BIBLIOGRAFIA

ARISTÓTELES. *Metafísica.* Trad.: Hermán Zucchi. Buenos Aires: Editorial Sudamericana, 1986.

_______________ *On Intrerpretation. Trad.: E.M. Edghill.* Chicago: University of Chicago Press, 1952.

_______________ *Órganon*. Trad.: Edson Bini. São Paulo: Edipro, 2005.

ARMSTRONG, D. M. *Nominalism and Realism – Universals and Scientific Realism.* Vol I and II. Cambridge University Press, 1978.

BAKER G. P.; HACKER, P. M. S. *Sceptisism, rules and language.* Oxford,1985.

__________________"Wittgenstein, meaning and mind." *In*: *Analytic Commentary on the Philosophical Investigations*. Oxford: Blackwell, vol. I, 1983.

__________________ "Wittgenstein: rules, grammar and necessity" *In*: *Analytic Commentary on the Philosophical Investigations.* Oxford: Blackwell, 1993, vol. II, 1985.

BERNAYS, P. *Comments on Ludwig Wittgenstein's remarks no the foundations of mathematics*. Edited by G.H. von Wright, R. Rhes, G.E.M. Anscombe. Basil Blackwell, Oxford, 1956.

BOOLOS, G. "A new proof of the Gödel incompleteness theorem" *In*: *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 36, n° 4, pp. 388-390, 1989.

BOUVERESSE, J. *Le pays des possibles : Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel*. Paris : Minuit, 1988.

BOUVERESSE, J. ; LAUGIER, S. ; ROSAT, J-J. (eds.) *Wittgenstein, dernières pensées*. Agone, 2002.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Trad.: Elza F. Gomide. São Paulo: Ed da Universidade de São Paulo, 1974.

BLACK, M. *A companion to Wittgenstein's Tractatus*. Ithaca: Cornell University Press, 1964.

BROUWER, L.E. J. *The Foundations of Mathematics*. Thesis. 1907.

________________“Intuitionistic reflections on formalism” (1927) *In*: From Frege to Gödel – A Source Book in Mathematical Logical, 1879-1931. Harvard University Press, 1971, pp. 490-492.

_________________ [1948] “Consciousness, philosophy and mathematics” *In: Philosophy of Mathematics - Selected Readings*, P. Benacerraf and H. Putnam, eds., Cambridge U.P., 2nd edition, pp. 90-96, 1983.

CABRERA, J. *Margens das filosofias da linguagem: Conflitos e aproximações entre analíticas, hermenêuticas, fenomenologias e metacrítica da linguagem.* Brasília: editora da Universidade de Brasília, 2003.

CARROLL, L. “What the Tortoise said to Achilles” *In: Mind* 4 , 1895, pp. 278–80.

CATTABRIGA, P. “Observations concerning Gödel's 1931.” Disponível na rede em: http://it.geocities.com/paola_cattabriga/cat1.html#bu Acessado em 20-05-2006.

CHATEAUBRIAND, O. “Descriptions: Frege and Russell combined” *In*: *Synthese*, vol. 130, 2002, pp. 213-226.

CHATEAUBRIAND, O. “Deconstructing ‘On Denoting’” 2005.

CHATEAUBRIAND, O. *Logical forms Part I – Truth and description.* Campinas: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, v.34, 2002.

_____________________ *Logical forms Part II – Logic, Language, and knowledge.* Campinas: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2005.

CHAUVIRÉ, C. *Wittgenstein*. Trad.: Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Zahar, 1989.

_____________. *Voir le visible: la seconde philosophie de Wittgenstein*. Paris : Puf, 2003.

CHAUVIRÉ, C.; LAUGIER, S.(eds.) *Lire les recherches philosophiques*. Paris : Libraire Philosophique J. Vrin, 2006.

CHIHARA, C. S. *Ontology and the Vicious-Circle Principle*. Cornell University Press, 1973.

DA COSTA, N. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*. São Paulo: Editora Hucitec, 1994.

___________ *O conhecimento científico*. São Paulo: Discurso editorial, 1997.

DELOCHE, C. *La philosophie des mathématiques chez Wittgenstein*. Paris: CNRS Éditions, 1995.

DIAMOND, C. "Throwing Away the Ladder: How to Read the *Tractatus*" *In: The Realistic Spirit: Wittgenstein, Philosophy and the Mind*. MIT Press, Cambridge Mass, 1991, pp.179-204.

DUMMETT, M. *Truth and other enigmas*. London: Duckworth, 1978.

______________ "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" (1959) *In*: *Truth and other enigmas.* Cambridge, 1978, pp.166-185.

______________ *The Logical Basis of Metaphysics,* Cambridge (Mass.): Harvard University Press, 1993.

______________ "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic" *In*: *Truth and other enigmas* Harvard, Cambridge, 1973, pp.215-247.

______________ "Truth from the Constructive Standpoint" *In*: *Theoria*, vol. XLIV, 1998, pp.122-138.

_____________ "What is a theory of meaning? II" (1976) *In: The Seas of Language*. Oxford University Press, 1993, pp.34-93.

______________ "What do I Know when I Know a Language?" (1978) *In: The Seas of Language*. Oxford University Press, 1993, pp.94-105.

_______________ "What does the Appeal to Use Do for the Theory of Meaning?" (1979) *In: The Seas of Language*. Oxford University Press, 1993, pp.106-116.

________________ "Language and Truth" (1983) *In*: *The Seas of Language*. Oxford University Press, 1993, pp.117-146.

________________ "Truth and Meaning" (1985) *In*: *The Seas of Language*. Oxford University Press, 1993, pp.147-165.

_________________ "The Source of the Concept of Truth" (1990) *In*: *The Seas of Language*. Oxford University Press, 1993, pp.188-201.

________________ "Realism" (1982) *In*: *The Seas of Language*. Oxford University Press, 1993, pp.230-276.

_______________ "What is Mathematics About?" (1991) *In*: *The Seas of Language*. Oxford University Press, 1993, pp.429-445.

_____________ "Wittgenstein on Necessity: Some Reflections" (1990) *In*: *The Seas of Language*. Oxford University Press, 1993, pp.446-461.

_____________ "Realism and Anti- Realism" (1992) *In*: *The Seas of Language*. Oxford University Press, 1993, pp.462-478.

