5
Abordagem por Heurísticas Matemáticas

5.1
Formulações de Programação Linear Inteira Mista para o PPHCPM

Elaboramos modelos de Programação Linear Inteira para o Problema de Programação de Horários de Cursos Pós-Matrícula (PPHCPM), conforme a especificação da ITC (ver seção 2.3). Tal como outros modelos encontrados na literatura (Lewis, 2006), os nossos são baseados em formulações do problema de Coloração de Grafos. O PPHCPM pode ser entendido como uma coloração de grafo com uma série de restrições adicionais. Os eventos do PPHCPM são interpretados como vértices do PCG e os períodos onde os eventos podem ser alocados são interpretados como as cores do PCG. Uma restrição impedindo que um par de eventos sejam alocados a um mesmo período, como por exemplo, um estudante em comum assistindo aos dois eventos, dá origem a uma aresta no grafo.

O espaço de soluções viáveis do PPHCPM é um subconjunto do espaço de soluções viáveis do PCG obtido através do mapeamento proposto. Além de forcener uma alocação de eventos a períodos, sem ocorrência de conflitos de estudantes matriculados, há diversas restrições adicionais segundo a especificação do PPHCPM pela ITC.

5.1.1
Notação utilizada

Apresentamos aqui um sumário da notação utilizada nas formulações propostas. Para uma descrição detalhada do seu significado, recomendamos a leitura das seções 2.2 e 2.3, onde a notação foi definida.

- $\mathcal{E}$, conjunto de eventos;
- $\mathcal{R}$, conjunto de salas;
- $\mathcal{S}$, conjunto de estudantes;
- $\mathcal{P}$, conjunto de períodos;
- $\mathcal{D}$, conjunto de dias;

- $\boldsymbol{\mathcal{E}^s}$, eventos assistidos por um estudante $s \in \mathcal{S}$;
- $\boldsymbol{\mathcal{S}^e}$, estudantes que assistem um evento $e \in \mathcal{E}$;
- $\boldsymbol{\mathcal{E}^p}$, eventos apropriados para um período $p \in \mathcal{P}$;
- $\boldsymbol{\mathcal{P}^e}$, períodos apropriados para um evento $e \in \mathcal{E}$;
- $\boldsymbol{\mathcal{E}^r}$, eventos apropriados para uma sala $r \in \mathcal{R}$;
- $\boldsymbol{\mathcal{R}^e}$, salas apropriadas para um evento $e \in \mathcal{E}$;
- $\boldsymbol{\mathcal{P}^d}$, períodos que compõem um dia $d \in \mathcal{D}$;
- $\boldsymbol{\mathcal{D}(p)}$, dia em que ocorre um período $p \in \mathcal{P}$;
- $\boldsymbol{Prec(e)}$, eventos que devem preceder um evento $e \in \mathcal{E}$.

5.2 Formulação Padrão para o PPHCPM

Nesta seção, utilizamos como base a Formulação Padrão para o PCG (ver seção 3.3.1, onde é apresentada a formulação e definida parte da notação utilizada aqui). Uma versão condensada da Formulação Padrão para o PPHCPM é apresentada na seção 5.4.3.

5.2.1 Variáveis

Variáveis referentes à alocação dos eventos

Assim como a Formulação Padrão para o PCG utiliza variáveis x para definir a cor de um vértice, aqui a variável x definirá o período e sala de um evento.

- $\boldsymbol{x_{epr}}$, variável que indica se um evento u é alocado a um período p e uma sala r. Esta variável está definida para todo evento e, todo período p e toda sala r apropriados para e:

$$x_{epr} \in \{0, 1\}, \qquad \forall e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e, r \in \mathcal{R}^e$$

Variáveis referentes a padrões nas agendas dos estudantes

Definimos duas classes de variáveis para simplificar o cálculo do custo de uma solução, como veremos em seções seguintes. Estas variáveis tomam valor 1 quando ocorrem violações de certas restrições fracas.

- $\boldsymbol{evtSeq_{sp}}$, variável que indica que o estudante s tem três eventos consecutivos agendados a partir do período p, todos *no mesmo dia*, o que implica em uma violação da restrição $NoEventSequence$. Esta variável está definida para todo estudante s e todo período p, exceto quando p é um dos dois últimos períodos do dia.

$$evtSeq_{sp} \in \{0, 1\},$$
$$s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P} \setminus \{8, 9, 17, 18, 26, 27, 35, 36, 44, 45\}$$

- $\boldsymbol{sglEvt_{sp}}$, variável que indica que o estudante s tem um evento no período p que é o único agendado no dia, o que implica em uma violação da restrição $NoSingleEvent$. Esta variável está definida para todo estudante s e todo período p:

$$sglEvt_{sp} \in \{0, 1\}, \qquad s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P}$$

5.3 Função Objetivo

O custo de uma solução é dado pela soma das violações de restrições fracas, que discutimos na seção 2.2.3.

Cada ocorrência de um evento e que o estudante s precisa assistir no período p que é o último do dia (ou seja, $p \in \{9, 18, 27, 36, 45\}$) causa uma violação à restrição $NoEndOfDayEvent$, e consequentemente eleva de uma unidade o custo da solução. Calculamos este componente do custo, para cada estudante $s \in \mathcal{S}$, conforme a expressão:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^s} \sum_{p \in \mathcal{P}^e \cap \{9,18,27,36,45\}} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr}$$

Cada ocorrência de eventos nos quais o estudante s está matriculado em três períodos consecutivos causa uma violação à restrição $NoEventSequence$, e consequentemente eleva de uma unidade o custo da solução. Como definimos uma classe de variáveis $evtSeq$ para descrever especificamente esta situação, é suficiente calcular, para cada estudante $s \in \mathcal{S}$, $\sum_{p \in \mathcal{P}} evtSeq_{sp}$.

Cada ocorrência de um único evento dentre os que o estudante s assiste, em um dia inteiro, causa uma violação à restrição $NoSingleEvent$, e consequentemente eleva de uma unidade o custo da solução. Como definimos uma classe de variáveis $sglEvt$ para descrever especificamente esta situação, é suficiente calcular, para cada estudante $s \in \mathcal{S}$, $\sum_{p \in \mathcal{P}} sglEvt_{sp}$.

