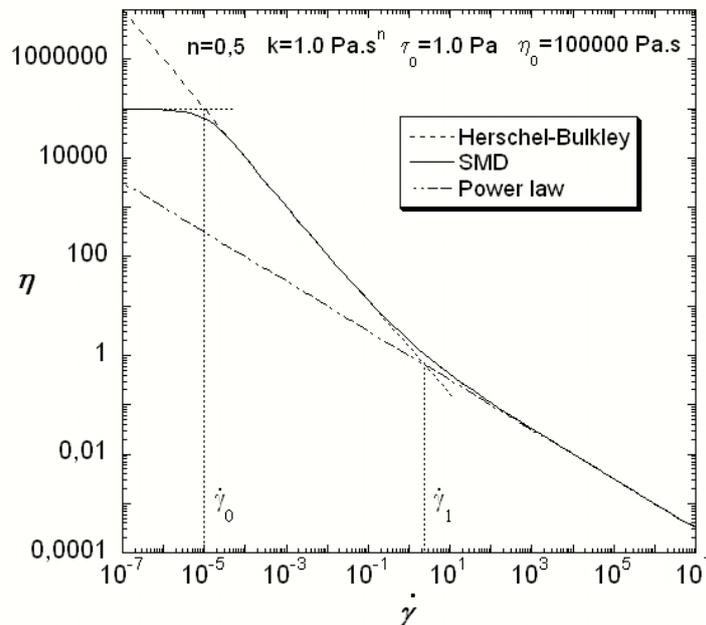


Figura 3.1 – Gráfico comparativo entre os modelos reológicos

A partir do modelo SMD pode-se extrair os valores de transições da taxa de cisalhamento ($\dot{\gamma}_0$ e $\dot{\gamma}_1$), conforme eq. 3-22e 3-23.

$$\dot{\gamma}_0 \equiv \frac{\tau_0}{\eta_0} \quad (3-22)$$

$$\dot{\gamma}_1 \equiv \left(\frac{\tau_0}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3-23)$$

Este modelo reológico não está disponível na biblioteca do FLUENT. Logo, é necessário utilizar uma função definida pelo usuário (UDF - *User-Defined Function*), conforme descrito no Apêndice B.

3.4. Adimensionalização

O processo de adimensionalização é realizado para determinar quais são os parâmetros, envolvidos no escoamento, que governam o problema. Além disso, ao determinar os parâmetros e variáveis adimensionais, pode-se realizar o estudo do escoamento em dimensões reduzidas.

Uma dificuldade para a geração de resultados experimentais se deve ao excessivo número de grupos adimensionais governantes. Em experiências com fluidos não newtonianos, as medidas são realizadas em diferentes vazões. Entretanto, os parâmetros que representam quantidades reológicas adimensionais mudam com a vazão. Isto se deve ao fato de que a velocidade característica escolhida é uma quantidade do fluxo (uma velocidade relativa ou uma velocidade média). Esta escolha conduz a grupos adimensionais que envolvem ambas as propriedades do fluido e do escoamento.

O procedimento de adimensionalização, proposto por Mendes (2007), sugere que a velocidade característica seja relacionada aos dados reológicos ao invés de uma quantidade do fluxo. A taxa de deformação característica escolhida deve estar dentro da faixa da taxa de deformação realmente observada no escoamento. Logo, esta taxa escolhida também será característica ao próprio escoamento.

Para fluidos com viscosidades dependentes da taxa de cisalhamento, uma escolha apropriada seria uma das transições da taxa de cisalhamento, que aparecem na função da viscosidade, isto é, $\dot{\gamma}_0$ ou $\dot{\gamma}_1$, definidos nas eq. 3-22 e 3-23.

Uma vez escolhida a taxa de cisalhamento característica ($\dot{\gamma}_c$) e o comprimento característico (L_c), podem ser determinadas as demais variáveis características, conforme eq. 3-24 a 3-27.

Velocidade característica

$$u_c = L_c \dot{\gamma}_c \quad (3-24)$$

Viscosidade característica

$$\eta_c = \eta_c(\dot{\gamma}_c) \quad (3-25)$$

Tensão característica

$$\tau_c = \eta_c \dot{\gamma}_c \quad (3-26)$$

Tempo característico

$$t_c = 1/\dot{\gamma}_c \quad (3-27)$$

A partir destas variáveis, determinam-se as variáveis adimensionais, conforme eq. 3-28 a 3-33.

Comprimento adimensional

$$x^* \equiv \frac{x}{L_c}; y^* \equiv \frac{y}{L_c}; z^* \equiv \frac{z}{L_c} \quad (3-28)$$

Tempo adimensional

$$t^* \equiv \frac{t}{t_c} = \dot{\gamma}_c t \quad (3-29)$$

Velocidade adimensional

$$u^* \equiv \frac{u}{\dot{\gamma}_c L_c} \quad (3-30)$$

Gradiente adimensional

$$\nabla^* \equiv L_c \nabla \quad (3-31)$$

Pressão adimensional

$$p^* \equiv \frac{p}{\eta_c \dot{\gamma}_c} \quad (3-32)$$

Tensão cisalhante adimensional

$$\tau^* \equiv \frac{\tau}{\eta_c \dot{\gamma}_c} \quad (3-33)$$

3.4.1.**Conservação de Massa**

Para escoamentos incompressíveis, a adimensionalização da equação de conservação de massa é trivial (eq. 3-34), não originando parâmetro adimensional.

$$\nabla^* \cdot u^* = 0 \quad (3-34)$$

3.4.2. Conservação de Quantidade de Movimento Linear

A equação da conservação da quantidade de movimento linear (eq. 3-3) pode ser adimensionalizada substituindo as variáveis características, resultando a eq. 3-35.

$$\text{Re}_r \frac{d\vec{u}^*}{dt^*} = \nabla^* \cdot \vec{\tau}^* - \nabla^* p^* + Ga_r \frac{\vec{g}}{g} \quad (3-35)$$

Desta equação, obtêm-se os parâmetros adimensionais abaixo (eq. 3-36 e 3-37):

Número de Reynolds reológico

$$\text{Re}_r \equiv \frac{\rho \dot{\gamma}_c L_c^2}{\eta_c} \quad (3-36)$$

Número de Galilei reológico

$$Ga_r \equiv \frac{\rho g L_c}{\eta_c \dot{\gamma}_c} \quad (3-37)$$

3.4.3. Modelo Reológico SMD

A equação de viscosidade (eq. 3-21), segundo o modelo reológico SMD (Souza Mendes e Dutra), pode ser adimensionalizada substituindo as variáveis características, onde $\dot{\gamma}_c = \dot{\gamma}_1$ (eq. 3-22), resultando a eq. 3-38.

$$\tau^* = \left\{ 1 - \exp\left(- (J + 1) \dot{\gamma}^*\right) \right\} \left[1 + \dot{\gamma}^{*n} \right] \quad (3-38)$$

A partir desta equação, pode-se extrair outro parâmetro adimensional (eq. 3-39).

Número de salto (J)

$$J \equiv \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \frac{\eta_0 \tau_0^{(1-n)/n}}{k^{1/n}} - 1 \quad (3-39)$$

3.4.4. Grupos adimensionais

Após o processo de adimensionalização, obtiveram-se os grupos adimensionais/variáveis Ga_r , Re_r , J e n .