_____________ "The Philosophical Significance of Gödel's Theorem" *In*: *Truth and other enigmas*. London: Duckworth, 1978.

FLOYD, J. "Wittgenstein sobre Gödel, Tarski e a Verdade." *In: Revista Portuguesa de Filosofia*. Tomo LVIII, Fasc. 3, 2002, pp.605-632.

__________ "On saying what you really want to say: Wittgenstein, Gödel, and the trisection of the angle." *In: From Dedeking to Gödel: essays on the development of the foundations of mathematics.* Boston: Kluver, 1995.

FLOYD, J.; HILARY P. "A note on Wittgenstein's 'notorius paragraph' about the Gödel Theorem." *In:The Journal of Philosoph,* Vol. 97*,* Nº 11*, November* 2000, pp.624-633.

FLOYD, J. ; FRASCOLLA, P.; MARION, M.. *Wittgenstein et les Mathématiques*. Éditions Trans-Europ-Repress, 2004.

FRANZÉN, T. *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse*. A K Peters, Paperback, 2005.

FRASCOLLA, P. *Wittgenstein Philosophy of Mathematics*. London and New York: Routledge, 1994.

_____________ "Sur la Preuve Mathematique". Trad. : François Schmitz. , pp.43-59.

FREGE, G. *Begriffsschrift* (1979). Editado por Ignácio Angelelli. Hildesheim: George Oms Verlag, 1998.

____________ *Philosophical and Mathematical Correspondence*, G. Gabriel, *et al*. (eds.) Oxford: Blackwell Publishers, 1980.

__________ *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. (1884) Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner. Reimpresso em Die Grundlagen der Arithmetik – Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Editado por Christian Thiel. Hamburg: Felix Mener Verlag, 1988.

__________ *Os Fundamentos da Aritmética. Uma investigação sobre o conceito de número.* Trad.: Luís Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Abril Cutural (Os Pensadores).

__________ "Sobre o Sentido e a Referência" (1892). Tradução: Paulo Alcoforado. Em: *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Cultrix, 1978, pp.59-86

__________ "Sobre o Conceito e o Objeto" (1892). Tradução: Paulo Alcoforado. *In*: *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Cultrix, 1978, pp.89-116.

_________. Grundgesetze der Arithmetik. Vol I. (1893) Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1962.

_________ "Função e Conceito" (1962). Tradução: Paulo Alcoforado. *In*: *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Cultrix, 1978, pp.33-57.

__________ "Que é uma Função?" (1904). Tradução: Paulo Alcoforado. *In*: *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Cultrix, 1978, pp.119-129.

FUMERTON, R. "Knowledge by Acquaintance vs. Description", *In: The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Edward N. Zalta (ed.), 2008.

GALLERANI CUTER, J.V. " 'p' diz p" *In*: *Cadernos Wittgenstein*, n 1, 2000, pp57-68.

______________________. "A Aritmética do Tractatus" *In: Manuscrito – Revista Internacional de Filosofia.*, Vol. XVII, nº02, Outubro 1995, pp.109-139.

_______________________ "A Lógica do Tractatus" *In*: *Manuscrito – Revista Internacional de Filosofia*., Vol. XXV, nº01, Abril 2002, pp.87-120.

_______________________ *A teoria da figuração e a teoria dos tipos: o Tractatus no contexto do projeto logicista.* Tese de doutorado. Orientador: Luiz Henrique Lopes dos Santos. FFLCH-USP, 1993.

GLOCK, H-J. *Dicionário Wittgenstein*. Trad.: Helena Martins. Revisão Técnica: Luiz Carlos Pereira. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed.,1998.

GÖDEL, K. "Some matemathematical results on completeness and consistency, On formally undecidable propositions of Principia Mathematical and related systems and On completeness and consistency" (1930, 1931). *In: From Frege to Gödel – A Source Book in Mathematical Logical, 1879-1931*. Harvard University Press, 1971, pp.592-617.

__________ "Russell's mathematical logic" (1944) *In: Kurt Gödel Collected Works – Vol. II* Edited by Solon Feferman, Oxford University Press, 1990, pp.102-141.

__________"Is mathematics syntax of language?" (1953/9) *In*: *Kurt Gödel Collected Works – Vol.III* Edited by Solon Feferman, Oxford University Press, 1995, p.325-362.

GOLDSTEIN, R. *Incompletesness – The proof and paradox of Kurt Gödel.* New York and London: W.W. Norton & Company, 2005.

GOLDFARB, W. "Wittgenstein on Fixity of Meaning" *In*: *Early Analytic Philosophy: Frege, Russell and Wittgenstein.* Ed.: William Tait. Caurus Publishing Company, 1997, pp.75-89.

GRATTAN-GUINNESS, I. *Dear Russell-Dear Jourdain*. Duckworth, 1977.

HAAK, S. *Filosofias das Lógicas*. Tradução: Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra. UNESP, 2002.

HACKER, P. M. S. *Insight and ilusion: themes in the philisophy of Wittgenstein*. Oxford: Clarendon Press,1986.

HADOT, P. *Wittgenstein et les limites du langage*. Paris : Libraire Philosophique J. Vrin, 2004

HEINZMANN, G. *Entre Intuition et Analyse. Poincaré et le concept de prédicativité.* Paris : Albert Blanchard, 1985.

___________ (Org.) *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano – Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des Mathématiques : des antinomies à la prédicativité.* Paris : Albert Blanchard, 1986.

HILBERT. "On the Infinite" (1925) *In: From Frege to Gödel – A Source Book in Mathematical Logical, 1879-1931*. Harvard University Press, 1971, pp.367-392.

_________ "The foundations of mathematics" (1927)) *In: From Frege to Gödel – A Source Book in Mathematical Logical, 1879-1931*. Harvard University Press, 1971, pp.464-479.

HINTIKKA, J. "Identity, variables, and impredicative definitions." *In: Journal of Symbolic Logic*, vol. 21, 1956, pp.225-245.

HYLTON, P. “Functions, operations and sense in Wittgenstein’s Tractatus. *In: Early analytic Philosophy: Frege, Russell, Wittgenstein.* Chicago: Open Court, 1997.

__________ “The theory of Descriptions.” *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*. Edited by Nicholas Griffin. Cambridge University Press, 2003, pp. 202-240.