O custo z de uma solução é dado pelo somatório das penalizações dos três tipos acima, e o objetivo da otimização é minimizar o custo z:

$$\min z = \sum_{s \in \mathcal{S}} \left(\left(\sum_{e \in \mathcal{E}^s} \sum_{p \in \mathcal{P}^e \cap \{9,18,27,36,45\}} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr} \right) + \sum_{p \in \mathcal{P}} evtSeq_{sp} + \sum_{p \in \mathcal{P}} sglEvt_{sp} \right) \tag{5-1}$$

5.4 Restrições

5.4.1 Restrições referentes à alocação dos eventos

Garantia de alocação de eventos

Todo evento e deve ser alocado a um período p e sala r apropriados para ele.

$$\sum_{p \in \mathcal{P}^e} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr} = 1 \qquad \forall e \in \mathcal{E} \tag{5-2}$$

Conflitos de período de eventos adjacentes

Dois eventos u e v adjacentes (ou seja, em conflito) não podem ser alocados a um mesmo período p apropriado para ambos.

$$\sum_{r \in \mathcal{R}^u} x_{upr} + \sum_{r \in \mathcal{R}^v} x_{vpr} \leq 1 \qquad \forall u \in \mathcal{E}, v \in \Delta(u), p \in \mathcal{P}^u \cap \mathcal{P}^v \tag{5-3}$$

Conflitos de sala

No máximo um evento e pode estar alocado a uma sala r em um mesmo período p.

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^p \cap \mathcal{E}^r} x_{epr} \leq 1 \qquad \forall p \in \mathcal{P}, r \in \mathcal{R} \tag{5-4}$$

Precedência de eventos

Se v deve preceder u, e u ocorre em um período p, então v não pode ocorrer em um período $k \geq p$.

$$\sum_{r \in \mathcal{R}^u} x_{upr} + \sum_{k \in \mathcal{P}^v, k \geq p} \sum_{r \in \mathcal{R}^v} x_{vkr} \leq 1 \qquad \forall u \in \mathcal{E}, v \in Prec(u), p \in \mathcal{P}^u \tag{5-5}$$

5.4.2
Restrições para identificação de padrões nas agendas dos estudantes

Identificação de seqüências de eventos

Este grupo de restrições identifica violações de restrições fracas do tipo $NoEventSequence$, forçando o valor das variáveis $evtSeq_{sp}$ para 1 quando um estudante s assiste a eventos que ocorrem nos três períodos consecutivos a partir de p. Quando p é um dos dois últimos períodos do dia, a variável $evtSeq_{sp}$ não está definida, conforme mencionamos anteriormente.

Se o estudante s assiste a eventos que ocorrem nos três períodos $\{p, p+1, p+2\}$, o lado esquerdo irá somar 3, logo a variável $evtSeq_{sp}$ é forçada para 1. Em qualquer outra situação, o lado esquerdo irá somar no máximo 2, portanto não restringindo o valor de $evtSeq_{sp}$, que irá assumir valor 0, uma vez que se trata de uma variável de custo positivo em um problema de minimização.

$$\sum_{k \in \{p,p+1,p+2\}} \sum_{e \in \mathcal{E}^s \cap \mathcal{E}^k} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{ekr} \leq evtSeq_{sp} + 2 \qquad \forall s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P} \setminus \{8, 9, 17, 18, 26, 27, 35, 36, 44, 45\} \tag{5-6}$$

Identificação de eventos únicos no dia

Este grupo de restrições identifica violações de restrições fracas do tipo $NoSingleEvent$, forçando o valor das variáveis $sglEvt_{sp}$ para 1 quando um estudante s assiste a somente um evento no período p e mais nenhum evento neste mesmo dia. Formalmente, o conjunto dos *outros* períodos no mesmo dia que p é $\mathcal{P}^{D(p)} \setminus \{p\}$.

Se o estudante s assiste a um evento que ocorre no período p, e não assiste a qualquer evento que ocorre em outro período k do mesmo dia, então o lado esquerdo irá somar 1, logo a variável $sglEvt_{sp}$ é forçada para 1. Em qualquer outra situação, o lado esquerdo somará no máximo zero, não havendo restrição sobre o valor de $sglEvt_{sp}$, que irá assumir valor 0, uma vez que também se trata de uma variável de custo positivo em um problema de minimização.

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^s \cap \mathcal{E}^p} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr} - \sum_{k \in \mathcal{P}^{D(p)} \setminus \{p\}} \sum_{e \in \mathcal{E}^s \cap \mathcal{E}^k} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{ekr} \leq sglEvt_{sp} \qquad \forall s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P} \tag{5-7}$$

5.4.3

Resumo da Formulação Padrão para o PPHCPM

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{s \in \mathcal{S}} \left(\left(\sum_{e \in \mathcal{E}^s} \sum_{p \in \mathcal{P}^e \cap \{9,18,27,36,45\}} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr} \right) + \sum_{p \in \mathcal{P}} evtSeq_{sp} + \sum_{p \in \mathcal{P}} sglEvt_{sp} \right) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{p \in \mathcal{P}^e} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr} = 1 \qquad \forall e \in \mathcal{E} \\
& \sum_{r \in \mathcal{R}^u} x_{upr} + \sum_{r \in \mathcal{R}^v} x_{vpr} \leq 1 \qquad \forall u \in \mathcal{E}, v \in \Delta(u), p \in \mathcal{P}^u \cap \mathcal{P}^v \\
& \sum_{e \in \mathcal{E}^p \cap \mathcal{E}^r} x_{epr} \leq 1 \qquad \forall p \in \mathcal{P}, r \in \mathcal{R} \\
& \sum_{r \in \mathcal{R}^u} x_{upr} + \sum_{k \in \mathcal{P}^v, k \geq p} \sum_{r \in \mathcal{R}^v} x_{vkr} \leq 1 \qquad \forall u \in \mathcal{E}, v \in Prec(u), p \in \mathcal{P}^u \\
& \sum_{k \in \{p, p+1, p+2\}} \sum_{e \in \mathcal{E}^s \cap \mathcal{E}^k} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{ekr} \leq evtSeq_{sp} + 2 \qquad \forall s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^{\text{end}} \\
& \sum_{e \in \mathcal{E}^s \cap \mathcal{E}^p} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr} - \sum_{k \in \mathcal{P}^{D(p)} \setminus \{p\}} \sum_{e \in \mathcal{E}^s \cap \mathcal{E}^k} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{ekr} \leq sglEvt_{sp} \qquad \forall s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P} \\
& x_{epr} \in \{0,1\} \qquad \forall e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e, r \in \mathcal{R}^e \\
& evtSeq_{sp} \in \{0,1\} \qquad \forall s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^{\text{end}} \\
& sglEvt_{sp} \in \{0,1\} \qquad \forall s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P}
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{P}^{\text{end}} = \{8, 9, 17, 18, 26, 27, 35, 36, 44, 45\}$.