HOFSTADTER, D.R. *Gödel, Escher, Bach: um entrelaçamento de gênios brilhantes*. Trad.: José Viegas Filho. Ed. UnB. , 2000.

KAPLAN, D. “Reading ‘On Denoting’ on its Centenary” *In*: *Mind*, Vol. 114, n° 456, 2005, pp. 933-1003.

KREISEL, G. “Wittgenstein’s Lectures on the Foundations of Mathematics.” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 1, 1969, pp.79-90.

___________ “La Prédicativité.” *Bull. Soc. Math*. France 88: 371-91, 1960

KRIPKE, S. A. *Wittgenstein on rules and private language.* Cambridge: Havard University Press, 1982.

LAUGIER, S. (Ed.) *Wittgenstein, mètaphysique, et jeux de langage*. Paris : Press Universitaires de France, 2001.

MCGUINNESS, B. *Wittgenstein: a life*. Londres: Duckworth, 1988.

_________________ ; VON WRIGHT, G.H. (Eds.) *Cambridge Letters: correspondence with Russell, Keynes, Moore, Ramsey, and Sraffa,* 1997.

MANUEL, L.(Org.) *O teorema de Gödel e a hipótese do contínuo*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1968.

MARION, M. *Ludwig Wittgenstein : Introduction au Tractatus logico-philosophicus*. Paris, Puf, 2004.

MARTIN-LÖF, P. “Verificationism Then and Now” *In*: *The Foundational Debate*, eds. Depauli-Schmanovich et al, 1995, pp.187-195

__________ “A Path from Logic to Metaphysics” (17 p.) Department of Mathematics, University of Stockholm, Box 6701, 113 85 Stockholm, Sweden, 1990.

MEDINA, J. *The unity of Wittgenstein's Philosophy: necessity, intelligibility and normativity.* State University of New York, 2002.

MENDONÇA, W. "Wittgenstein e os Números" *In: O que nos faz pensar*. Cadernos do Depto. de Filosofia da PUC-Rio, Abril de 1991, nº04.

MONK, R. *Bertrand Russell – Matemática: sonhos e pesadelos*. Tradução: Luiz Henrique de A. Dutra. São Paulo: UNESP, 2000. (Coleção Grandes Filósofos).

MOORE, G.E. "The Nature of Judgement" *In: Mind*, Vol. 08, nº 30, 1899, pp.176-193.

________ *Wittgenstein: o dever do gênio*. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. *A prova de Gödel*. Tradução: Gita K. Guinsburg. São Paulo: Perspectiva, 2001.

PARSONS, C. "The impredicativity of inductions." *In: Proof, Logic and Formalization.* Edited by Michael Detlefsen. London and New York: Routledge, 1992, pp.139-161.

____________. *On construtive interpretation of predicative mathematics.* New York: Garland, 1990.

PELLETIER, F.J.; ZALTA, E.N. "How to say goodbye to the third man." *In*: *Noûs* 34:2, Blackwell Publishers, 2000, 165-202.

PEREIRA, L.C. "Brouwer e a natureza da lógica" ANCBA, Centenário Brouwer, 2007, pp.45-55.

PEREIRA, L.C.; PORTO, A. "Algumas Considerações sobre a Noção Construtiva de Verdade" In: *O que nos faz pensar*, n° 17, PUC-RIO, dezembro 2003, pp.107-123.

PERELMAN, C. « L'antinomie de M. Gödel. » *In: Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des Science*, srei 05, Vol. 22, 1936, pp.730-736.

PLATÃO. *Parmênides*. Tradução: Maura Iglésias e Fernando Rodrigues. Rio de Janeiro: Editora PUC-RJ; São Paulo: Edições Loyola, 2003.

________ *Sofista.* Trad.: Jorge Paleikat e João Cruz Costa. São Paulo: Nova Cultural, 1987. (Os Pensadores).

POINCARÉ, J.H. « A Propos de la Logistique ». *In: Revue de Métaphysique et de Morale*, 14, 1906b, pp.866-68

______________. *Mathematiques and Science*: Last Essays. Trad. : W.Bolduc. New York : Dover, 1963.

______________ *Dernières Pensées*. Paris: Flammarion, 1913.

______________ *La valeur de la Science*. Paris: Flammarion, 1913.

______________ *Les Mathématiques e la Logique*. RMM, 13, 1905.

______________ *Les Mathématiques e la Logique*. RMM, 14, 1906.

______________ *Science et Méthode*. Paris: Flammarion, 1956.

_____________ *La Science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion, 1968.

POTTER, M. *Set Theory and its Philosophy.* Oxford University Press, 2004

PRAWITZ, Dag. "The Conflict Between Classical and Intuitionistic Logic" *In*: *Theoria*, vol. XLIII, 1977, p.2-39

___________ "Problems for a Generalization of a Verificationist Theory of Meaning" *Topoi* 21, Kluwer Academic Publishers, 2002, pp.87-92

___________ "Truth and Objectivity from a Verificationist Point of View" *In: Truth in Mathematics*, eds. H.G. Dales & al., Claredon, Oxford, 1998, pp. 41-51.

___________ "Meaning Approached via Proofs" *In: Synthese* (2006) 148: pp.507-524.

PRIEST, G. "The Structure of the Paradoxes of Self-Reference" *In*: Mind. Vol. 103, N° 409, January 1994, pp.25-34.

PUTNAM, H. *Words and Life* Edited by James Conant. Cambridge; Massachusetts: Harvard University Press, 1994.

____________ *Many faces of realism* Open Court, 1987

____________ *Realism and reason* Cambridge: University Press, 1983.

____________ *Philosophy of Mathematics: selected readings*. Cambridge: University Press, 1983.

QUINE, W. O. "Two Dogmas of Empircism." *In: From a Logical Point of View.* Cambridge, Massachusetts: Havard University Press, 1980.

RAMSEY, F. P. *The Foundantions of Mathematics*. Routledge, 1931.

RAO, A. P. *Understanding Principia and Tractatus: Russell and Wittgenstein revisited*. International Scholars Publications, 1936.

READ, R. "Gödel's Theorem over-interpreted: There is no such thing as *de re* self-reference" (2005) Disponível na rede em: www.uea.ac.uk/~j339/publications.htm, acessado em 10-05-2007.

_________"The career of internal relations in Wittgenstein's work" *In.: Wittgenstein Studies* (1997), 22-2-97. Disponível em: www.uea.ac.uk/~j339/publications.htm , acessado em 10-05-2007.

_________"Frege against logicism" (2002) Disponível em: http://www.uea.ac.uk/~j339/publications.htm , acessado em 10-01-2009.

ROTMAN, B. *Ad infinitum... - The ghost in turing machine: taking God out of mathematics and putting the body backin.* Stanford University Press, 1993.

RUSSELL, B. "The Existential Import of Propositions" *Mind*, 14, 1905, pp.398-401.

__________ "Meinong's theory of complexes and assumptions" *Mind*, 13, 50, 1904, pp. 204-219.

____________ "On Denoting" *Mind,* 14, 1905, pp.479-93

____________ *An Essay on the Foundations of Geometry* Cambridge: Cambridge University Press, 1897.

____________ *Mysticism and Logic and Other Essays.* Watford, U.K.: Taylor, Garnet, &Evans, 1917.

____________"Vagueness" *Australasian Journal of Philosophy* 1:297-414.

____________"On some Difficulties of Continuous Quantity" *In: The Collected Papers of Bertrand Russell*, vol.2.Ed. Nicholas Griffin and Albert C. Lewis London: Unwin Hyman.

_____________ *The Principles of Mathematics* (1903). Norton & Company, 1996.

____________*The Problems of Philosophy* London: Oxford University Press, 1912.

____________ *Conhecimento: ensaios escolhidos.* Tradução: Pablo Rubén Mariconda. São Paulo: Nova Cultural, 1989. (Os Pensadores)

____________ *Introdução à Filosofia da Matemática* (1919). Tradução: Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar, 1963.

____________ "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" (1908) *In: From Frege to Gödel – A Source Book in Mathematical Logical, 1879-1931*. Harvard University Press, 1971, pp.150-182.

____________ *Theory of Knowledge - The 1913 Manuscript.* (TK) Londres, Allen & Unwin, 1984.

____________ *O conhecimento humano – sua finalidade e seus limites*. Tradução: Leonidas Contijo de Carvalho. São Paulo: Nacional, 1958.

____________ *My Philosophical Development*. George Allen & Unwin LTD, 1959.

____________ "My Mental Development" *The Philosophy of Bertrand Russell*. Edited by P. Schilpp. New York: Tudor, 1944, pp.3-20.

____________ "Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description" PAS New Series. Vol. XI, 1910-11, pp.108-128.

_____________"On the Nature of Truth and Falsehood." *In*: *Philosophical Essays*, 147-59. London: Longmans, Green, 1910.

RUSSELL, B; WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica to 56*. (PM) Cambridge University Press, 1910.

_____________________________ "Incomplete Symbols: Descriptions" (1910) *In: From Frege to Gödel – A Source Book in Mathematical Logical, 1879-1931*. Harvard University Press, 1971, pp.216-223.

SAYWARD, C. "On some much maligned remarks of Wittgenstein on Gödel." *In: Philosophical Investigations*, 24:3, July 2001, pp. 262-270.

SCHMITZ, F. *Wittgenstein*. Tradução: José Oscar de Almeida Marques. São Paulo: Estação Liberdade, 2004.

___________. *Wittgenstein, la philosophie et les mathématiques*. Paris : Puf, 1988.

SLUGA, H.; STERN, D.G. (editores) *The Cambridge Companion to Wittgenstein*. Cambridge University Press, 1996.

SHANKER, S. G. *Gödel's Theorem in Focus*. Ed.: S. G. Shanker. Routledge and Kegan Paul, London and New York, 1989.

______________ *Wittgenstein and the Turning-Point in Philosophy of Mathematics.* London and Sydney: Croom Helm, 1987.

SILVA, J.J. *Sobre o predicativismo em Hermann Weyl.* Campinas: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1989.

SIMMONS, K. *Universality and the Liar: An Essay on Truth and the Diagonal Argument.* Cambridge University Press, 1993.

SIMPSON, T. M. *Linguagem, realidade e significado*. Tradução: Paulo Alcoforado. São Paulo: EDUSP, 1976.

SMULLYAN, R. "Gödel's Incompleteness Theorems" *In*: The Blackwell Guide to Philosophical Logic. Edited by Lou Goble. Blackwell, 2001

______________ "Diagonalization and Self-Reference" Oxford: Clarendon Press, 1994.

SORENSEN, R. *A brief history of the paradox* Oxford University Press, 2003

STENLUND, S. *Language and Philosophical Problems.* London and New York: Routledge, 1990.

___________. *Contuinity and Change in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*. Uppsala University, 2008.

TARSKI, A. "The semantic conception of truth and the foundation of semantics." *In*: *Pilosophy and Phenomenological Research*, v.4, p.341-376, 1944.

_________ "The concept of truth in formalizad languages". *In: Logic, Semantics, Metamathematics*. Translations by J. H. Woodger. Clarendon Press, 1956, pp.152-278.

_________ *Undecidables Theories*. In collaboration with Andrzej Mostowski and Raphael M. Robinson. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1953.

URQUHART, A. "The Theory of Types". *In: The Cambridge Companion to Bertrand Russell*. Nicholas Griffin (ed.), 2006, pp.286-296.

URQUHART, A. (ed. and introduction); LEWIS, A.C. (ed.) *The collected papers of Bertrand Russell*. Vol IV. John Passmore (ed. general). Routledge, 1994.

VAN ATTEN, M. "The hypothetical judgement in the history of intuitionistic logic" LMPS Beijing, 2007, pp.1-13.

WANG, H. *Reflexiones sobre Kurt Gödel*. Versión española de Pilar Caltilo Criado. Alianza Universidad, 1987.

__________ *From Mathematics to Philosophy*. London: Routledge & Kegan Paul, 1974.

WEISS, P. "The Theory od Types." *In: Mind*. N.S., 37, 1928, pp.338-448.

WITTGENSTEIN, L. *Tractatus logico-philosophicus* (*TLP*) Tradução, apresentação, e estudo introdutório: Luiz Henrique Lopes dos Santos. Introdução: Bertrand Russel. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1993.