5.5 Formulação Indireta para o PPHCPM

Propomos uma formulação baseada na Formulação Padrão, com intenção de testar o efeito da adição de certa redundância nas variáveis, em benefício da simplificação das restrições. Chamamos esta nova formulação de Formulação Indireta.

Além de serem definidas as variáveis x_{epr}, que indicam que um evento e ocorre em um período p e na sala r, são definidas variáveis redundantes y_{ep}, indicando que um evento e ocorre em um período p. A ligação entre estas variáveis é feita através da adição de restrições como a seguir:

$$\sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr} = y_{ep} \qquad \forall e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e \tag{5-8}$$

Após a definição destas variáveis, podemos substituir a expressão $\sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr}$ por y_{ep} em todas as restrições em que a mesma ocorre. O significado das restrições não sofre qualquer alteração. Aplicando tais substituições, completamos a definição da Formulação Indireta para o PPHCPM.

5.5.1

Resumo da Formulação Indireta para o PPHCPM

$$
\begin{array}{lrl}
\min & \displaystyle\sum_{s\in\mathcal{S}}\left(\left(\sum_{e\in\mathcal{E}^s}\sum_{p\in\mathcal{P}^e\cap\{9,18,27,36,45\}} y_{ep}\right)+\sum_{p\in\mathcal{P}} evtSeq_{sp}+\sum_{p\in\mathcal{P}} sglEvt_{sp}\right) & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{r\in\mathcal{R}^e} x_{epr} = y_{ep} & \forall e\in\mathcal{E}, p\in\mathcal{P}^e \\
& \displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}^e} y_{ep} = 1 & \forall e\in\mathcal{E} \\
& y_{up}+y_{vp}\le 1 & \forall u\in\mathcal{E}, v\in\Delta(u), p\in\mathcal{P}^u\cap\mathcal{P}^v \\
& \displaystyle\sum_{e\in\mathcal{E}^p\cap\mathcal{E}^r} x_{epr}\le 1 & \forall p\in\mathcal{P}, r\in\mathcal{R} \\
& \displaystyle y_{up}+\sum_{k\in\mathcal{P}^v,k\ge p} y_{vk}\le 1 & \forall u\in\mathcal{E}, v\in Prec(u), p\in\mathcal{P}^u \\
& \displaystyle\sum_{k\in\{p,p+1,p+2\}}\sum_{e\in\mathcal{E}^s\cap\mathcal{E}^k} y_{ek}\le evtSeq_{sp}+2 & \forall s\in\mathcal{S}, p\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}^{\text{end}} \\
& \displaystyle\sum_{e\in\mathcal{E}^s\cap\mathcal{E}^p} y_{ep}-\sum_{k\in\mathcal{P}^{D(p)}\setminus\{p\}}\sum_{e\in\mathcal{E}^s\cap\mathcal{E}^k} y_{ek}\le sglEvt_{sp} & \forall s\in\mathcal{S}, p\in\mathcal{P} \\
& x_{epr}\in\{0,1\} & \forall e\in\mathcal{E}, p\in\mathcal{P}^e, r\in\mathcal{R}^e \\
& y_{ep}\in\{0,1\} & \forall e\in\mathcal{E}, p\in\mathcal{P}^e \\
& evtSeq_{sp}\in\{0,1\} & \forall s\in\mathcal{S}, p\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}^{\text{end}} \\
& sglEvt_{sp}\in\{0,1\} & \forall s\in\mathcal{S}, p\in\mathcal{P}
\end{array}
$$

onde $\mathcal{P}^{\text{end}} = \{8, 9, 17, 18, 26, 27, 35, 36, 44, 45\}$.

5.6
Formulação de Representantes Assimétricos para o PPHCPM

Elaboramos um modelo para o PPHCPM utilizando como base a Formulação de Representantes Assimétricos para o PCG (Campêlo et al., 2008), visando tirar proveito do poder desta formulação, principalmente em relação à assimetria do espaço de soluções (ver seção 3.3.2, onde é apresentada a formulação e definida parte da notação utilizada aqui). Uma versão condensada da Formulação de Representantes Assimétricos para o PPHCPM é apresentada na seção 5.8.5.

5.6.1
Variáveis

Variáveis referentes ao agrupamento dos eventos

Assim como a Formulação de Representantes Assimétricos para o PCG utiliza variáveis x para definir quais vértices são representados por outros, aqui a variável x definirá quais eventos são representados por outros. Como o significado de representar é *ocorrer no mesmo período*, estas variáveis de fato definem quais eventos irão ocorrer simultaneamente com outros (ignorando em qual período isto se dará).

– $\boldsymbol{x_{uv}}$, variável que indica se o evento u representa o evento v. Esta variável está definida para todo evento v e todo evento u que pode representá-lo:

$$x_{uv} \in \{0,1\}, \qquad \forall v \in \mathcal{E}, u \in Rep(v)$$

Variáveis referentes à alocação dos eventos em salas

Além de decidir sobre o agrupamento dos eventos, é necessário decidir em que salas ocorrem os períodos. Definimos uma classe y de variáveis com índice triplo indicando, além da relação de representatividade, a alocação do evento representado a uma sala. A relação de representatividade aqui é redundante, uma vez que o mesmo já é decidido pelas variáveis x. Os motivos para esta redundância serão aparentes quando discutirmos as restrições associadas.

– $\boldsymbol{y_{uvr}}$, variável que indica se o evento u representa o evento v, e v é alocado à sala r. Esta variável está definida para todo evento v, todo evento u que pode representá-lo e toda sala r apropriada para v:

$$y_{uvr} \in \{0,1\}, \qquad v \in \mathcal{E}, u \in Rep(v), r \in \mathcal{R}^v$$

Variáveis referentes à alocação dos eventos em períodos

A Formulação de Representantes Assimétricos para o PCG modela o espaço de soluções como uma partição do conjunto de vértices, não havendo atribuição de rótulos às partições individuais, pois isto não é necessário no PCG. Para o problema de PHCPM, no entanto, a atribuição de rótulos é relevante: não basta definir quais eventos ocorrem simultaneamente, mas também em qual período os mesmos ocorrem. Por isso, além das variáveis x, também definimos as variáveis q e t como segue.

– $\boldsymbol{q_{ep}}$, variável que indica que o evento e *representa* o período p. Esta variável está definida para todo evento e e todo período p apropriado para e:

$$q_{ep} \in \{0,1\}, \qquad e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e$$

– $\boldsymbol{t_{ep}}$, variável que indica que o evento e *ocorre* no período p. Esta variável está definida para todo evento e e todo período p apropriado para e:

$$t_{ep} \in \{0,1\}, \qquad e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e$$

Variáveis referentes a padrões nas agendas dos estudantes

Dois grupos de variáveis estão definidos para indicar violações de restrições fracas. Trata-se das variáveis $evtSet_{sp}$, que identificam violações à restrição $NoEventSequence$ e $sglEvt_{sp}$, que identificam violações à restrição $NoSingleEvent$. Para esta formulação, as variáveis estão definidas para os mesmos casos e tem o mesmo significado que na seção 5.2.1.

5.7
Função Objetivo

O custo de uma solução é dado pela soma das violações de restrições fracas, que discutimos na seção 2.2.3.

Cada ocorrência de um evento e que o estudante s precisa assistir no período p que é o último do dia (ou seja, $p \in \{9, 18, 27, 36, 45\}$) causa uma violação à restrição $NoEndOfDayEvent$, e consequentemente eleva de uma unidade o custo da solução. Calculamos este componente do custo, para cada estudante $s \in \mathcal{S}$, conforme a expressão:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^s} \sum_{p \in \mathcal{P}^e \cap \{9,18,27,36,45\}} t_{ep}$$

Cada ocorrência de eventos nos quais o estudante s está matriculado em três períodos consecutivos causa uma violação à restrição $NoEventSequence$, e consequentemente eleva de uma unidade o custo da solução. Como definimos uma classe de variáveis $evtSeq$ para descrever especificamente esta situação, é suficiente calcular, para cada estudante $s \in \mathcal{S}$, $\sum_{p \in \mathcal{P}} evtSeq_{sp}$.

Cada ocorrência de um único evento dentre os que o estudante s assiste, em um dia inteiro, causa uma violação à restrição $NoSingleEvent$, e consequentemente eleva de uma unidade o custo da solução. Como definimos uma classe de variáveis $sglEvt$ para descrever especificamente esta situação, é suficiente calcular, para cada estudante $s \in \mathcal{S}$, $\sum_{p \in \mathcal{P}} sglEvt_{sp}$.

O custo z de uma solução é dado pelo somatório das penalizações dos três tipos acima, e o objetivo da otimização é minimizar o custo z:

$$\min z = \sum_{s\in\mathcal{S}} \left(\left(\sum_{e\in\mathcal{E}^s} \sum_{p\in\mathcal{P}^e\cap\{9,18,27,36,45\}} t_{ep} \right) + \sum_{p\in\mathcal{P}} evtSeq_{sp} + \sum_{p\in\mathcal{P}} sglEvt_{sp} \right) \tag{5-9}$$

5.8 Restrições

5.8.1 Restrições relacionadas ao agrupamento dos eventos

Estas restrições são as mesmas utilizadas na Formulação de Representantes Assimétricos para o PCG, sendo que aqui os eventos tomam o lugar dos vértices, e os conflitos entre pares de vértices são caracterizados por ao menos um estudante matriculado simultaneamente em pares de eventos.

Garantia de representante para eventos

Todo evento v deve ser representado por algum evento u que possa representá-lo.

$$\sum_{u\in Rep(v)} x_{uv} \geq 1 \qquad \forall v \in \mathcal{E} \tag{5-10}$$

Conflitos de representante de eventos adjacentes

Somente um dentre dois eventos v e w adjacentes (ou seja, em conflito) pode ser representado por um evento u que pode representar ambos.

$$x_{uv} + x_{uw} \leq x_{uu} \qquad \forall v \in \mathcal{E}, w \in \Delta(v), u \in Rep(v) \cap Rep(w) \tag{5-11}$$

5.8.2 Restrições para alocação dos eventos em salas

Garantia de sala para evento

Se um evento u representa um evento v, então o evento v deve ocorrer em alguma sala r apropriada para ele.

$$\sum_{r\in\mathcal{R}^v} y_{uvr} = x_{uv} \qquad \forall v \in \mathcal{E}, u \in Rep(v) \tag{5-12}$$

Conflitos de sala

Os eventos representados por um mesmo evento representante devem ocorrer simultaneamente, por isso, em cada sala r, pode ocorrer no máximo um evento v dentre os apropriados para esta sala e representados por um mesmo evento u.

$$\sum_{v \in \mathcal{E}^r \cap Rep^{-1}(u)} y_{uvr} \leq 1 \qquad \forall u \in \mathcal{E}, r \in \mathcal{R} \tag{5-13}$$

5.8.3
Restrições para alocação dos eventos em períodos

Garantia de período para evento representante

Se o evento e é representante, ele representa exatamente um período p.

$$\sum_{p \in \mathcal{P}^e} q_{ep} = x_{ee} \qquad \forall e \in \mathcal{E} \tag{5-14}$$

Conflitos de período de evento representante

O período p pode ser representado por no máximo um evento representante e.