____________________ *Investigações filosóficas* (*IF*) Trad.: José Carlos Bruni. São Paulo: Nova Cultural, 1989. (Os Pensadores).

____________________ *Philosophical Investigations* (*PI*) New York, Macmillan Publishing, 1968.

___________________ *Notebooks 1914-1916* (*NB*) Chicago University Press, 1979.

__________________ *Prototractatus. An Early Version of Tractatus Logico-Philosophicus*. Cornell University Press, 1971

___________________ "Filosofia" *In: Manuscrito - Revista Internacional de Filosofia.* Trad.: Antonio Zilhão. São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, Vol. XVIII-n° 2 - outubro 1995.

___________________ *Quelques remarques sur la forme logique* (*RFL*) Trad.: Elisabeth Rigal. TER, 1985.

___________________ *Carnets Secrets* (*CS*) Traduit par Jean-Pierre Cometti. Farrago, 2001.

___________________ *Ludwig Wittgenstein and the Vienna Circle: conversations recordations by Friedrich Waismann* (*WVC*) Oxford: Blackwell, 1979.

___________________ *Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics* (*LFM*) Diamond (ed.). The Haverster, 1976.

___________________ *Wittgenstein's Lectures, Cambridge 1932-35 (AWL*) Alice Ambrose (ed.) Rowan and Littlefield, 1979.

___________________ *Remarks on Foundations of Mathematics* (*RFM*) Edited by G.H.von Wright, R. Rhees and G. E. M. Anscombe. Translated by G. E. M. Anscombe. Oxford: Blackwell, 1967.

____________________ *Philosophical Remarks*. (*PR*) Trad.: Raymond Hargreaves, Roger White. University of Chicago Press, 1980.

__________________ *Philosophical Grammar*. (*PG*) Org.: R. Rhees. Oxford: Blackwell, 1974.

__________________ *Anotações sobre as cores* (*ASC*) Trad.: Filipe Nogueira e Maria João Freitas. Lisboa: Edições 70, 1977.

__________________ *The blue and the brow books* (1933-1935). (*BB* e *BrB*) Oxford: Blackwell, 1958.

__________________ *On Certainty* (*OC*) Oxford: Blackwell, 2003.

__________________ *Da Certeza* (*DC*) Trad.: Maria Elisa Costa. Lisboa: Edições 70, s/data.

__________________ *Zettel* (Fichas) (*Z*) Lisboa: Edições 70, 1989.

__________________*Wittgenstein's Nachlass*. The Bergen Electronic Edition. Oxford University, 2000.

WRIGHT, C. *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*. Duckworth, Londres, 1980.

____________ "Rule-Following, Objectivity and the Theory of Meaning." *In*: *Wittgenstein: to follow a rule*. Editado por Steven H. Holtzman e Christopher M. Leich . Routledge & Kegan Paul, 1981, pp.99-118.

WRIGLEY, M. "Wittgenstein, Ramsey and the infinite" *In: The british tradition in analytical philosophy*. Editado por Jaakko Hintikka, Vienna, 1995, pp.1-7

APÊNDICE

AS OBSERVAÇÕES DE WITTGENSTEIN SOBRE O TEOREMA DE GÖDEL

Introdução

O objetivo deste texto é aplicar nossas interpretações do pensamento de Wittgenstein aos seus muito mal vistos comentários sobre o teorema de Gödel. Com isso, pretendemos não torná-los menos mal vistos, considerando que isso talvez não seja possível, mas ajudar a entender as posições realmente mantidas por Wittgenstein sobre o tema. Não pretendemos aqui nem atribuir a Wittgenstein algo que ele não disse, nem esconder o que é textual visando fornecer uma interpretação mais palatável das suas observações. Afinal, como Wittgenstein afirmou:

> A mathematician is bound to be horrified by my mathematical comments, since he has always been trained to avoid indulging in thoughts and doubts of the kind I develop. He has learned to regard them as something contemptible and, to use an analogy from psycho-analysis (this paragraph is reminiscent of Freud), he has acquired a revulsion from them as infantile. That is to say, I trot out all the problems that a child learning arithmetic, etc., finds difficult, the problems that education represses without solving. I say to those repressed doubts: you are quite correct, go on asking, demand clarification! (*PG*, II, V, 25)

É uma opinião comumente aceita que Wittgenstein não compreendeu o teorema de Gödel. Além de Kreisel, Bernays e Dummett, foi o próprio Gödel quem, como se sabe, afirmou categoricamente, em uma carta a Menger, que Wittgenstein não entendera seu teorema:

> Relativamente ao meu teorema que trata das proposições indecidíveis, é na realidade claro das passagens que você cita que Wittgenstein não o compreendeu (ou fingiu não o ter compreendido). Ele interpreta-o como uma espécie de paradoxo lógico, quando de fato é precisamente o oposto, nomeadamente um teorema matemático dentro de uma parte da matemática absolutamente

> incontroversa (teoria dos números finitos ou combinatórios). A propósito disso, toda a passagem que você cita parece-me disparatada. Veja e.g. o 'medo supersticioso dos matemáticos perante as contradições'(Gödel, *In*.: Wang, 1987, p.92)

Por outro lado, aqueles que tentam defender a leitura de Wittgenstein atentam principalmente para o fato de que suas críticas aplicam-se não propriamente ao teorema, mas à interpretação filosófica deste – o que ele chama de 'a prosa sobre o cálculo', que envolveria uma confusão acerca das noções de verdade e demonstrabilidade (*Cf:* Floyd, 2002). Wittgenstein não estaria criticando o teorema ou a prova, mas estaria criticando uma leitura metafísica do teorema, que o utilizaria como prova do platonismo matemático, a partir da conclusão, atribuída à prova, segundo a qual a verdade não poderia ser equacionada com a demonstrabilidade. Gödel teria provado que existem verdades matemáticas indemonstráveis ou, mais forte ainda, que a verdade ultrapassa a demonstrabilidade, e são formulações como estas que Wittgenstein não aceita, e considera expressões de uma confusão filosófica. O que Wittgenstein está criticando é, primariamente, a própria pretensão de se provar matematicamente uma verdade metafísica, como se o teorema tivesse demonstrado uma tese filosófica. Uma das posições argumentadas por Wittgenstein é que teses filosóficas não podem ser demonstradas, desde que se restringem a questões conceituais, que devem ser submetidas à análise gramatical, então, se é assim, tal como ele analisa em sua obra, a prova de Gödel pode estar expressando um limite de nossos conceitos, mas não pode estar provando nenhuma tese ontológica: "Pode ser perguntado que importância tem a prova de Gödel para nosso tipo de trabalho. Pois um pedaço da matemática não pode resolver problemas do tipo que nos perturbam." (*RFM*, VII, 22) A questão central de Wittgenstein é justamente 'o que podemos ou não compreender do teorema de Gödel?' E, de fato, esta abordagem não se restringe a sua leitura de Gödel, mas aplica-se a todas as suas polêmicas passagens contra Russell, Cantor, ou Dedekind, em relação aos quais Wittgenstein também pretendeu erguer uma análise gramatical relativa à interpretação filosófica de seus resultados.[1]