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^p} q_{ep} \leq 1 \qquad \forall p \in \mathcal{P} \tag{5-15}$$

Garantia de período para ocorrência de evento

Um evento e deve ocorrer em exatamente um período p.

$$\sum_{p \in \mathcal{P}^e} t_{ep} = 1 \qquad \forall e \in \mathcal{E} \tag{5-16}$$

Acordo entre período do representante e período de ocorrência de evento

Se u representa v e representa um período p, então v deve ocorrer em p.

$$x_{uv} + q_{up} - t_{vp} \leq 1 \qquad \forall v \in \mathcal{E}, u \in Rep(v), p \in \mathcal{P}^u \cap \mathcal{P}^v \tag{5-17}$$

Período do representante não apropriado para evento

Se u representa um período $p \notin \mathcal{P}^v$, então u não pode representar v.

$$x_{uv} + q_{up} \leq 1 \qquad \forall v \in \mathcal{E}, u \in Rep(v), p \in \mathcal{P}^u \setminus \mathcal{P}^v \tag{5-18}$$

Precedência de eventos

Se v deve preceder u, e u ocorre em um período p, então v não pode ocorrer em um período $k \geq p$.

$$t_{up} + \sum_{k \in \mathcal{P}^v, k \geq p} t_{vk} \leq 1 \qquad \forall u \in \mathcal{E}, v \in Prec(u), p \in \mathcal{P}^u \tag{5-19}$$

5.8.4
Restrições para identificação de padrões nas agendas dos estudantes

Estas restrições são bem semelhantes àquelas da seção 5.4.2, com a diferença de que aqui temos variáveis t_{ep}, que referenciam diretamente a alocação de um evento e em um período p, não sendo necessário aqui fazer um somatório indexado pelas salas.

Identificação de seqüências de eventos

Se o estudante s está alocado para os 3 períodos consecutivos, o lado esquerdo é 3, logo $evtSeq_{sp} = 1$.

$$\sum_{k \in \{p,p+1,p+2\}} \sum_{e \in \mathcal{E}^s \cap \mathcal{E}^k} t_{ek} \leq evtSeq_{sp} + 2 \quad \forall s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P} \setminus \{8, 9, 17, 18, 26, 27, 35, 36, 44, 45\} \tag{5-20}$$

Identificação de eventos únicos no dia

Se o estudante s está alocado para o período p e para nenhum outro período deste mesmo dia, o lado esquerdo é 1, logo $sglEvt_{sp} = 1$.

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^s \cap \mathcal{E}^p} t_{ep} - \sum_{k \in \mathcal{P}^{D(p)} \setminus \{p\}} \sum_{e \in \mathcal{E}^s \cap \mathcal{E}^k} t_{ek} \leq sglEvt_{sp} \quad \forall s \in \mathcal{S}, p \in \mathcal{P} \tag{5-21}$$

5.8.5

Resumo da Formulação de Representantes Assimétricos para o PPHCPM

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{s\in\mathcal{S}}\left(\left(\sum_{e\in\mathcal{E}^s}\sum_{p\in\mathcal{P}^e\cap\{9,18,27,36,45\}} t_{ep}\right)+\sum_{p\in\mathcal{P}} evtSeq_{sp}+\sum_{p\in\mathcal{P}} sglEvt_{sp}\right)\\
\text{s.t.} \quad & \sum_{u\in Rep(v)} x_{uv} \geq 1 \qquad \forall v\in\mathcal{E}\\
& x_{uv}+x_{uw}\leq x_{uu} \qquad \forall v\in\mathcal{E}, w\in\Delta(v), u\in Rep(v)\cap Rep(w)\\
& \sum_{r\in\mathcal{R}^v} y_{uvr} = x_{uv} \qquad \forall v\in\mathcal{E}, u\in Rep(v)\\
& \sum_{v\in\mathcal{E}^r\cap Rep^{-1}(u)} y_{uvr}\leq 1 \qquad \forall u\in\mathcal{E}, r\in\mathcal{R}\\
& \sum_{p\in\mathcal{P}^e} q_{ep} = x_{ee} \qquad \forall e\in\mathcal{E}\\
& \sum_{e\in\mathcal{E}^p} q_{ep}\leq 1 \qquad \forall p\in\mathcal{P}\\
& \sum_{p\in\mathcal{P}^e} t_{ep} = 1 \qquad \forall e\in\mathcal{E}\\
& x_{uv}+q_{up}-t_{vp}\leq 1 \qquad \forall v\in\mathcal{E}, u\in Rep(v), p\in\mathcal{P}^u\cap\mathcal{P}^v\\
& x_{uv}+q_{up}\leq 1 \qquad \forall v\in\mathcal{E}, u\in Rep(v), p\in\mathcal{P}^u\setminus\mathcal{P}^v\\
& t_{up}+\sum_{k\in\mathcal{P}^v, k\geq p} t_{vk}\leq 1 \qquad \forall u\in\mathcal{E}, v\in Prec(u), p\in\mathcal{P}^u\\
& \sum_{k\in\{p,p+1,p+2\}}\sum_{e\in\mathcal{E}^s\cap\mathcal{E}^k} t_{ek}\leq evtSeq_{sp}+2 \qquad \forall s\in\mathcal{S}, p\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}^{\text{end}}\\
& \sum_{e\in\mathcal{E}^s\cap\mathcal{E}^p} t_{ep}-\sum_{k\in\mathcal{P}^{D(p)}\setminus\{p\}}\sum_{e\in\mathcal{E}^s\cap\mathcal{E}^k} t_{ek}\leq sglEvt_{sp} \qquad \forall s\in\mathcal{S}, p\in\mathcal{P}\\
& x_{uv}\in\{0,1\} \qquad \forall v\in\mathcal{E}, u\in Rep(v)\\
& y_{uvr}\in\{0,1\} \qquad v\in\mathcal{E}, u\in Rep(v), r\in\mathcal{R}^v\\
& q_{ep}\in\{0,1\} \qquad e\in\mathcal{E}, p\in\mathcal{P}^e\\
& t_{ep}\in\{0,1\} \qquad e\in\mathcal{E}, p\in\mathcal{P}^e\\
& evtSeq_{sp}\in\{0,1\} \qquad \forall s\in\mathcal{S}, p\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}^{\text{end}}\\
& sglEvt_{sp}\in\{0,1\} \qquad \forall s\in\mathcal{S}, p\in\mathcal{P}
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{P}^{\text{end}} = \{8, 9, 17, 18, 26, 27, 35, 36, 44, 45\}$.

5.9
Local Branching aplicado ao PPHCPM

Utilizamos os modelos apresentados para resolver o conjunto de instâncias em um resolvedor de PLIM, porém esta abordagem se mostrou inviável para resolver o problema em um intervalo de tempo razoável. Uma alternativa que adotamos para encontrar mais rapidamente soluções melhoradas, a partir de soluções iniciais geradas por metaeurísticas, foi a de utilizar os modelos acrescidos de cortes de *local branching* (ver seção 3.4). Os cortes de *local branching* fazem com que o espaço de busca seja reduzido à vizinhança de uma *solução de referência*.