[1] "It is always right to be extremely suspicious when proofs in mathematics are taken with greater generality than is warranted by the known application of the proof. This is always a case of the mistake that sees general concepts and particular cases in mathematics. In set theory we meet this suspect generality at every step." (*PG*, II, VII, 40).

> Não é minha tarefa atacar a lógica de Russell de dentro, mas de fora. Isso significa dizer: não atacá-la matematicamente – de outro modo eu deveria estar fazendo matemática – mas sua posição, sua função. Minha posição não é falar sobre a prova de Gödel, mas ultrapassá-la. (*RFM*, VII, 19)

Contudo, de fato, Wittgenstein em algumas passagens interpreta a sentença de Gödel como um paradoxo análogo ao paradoxo do mentiroso, e é em relação a este ponto que se aplica, mais diretamente, a acusação de que ele não teria compreendido o teorema de Gödel. No que se segue, pretendemos conferir alguma clareza às passagens de Wittgenstein sobre Gödel, mostrando a coerência interna destas observações com as demais posições mantidas pelo autor. Fazendo isso, apresentaremos e explicaremos em detalhe a interpretação que Juliet Floyd e Hilary Putnam propõem, avaliando em que medida tal proposta é plausível. Finalmente, comentaremos como as críticas de Wittgenstein a Gödel podem ser ditas aplicarem-se primariamente ao problema de princípio inerente à própria demanda do programa de Hilbert.

O teorema de Gödel e o discurso matemático

A crítica mais clara em Wittgenstein, relativamente à prova de Gödel, diz respeito à interpretação da prova como estabelecendo que a sentença *G,* indecidível, seria verdadeira ainda que indemonstrável. Primeiramente, a razão para Wittgenstein recusar que a sentença de Gödel seja entendida como verdadeira ainda que indemonstrável parece dizer respeito à sua própria concepção acerca da natureza das proposições matemáticas. Para Wittgenstein, onde faz sentido falar em verdade, o sentido da proposição deve ser determinado independentemente da sua verdade ou falsidade e, por isso, a proposição pode ser verdadeira ou falsa. Por outro lado, o âmbito necessário da linguagem estabeleceria os critérios a partir dos quais poderíamos julgar se uma dada sentença é verdadeira ou falsa, e este âmbito seria normativo. O âmbito da matemática é então entendido, por Wittgenstein, como completamente normativo, posto que completamente composto por proposições necessárias. Neste âmbito, a determinação da verdade não seria independente da determinação da semântica e, por isso, se vamos continuar falando em 'verdade' no contexto da aritmética será somente em um sentido no qual não apenas 'ser demonstrável' é o sentido de verdade primário, como também esta própria demonstrabilidade determina o significado das proposições ou fórmulas, não fazendo sequer sentido falar de uma proposição matemática independentemente de sua demonstração. Sendo assim, supor que uma sentença que afirma de si mesma que não é demonstrável, é verdadeira, ainda que indemonstrável no sistema, por um critério externo, parece ser também supor que o próprio âmbito da determinação do significado da sentença é, de alguma forma, também julgado por critérios externos, tendo em vista algum padrão independente à demonstrabilidade no sistema, que determinaria ao mesmo tempo (de modo absoluto) a verdade e a semântica da proposição (suas condições de verdade), e é esta posição, diretamente então associada ao realismo matemático, que Wittgenstein deseja recusar.

As análises de Wittgenstein do contexto normativo da matemática têm como conclusão que, neste contexto, não há e nem pode haver um critério externo em virtude do qual pudéssemos dizer que a sentença é verdadeira para além da sua demonstrabilidade. Isso porque a demonstrabilidade seria constitutiva do sentido da sentença. Como, em relação ao âmbito da matemática, Wittgenstein conclui que as possibilidades em princípio de uma sentença encontram-se colapsadas às suas possibilidades factuais, dizer que uma sentença é demonstrável é o único sentido no qual poderíamos dizer que a sentença é verdadeira. Não haveria independentemente da prova, critérios para a verdade da sentença já determinados, e, sendo assim, não teríamos em que nos basear para dizer que a sentença é, apesar de indemonstrável, verdadeira. Como a sentença é necessária (desde que se trata de uma sentença matemática), a verdade da sentença seria dada com seu sentido. Por isso Wittgenstein compara a sentença de Gödel com uma sentença empírica, objetivando deixar claro que o que se conclui para a sentença de Gödel, no final das contas, é o que se esperaria como natural de uma sentença contingente, que pode ser verdadeira ou não sem deixar de ter sentido. Por outro lado, se entender a sentença for entendê-la como demonstrável, dizer que uma sentença desta natureza pode ser verdadeira ainda que indemonstrável é necessariamente confundir o âmbito necessário da linguagem com o âmbito contingente e, com isso, tratar o impossível como possível, que é o que ocorre quando proferimos absurdos.

> - Mas é provavelmente diferente - se eu digo: chove; ou: a proposição 'chove' depreende-se conseqüentemente adiante! Mas e se as proposições apenas fossem reconhecidas por depreenderem-se delas, e se se seguir daquelas fosse o único critério que nós estabelecemos como válido para a correção de 'chove'? (Wittgenstein, 2000, item 121 85r)

Se for assim, uma sentença que se afirma indemonstrável estaria dizendo-se impossível, e não poderia ser verdadeira sem contradição, do que se segue em grande medida o próprio caráter paradoxal que Wittgenstein atribui à sentença. "Bem, se você lê esta proposição [a sentença G de Gödel] e (por exemplo) diz: auto-evidente; então se pode atribuir a você uma contradição." (Wittgenstein, 2000, item 121 80r)

Vemos assim a importância de mantermos como pano de fundo as considerações gerais de Wittgenstein sobre as provas e as proposições matemáticas para melhor entendermos seus comentários sobre Gödel. Mas, com isso, apesar de Wittgenstein possuir razões independentes para sua abordagem das proposições matemáticas, parece que caberia a Wittgenstein justificar sua posição antes do que, com base nela, rejeitar a interpretação que se faz do resultado de Gödel. Mais do que isso, parece que Wittgenstein sustenta uma concepção semântica em grande medida anti-realista, e, com base nesta, pretende interditar uma interpretação do resultado de Gödel (que justamente é interpretada como colocando as teorias anti-realistas em cheque). Dessa forma, Wittgenstein incorreria em uma clara *petição de princípio*, e é isso que afirma mesmo alguém bastante simpático com ponto de vista de Wittgenstein, como Glock:

> Wittgenstein não pôs em questão a validade da prova, mas somente a interpretação de 'P' como um enunciado que afirma ser ao mesmo tempo indemonstrável e verdadeiro. Um de seus argumentos é que essa interpretação é paradoxal, já que, para que 'P' seja verdadeiro em S, deve ou ser um axioma de S ou ter sido demonstrado a partir de tais axiomas. (...) [a linha de argumentação] pressupõe, entretanto, a sua visão de que uma sentença só constitui uma verdade matemática dotada de significado se tiver sido derivada de um sistema de prova específico. Sem razões independentes para essa visão, o ataque de Wittgenstein a Gödel peca por petição de princípio, uma vez que a interpretação de Gödel implica precisamente que *há um abismo entre significado e verdade matemáticos, por um lado, e prova e demonstrabilidade matemáticas, por outro.* (Glock, 1998, pp. 105-106)

Como responder então a esta objeção? O caminho passa por notar que, para Wittgenstein, é a interpretação filosófica da sentença de Gödel como sendo verdadeira, porém indemonstrável, que supõe já o realismo do significado, e que, assim, se esta interpretação é usada como uma evidência (ou mesmo uma prova) do realismo, Wittgenstein pode inverter a acusação de petição de princípio para aquele que o acusa.

Este não é, de fato, o ponto mais difícil de ser defendido em meio às demais observações de Wittgenstein, quase sempre obscuras e polêmicas. Tem sido largamente notado que a prova de Gödel não afirma nem poderia afirmar nada sobre a verdade da sentença G. Como salienta, por exemplo, Torkel Franzén, todas as sentenças que são verdadeiras na prova de Gödel são de fato demonstradas e, dado que a sentença G, pelo segundo teorema de incompletude, seria mesmo equivalente à consistência do sistema, a impossibilidade de se provar G no sistema equivaleria mesmo à impossibilidade do sistema provar sua própria consistência.

> (...) é freqüentemente dito que a prova de Gödel mostra que G é verdadeira, ou ‘em algum sentido’ verdadeira. Mas a prova não mostra G verdadeira. O que aprendemos da prova é que G é verdadeira se e apenas se S é consistente. Nessa observação, não existe razão para usar qualquer formulação como ‘em algum sentido verdadeira’ (...). A prova de Gödel não mostra que existe qualquer enunciado aritmético que sabemos ser verdadeiro mas não é provável em S, pois o enunciado ‘S é consistente se e apenas se G’ é provável em S (...). (Franzén, 2005, p.99)

Charles Sayward também recentemente defendeu os argumentos de Wittgenstein, mantendo que a leitura da sentença de Gödel como uma verdade indemonstrável já suporia a concepção platônica de verdade, e que, portanto o teorema de Gödel não poderia ser legitimamente entendido como provando o platonismo.

> O argumento A [que estabelece a existência de sentenças verdadeiras, mas indemonstráveis em um dado sistema] pressupõe, em geral, que a verdade é o mesmo tipo de coisa em cada área na qual falamos da verdade, e que a verdade matemática, em particular, é uma noção sistema-independente. Esta tese é uma tese filosófica. Se não a aceitamos, não precisamos aceitar o argumento A. (Sayward, 2001, p.267)

O ponto de Sayward é que a noção clássica de semântica e de verdade (de semântica determinada por condições e verdade) pressuporia que todas as sentenças teriam um valor de verdade determinado, e tal pressuposição é que estaria na base da interpretação da sentença de Gödel como provando que nossos métodos de verificação não alcançam todas as verdades que existem. Uma leitura anti-realista, tal como a mantida por Dummett, por exemplo, ao contrário, entende justamente que a prova de Gödel revelaria que a matemática tem buracos de valor de verdade (*Cf.:* Dummett, 1978, pp.186-191). Wittgenstein, por seu turno, também não aceitaria isso porque sua posição é, antes, que a prova, enquanto prova matemática, não poderia provar qualquer posição filosófica, nem realista, nem anti-realista.

O que Wittgenstein afirma, expressamente (*Cf.: RFM*, I, Ap. III, 8), é que se uma proposição que se diz indemonstrável for falsa, não será indemonstrável, mas será demonstrável, e, portanto, verdadeira. Por outro lado, se a tomarmos como verdadeira, mas não demonstrável no sistema, a aparência paradoxal é eliminada. E é, de fato, isso também o que nos diz Smullyan:

> Ao invés de um paradoxo, existe agora uma interessante verdade – nomeadamente, que a sentença acima deve ser uma verdade que não é demonstrável no sistema S, porque se ela fosse falsa, diferentemente do que dissemos, seria provável no sistema S, contrariando o dado fato de que S é um sistema correto que nunca prova qualquer sentença falsa. Então, a sentença é verdadeira e então também não demonstrável no sistema. (Smullyan, 2001, p.73)

Parece assim que ser verdadeira (no sistema) não pode significar, então, ser demonstrável (no sistema), porque se a sentença que afirma de si mesma que não é demonstrável, fosse verdadeira e, com isso, demonstrável no sistema, seria falsa. "Estabelecemos assim a condição de verdade: se a sentença é provável, deve ser falsa" (Wittgenstein, 2000, item 121 79r). Para Wittgenstein, a interpretação da proposição como verdadeira procederia apenas na direção de eliminar a limitação expressa pela sentença, que não é simplesmente aceita como um resultado limitativo por conta já da suposição do realismo. A interpretação realista da prova expressaria, para Wittgenstein, uma mudança no uso de nossos conceitos, e, portanto, uma da confusão conceitual. É interessante notar que Wittgenstein freqüentemente analisa provas e argumentos com supostos resultados filosóficos da seguinte forma: usamos nossos conceitos de um modo tal e tal, em seguida procedemos com uma mudança nas regras, e dizemos então que descobrimos uma verdade filosófica, a qual consistiria justamente apenas nessa mudança gramatical "esquecida".