Dada uma valoração $\bar{x}$ de um conjunto de variáveis binárias da solução de referência, o espaço de soluções se restringe às soluções com no máximo k variáveis com valor complementado, em relação a $\bar{x}$. Para cada formulação utilizada, diferentes cortes de *local branching* são aplicáveis, variando principalmente os grupos de variáveis que tornam-se alvo dos cortes. Apresentamos aqui os cortes formulados para cada uma delas.

5.9.1
Cortes de local branching na Formulação Padrão

No caso da Formulação Padrão, os cortes se referem somente às variáveis x. Estas variáveis tem valor $\bar{x}$ na *solução de referência*, da qual partimos. Como queremos restringir o espaço de busca às soluções em que no máximo k alocações de eventos são diferentes da *solução de referência* (em relação ao período, sala ou ambos), poderíamos adicionar a seguinte desigualdade:

$$\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{p\in\mathcal{P}^e}\left(\sum_{r\in\mathcal{R}^e:\bar{x}_{epr}=0} x_{epr} + \sum_{r\in\mathcal{R}^e:\bar{x}_{epr}=1}(1-x_{epr})\right)\leq k$$

No entanto, sabemos que a quantidade de variáveis com valor 1 deve ser a mesma para toda solução viável: esta quantidade é exatamente o número de eventos da instância $|\mathcal{E}|$, já que cada evento e deve ser alocado a exatamente um período p e uma sala r. Logo, podemos utilizar uma desigualdade mais simples,

$$\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{p\in\mathcal{P}^e}\sum_{r\in\mathcal{R}^e:\bar{x}_{epr}=1}(1-x_{epr})\leq k/2$$

pois sabemos que para cada variável x_{epr} que tinha valor 1 na solução de referência e assume valor 0 em uma solução na vizinhança, obrigatoriamente alguma variável que tinha valor 0 deverá assumir valor 1 nesta solução, caso contrário o evento e estaria sem alocação.

Uma outra forma de expressar a mesma desigualdade é através da expressão

$$\sum_{e\in\mathcal{E}}\sum_{p\in\mathcal{P}^e}\sum_{r\in\mathcal{R}^e:\bar{x}_{epr}=1} x_{epr}\geq|\mathcal{E}|-(k/2)$$

onde fica mais explícita a cardinalidade do conjunto de variáveis de valor 1.

5.9.2

Cortes de local branching na Formulação de Representantes Assimétricos

No caso da Formulação de Representantes Assimétricos, temos variáveis de diversas naturezas, por isso também são diversas as opções que temos para estabelecer uma medida de similaridade entre soluções. Poderíamos, por exemplo, adicionar cortes de *local branching* somente relacionados às variáveis x, restringindo o espaço de busca às soluções em que as relações de representatividade são similares às da solução de referência. Outra opção seria adicionar cortes relacionados às variáveis t, restringindo o espaço de busca às soluções em que a alocação dos eventos aos períodos é similar à da solução de referência.

Ao mesmo tempo, um corte de *local branching* para obter o mesmo efeito do corte utilizado na Formulação Padrão não seria trivial como os cortes que apresentamos aqui, uma vez que não há variável com a mesma semântica na Formulação de Representantes Assimétricos, e a combinação de cortes sobre outras variáveis não restringiria o espaço de busca da mesma forma. Por exemplo, se combinamos dois cortes, um permitindo no máximo k diferentes alocações de eventos a períodos, e outro corte permitindo no máximo k diferentes alocações de eventos a salas, uma solução pertencente ao espaço de busca restrito poderia ter até $2k$ eventos com a alocação alterada em relação à solução de referência, enquanto no corte da Formuação Padrão, o limite é k.

Cada evento v deve ter um representante u, portanto a quantidade de variáveis x_{uv} com valor 1 é constante, e para o corte de *local branching* sobre estas variáveis podemos utilizar a desigualdade mais simples:

$$\sum_{v\in\mathcal{E}} \sum_{u\in Rep(v):\bar{x}_{uv}=1} (1 - x_{uv}) \leq k/2$$

Da mesma forma, utilizamos a desigualdade simples para corte sobre as variáveis t_{ep}, que indicam se um evento e é alocado a um período p:

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \sum_{p\in\mathcal{P}^e:\bar{t}_{ep}=1} (1 - t_{ep}) \leq k/2$$

Já para um corte de *local branching* sobre as variáveis q_{ep}, que indicam se um evento e é representante e representa o período p, devemos utilizar a desigualdade mais completa, pois a quantidade de variáveis q_{ep} que tem valor 1 não é fixa: esta quantidade reflete quantos períodos são representados, ou seja, a quantidade de períodos efetivamente utilizados, no máximo $|\mathcal{P}|$.

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \left(\sum_{p \in \mathcal{P}^e : \bar{q}_{ep}=0} q_{ep} + \sum_{p \in \mathcal{P}^e : \bar{q}_{ep}=1} (1 - q_{ep}) \right) \leq k$$

5.10 Geração de Colunas aplicada ao PPHCPM

Durante a elaboração das formulações para o PPHCPM, percebemos que a adição dos grupos de variáveis *evtSeq* e *sglEvt*, que indicam a ocorrência de violações a restrições fracas dos tipos $NoEventSequence$ e $NoSingleEvent$ (ver seção 2.2.3), assim como a adição dos grupos de restrições utilizadas para restringir os seus valores, foi o que mais contribuiu para o aumento no tamanho dos modelos de PLIM, em ambas as formulações. De fato, cerca de 90% das variáveis, restrições e coeficientes diferentes de zero na matriz de restrições estão associados ao cálculo das violações destas restrições fracas. Apesar de não serem necessárias para definir o espaço de soluções viáveis do problema, estas variáveis e restrições são essenciais para a composição do custo da solução, também chamado de $SoftCost$.

Uma forma que encontramos de aliviar o problema foi através de um esquema de geração de colunas (ver seção 3.5). No esquema proposto, o $SoftCost$ pode ser calculado diretamente pela soma dos custos associados a um novo conjunto de variáveis denotadas por λ, não sendo necessário o uso dos grupos de variáveis *evtSeq* e *sglEvt*, nem das restrições associadas.

Antes de apresentar a reformulação do problema, algumas definições são importantes para evitar ambiguidade. Um *padrão diário* é um conjunto de alocações de eventos a períodos de um dia inteiro, representado por pares compostos de um evento e e um período p do dia d, sem repetição de eventos. Formalmente, o conjunto de padrões diários S^d para o dia d é definido como:

$$S^d = \{S_j \subseteq (\mathcal{E} \times \mathcal{P}^d) : (u,p),(v,q) \in S_j, u \neq v\}$$

O conjunto de todos os padrões diários, S, é formado pela união de todos os padrões diários de todos os dias, ou seja, $S = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} S^d$. Em alguns momentos, iremos nos referir ao conjunto J de índices de S, $J = \{1, \ldots, |S|\}$.

Uma solução para o PPHCPM é uma programação dos eventos para uma semana completa, sendo formada por cinco padrões diários, um para cada dia, incluindo todos os eventos, e respeitando todas as restrições fortes (ver seção 2.3.2).

Se considerarmos todas as combinações possíveis de cinco padrões diários do conjunto S, certamente as combinações que formam as soluções ótimas do PPHCPM estão entre elas. No entanto, um modelo que inclua todo conjunto S é intratável mesmo para instâncias pequenas do problema, por isso adotamos a estratégia de trabalhar somente com um conjunto restrito $\tilde{S} \subseteq S$, que incrementamos progressivamente.

As versões condensadas das formulações para o PPHCPM com Geração de Colunas são apresentadas na seção 5.10.4.

5.10.1
Variáveis

Tanto na Formulação Padrão quanto na Formulação de Representantes Assimétricos, definimos um conjunto de variáveis para indicar o uso de padrões diários.

– $\boldsymbol{\lambda_j}$, indica se o padrão diário S_j é utilizado.

O custo c_j associado a uma variável λ_j é dado pela quantidade de violações a restrições fracas no padrão diário S_j. O valor de c_j é calculado para cada coluna que é adicionada no modelo, de forma análoga ao cálculo do custo de uma solução completa (ver seção 4.1.2).

As demais variáveis de ambas as formulações são mantidas, com exceção das variáveis dos grupos *evtSeq* e *sglEvt*, que somente eram utilizadas para o cálculo do $SoftCost$. Como agora utilizamos os custos das variáveis λ para isso, o custo destes grupos deve ser removido. O mesmo vale para os custos associados às variáveis x_{epr} (da Formulação Padrão) e t_{ep} (da Formulação de Representantes Assimétricos) de eventos alocados ao último período do dia. O custo destas variáveis agora deve ser ignorado, pois já é considerado no custo de λ.

5.10.2
Função Objetivo

Como as restrições fracas consideradas não tem nenhum componente referente a interação entre alocações de dias distintos, o custo de uma programação semanal é dado simplesmente pela soma dos custos individuais dos padrões utilizados em cada dia da semana, e por isso a função objetivo da reformulação é bastante simples:

$$\min z = \sum_{S_j \in S} c_j \lambda_j \tag{5-22}$$

5.10.3 Restrições

Para reformular a Formulação de Representantes Assimétricos, incluímos dois grupos de restrições, o primeiro associado a variáveis duais π e o segundo associado a variáveis duais μ.

O primeiro grupo de restrições faz a ligação entre as variáveis λ e as variáveis t (que indicam a ocorrência de eventos em períodos). Estas restrições asseguram que um evento e ocorre em um período p se e somente se a alocação (e, p) é parte de algum dos padrões diários que estão sendo utilizados:

$$(\pi^{ep}) \qquad t_{ep} - \sum_{j \in J^{ep}} \lambda_j = 0 \qquad e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e \tag{5-23}$$

onde J^{ep} são os índices de padrões que incluem a alocação (e, p), ou seja, $J^{ep} = \{j \in J : (e, p) \in S_j\}$.

O segundo grupo de restrições assegura que exatamente um padrão diário é utilizado para cada dia d. Isso evita que dois padrões diários para um mesmo dia (com eventos diferentes) sejam utilizados para compor uma solução viável.

$$(\mu^d) \qquad \sum_{j \in J^d} \lambda_j = 1 \qquad \forall d \in \mathcal{D} \tag{5-24}$$

onde J^d são os índices de padrões para o dia d, ou seja, $J^d = \{j \in J : S_j \in S^d\}$.

No caso da Formulação Padrão, não dispomos de variáveis que informam diretamente se um evento e ocorre em um período p, como é o caso das variáveis t da Formulação de Representantes Assimétricos. Porém, podemos obter esta informação indiretamente, utilizando um somatório sobre as salas apropriadas para um evento e e período p, $\sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr}$, considerando que outras restrições garantem que este somatório é no máximo 1. Substituindo t_{ep} por esta expressão nas restrições π, obtemos restrições de mesmo efeito para a Formulação Padrão.

5.10.4 Resumos das formulação para o PPHCPM com Geração de Colunas

Resumo da Formulação Padrão para o PPHCPM com Geração de Colunas

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{S_j \in S} c_j \lambda_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr} - \sum_{j \in J^{ep}} \lambda_j = 0 && e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e \\
& \sum_{j \in J^d} \lambda_j = 1 && \forall d \in \mathcal{D} \\
& \sum_{p \in \mathcal{P}^e} \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr} = 1 && \forall e \in \mathcal{E} \\
& \sum_{r \in \mathcal{R}^u} x_{upr} + \sum_{r \in \mathcal{R}^v} x_{vpr} \leq 1 && \forall u \in \mathcal{E}, v \in \Delta(u), p \in \mathcal{P}^u \cap \mathcal{P}^v \\
& \sum_{e \in \mathcal{E}^p \cap \mathcal{E}^r} x_{epr} \leq 1 && \forall p \in \mathcal{P}, r \in \mathcal{R} \\
& \sum_{r \in \mathcal{R}^u} x_{upr} + \sum_{k \in \mathcal{P}^v, k \geq p} \sum_{r \in \mathcal{R}^v} x_{vkr} \leq 1 && \forall u \in \mathcal{E}, v \in Prec(u), p \in \mathcal{P}^u \\
& \lambda_j \in \{0,1\} && j \in J \\
& x_{epr} \in \{0,1\} && \forall e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e, r \in \mathcal{R}^e
\end{aligned}
$$

Resumo da Formulação Indireta para o PPHCPM com Geração de Colunas

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{S_j \in S} c_j \lambda_j \\
\text{s.t.} \quad & y_{ep} - \sum_{j \in J^{ep}} \lambda_j = 0 && e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e \\
& \sum_{j \in J^d} \lambda_j = 1 && \forall d \in \mathcal{D} \\
& \sum_{r \in \mathcal{R}^e} x_{epr} = y_{ep} && \forall e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e \\
& \sum_{p \in \mathcal{P}^e} y_{ep} = 1 && \forall e \in \mathcal{E} \\
& y_{up} + y_{vp} \leq 1 && \forall u \in \mathcal{E}, v \in \Delta(u), p \in \mathcal{P}^u \cap \mathcal{P}^v \\
& \sum_{e \in \mathcal{E}^p \cap \mathcal{E}^r} x_{epr} \leq 1 && \forall p \in \mathcal{P}, r \in \mathcal{R} \\
& y_{up} + \sum_{k \in \mathcal{P}^v, k \geq p} y_{vk} \leq 1 && \forall u \in \mathcal{E}, v \in Prec(u), p \in \mathcal{P}^u \\
& \lambda_j \in \{0,1\} && j \in J \\
& x_{epr} \in \{0,1\} && \forall e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e, r \in \mathcal{R}^e \\
& y_{ep} \in \{0,1\} && \forall e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e
\end{aligned}
$$

Resumo da Formulação de Representantes Assimétricos para o PPHCPM com Geração de Colunas

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{S_j \in S} c_j \lambda_j \\
\text{s.t.} \quad & t_{ep} - \sum_{j \in J^{ep}} \lambda_j = 0 && e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e \\
& \sum_{j \in J^d} \lambda_j = 1 && \forall d \in \mathcal{D} \\
& \sum_{u \in Rep(v)} x_{uv} \geq 1 && \forall v \in \mathcal{E} \\
& x_{uv} + x_{uw} \leq x_{uu} && \forall v \in \mathcal{E}, w \in \Delta(v), u \in Rep(v) \cap Rep(w) \\
& \sum_{r \in \mathcal{R}^v} y_{uvr} = x_{uv} && \forall v \in \mathcal{E}, u \in Rep(v) \\
& \sum_{v \in \mathcal{E}^r \cap Rep^{-1}(u)} y_{uvr} \leq 1 && \forall u \in \mathcal{E}, r \in \mathcal{R} \\
& \sum_{p \in \mathcal{P}^e} q_{ep} = x_{ee} && \forall e \in \mathcal{E} \\
& \sum_{e \in \mathcal{E}^p} q_{ep} \leq 1 && \forall p \in \mathcal{P} \\
& \sum_{p \in \mathcal{P}^e} t_{ep} = 1 && \forall e \in \mathcal{E} \\
& x_{uv} + q_{up} - t_{vp} \leq 1 && \forall v \in \mathcal{E}, u \in Rep(v), p \in \mathcal{P}^u \cap \mathcal{P}^v \\
& x_{uv} + q_{up} \leq 1 && \forall v \in \mathcal{E}, u \in Rep(v), p \in \mathcal{P}^u \setminus \mathcal{P}^v \\
& t_{up} + \sum_{k \in \mathcal{P}^v, k \geq p} t_{vk} \leq 1 && \forall u \in \mathcal{E}, v \in Prec(u), p \in \mathcal{P}^u \\
& \lambda_j \in \{0,1\} && j \in J \\
& x_{uv} \in \{0,1\} && \forall v \in \mathcal{E}, u \in Rep(v) \\
& y_{uvr} \in \{0,1\} && v \in \mathcal{E}, u \in Rep(v), r \in \mathcal{R}^v \\
& q_{ep} \in \{0,1\} && e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e \\
& t_{ep} \in \{0,1\} && e \in \mathcal{E}, p \in \mathcal{P}^e
\end{aligned}
$$

5.10.5
Escolha de colunas para inserção no modelo

Conforme discutimos na seção 3.5, o *custo reduzido* de uma coluna indica o potencial que a mesma tem de melhorar o custo da solução caso ela passe a fazer parte da base. Portanto, definimos um subproblema de *pricing* para buscar as colunas de menor custo reduzido para inserir no modelo.

No caso da reformulação proposta, o custo reduzido $\bar{c}_j$ de uma coluna j é calculado conforme a expressão:

$$\bar{c}_j = c_j - \mu^{D(j)} + \sum_{(e,p) \in S_j} \pi^{ep} \qquad \forall j \in J \tag{5-25}$$

onde $\mathcal{D}(j)$ é o dia do padrão de índice j.

Resolvemos o subproblema de *pricing* heuristicamente, utilizando uma versão modificada do algoritmo de *Simulated Annealing* para o PPHCPM, apresentado na seção 4.3. A solução encontrada pelo algoritmo é uma programação de horários semanal (não necessariamente viável), que dá origem a cinco colunas (uma para cada dia da semana). Devido à forma como modelamos a função objetivo do algoritmo de *Simulated Annealing*, a busca otimiza *a soma dos custos reduzidos* destas cinco colunas, ao invés do custo reduzido de cada coluna individualmente. Por este motivo, é possível que uma coluna de custo não-negativo esteja entre as cinco colunas encontradas.

A modificação no algoritmo de *Simulated Annealing* é feita somente na função de custo, mantendo-se a mesma representação de soluções e vizinhança. O custo de uma solução x, neste novo algoritmo, passa a ser dado pela expressão:

$$f(x) = SCV(x) + DualCost(x)$$

onde o componente $SCV(x)$ é calculado do mesmo modo que no algoritmo inalterado. O componente $DualCost(x)$, por sua vez, é calculado da seguinte forma: para cada alocação (e, p) ocorrendo na solução x, é somado o valor de π^{ep}, e para cada dia d não-vazio, é subtraído o valor de $\mu^{D(j)}$.

Como o valor de $SCV(x)$ é equivalente á soma dos custos c_j para as cinco colunas, o valor da função objetivo de fato equivale à soma dos custos reduzidos dos dias da semana, calculados como na equação 5-25.