Diante disso, Wittgenstein questiona também: o que significa exatamente considerar que uma sentença é verdadeira *no sistema*, mas provada verdadeira *fora* do sistema? A seguinte passagem é ilustrativa destes questionamentos:

> Mas não podem existir proposições verdadeiras que são escritas nesse simbolismo, mas não são prováveis no sistema de Russell?" – 'Proposições Verdadeiras', proposições que são verdadeiras em outro sistema, i.e., podem ser certamente afirmadas em outro jogo. Certamente, por que não deveriam existir semelhantes proposições; ou antes: por que proposições da física, e.g., não devem ser escritas no simbolismo de Russell? [sic.: proposições da física são verdadeiras, mas não prováveis no sistema] A questão é análoga a: podem existir proposições verdadeiras na linguagem de Euclides, que não são prováveis em seu sistema, mas que são verdadeiras? Porque existem proposições que são prováveis no sistema de Euclides que são falsas em outro sistema. Podem haver triângulos similares em outros sistemas que não tenham ângulos iguais. – "Mas isso é apenas uma piada, desde que eles não são similares no mesmo sentido" – Claro que não; e uma proposição que não pode ser provada no sistema de Russell é "verdadeira" ou "falsa" em um sentido diferente de uma proposição do *Principia Mathematica.* (*RFM*, I, III, 7)

Wittgenstein afirma aqui que se a sentença é verdadeira, mas não provada no sistema, é verdadeira em outro sentido que não o sentido inicial de ser verdadeira no sistema. Nesta passagem, vemos que, para Wittgenstein, ou (1) a sentença verdadeira, mas não provada no sistema é uma proposição empírica, que seria verdadeira por correspondência a algo, e não em virtude das regras do sistema, e, nesta suposição, se estaria tratando a sentença de Gödel como uma proposição contingente, como se esta pudesse também ser verdadeira por correspondência a algo (por algum critério externo ao sistema) e não em virtude das regras do sistema; ou (2) a sentença é verdadeira porque é provável em outro sistema, mas, neste caso, não temos como manter que ela é verdadeira no sistema (pois ela seria verdadeira em outro sentido). Correto ou não, o raciocínio não supõe uma concepção semântica anti-realista, mas precisa apenas fazer a suposição mais fraca de que *não há verdade interna a um sistema sem critério de verdade interno a este mesmo sistema*. Aqui também é interessante notar que a suposição de que 'ser verdadeira no sistema' significa ser 'demonstrável no sistema ou ser um axioma deste' não é um pressuposto de Wittgenstein exatamente, mas um pressuposto do próprio sistema do *Principia Mathematica* (*PM).* As proposições verdadeiras no sistema do *PM* são, e isso é expressamente estabelecido por Russell, as proposições primitivas (assumidas sem prova), e aquelas derivadas pelas regras de inferência do sistema (demonstradas) (*Cf.:* Russell; Whitehead, *PM*, pp. 402-406). Este é, portanto, o sentido primário de verdade no sistema de Russell. O ponto de Wittgenstein parece ser, portanto, que a aparência paradoxal que a internalização do predicado ‘ser demonstrável’ (*Dem*) parece gerar, faz com que sigamos mudando nossos conceitos e separando a determinação da verdade do seu critério de determinação, na interpretação da sentença como *verdadeira ainda que indemonstrável*. Fazer esta interpretação é que seria já supor o platonismo do significado. Supõe-se que se, de fora, a sentença que afirma a *indemonstrabilidade* é, de fato, indemonstrável, então, dentro, a sentença aritmética é já verdadeira. Entretanto, se dizemos que a sentença é verdadeira no sistema, embora, demonstrada fora, o que é pressuposto por este raciocínio é que a demonstrabilidade pode ser relativa ao sistema, mas a verdade, não, o que seria, para Wittgenstein, supor uma verdade, e mesmo uma noção de sentido, sem critério de determinação, e, com isso, supor já de algum modo o platonismo. Sendo assim, para Wittgenstein, sem a ruptura da relação interna entre verdade e demonstrabilidade no contexto normativo, não se conseguiria estabelecer a leitura filosófica do resultado de Gödel, entretanto, esta ruptura já supõe o platonismo e, sendo assim, não seriam exatamente suas considerações que incorreriam em uma *petição princípio*.

Mas Wittgenstein vai além nas suas observações, ele parece estar questionando a legitimidade do sistema falar da sua própria demonstrabilidade (do critério de sua verdade), e este questionamento se relaciona com a analogia que Wittgenstein faz da sentença de Gödel com um paradoxo lógico semântico. A este ponto voltaremos adiante. Por enquanto, cumpre-nos notar apenas que por mais estranho que esse questionamento possa parecer atualmente, Wittgenstein não foi o único a tecer comparações nesse sentido. A internalização do predicado relativo à ‘demonstrabilidade’ como gerando uma forma de paradoxo por auto-referência foi questionado de modo muito mais contundente por Perelman (1936), como se sabe, e foi problematizada inclusive por Zermelo em sua correspondência com Gödel[2]. Se compararmos a diagonalização do predicado relativo à verdade no resultado de Tarski acerca da indefinibilidade da verdade, com a diagonalização do predicado relativo à demonstrabilidade na prova da incompletude de Gödel, vemos que as duas sentenças têm realmente a mesma estrutura:

[2] “...your proof of the existence of undecidable propositions exhibits an essential gap. In order to produce an ‘undecidable’ proposition, you define a class sign (a propositional function of one free variable) S = R (q), and then you show that neither [R (q); (q)] = A nor its negation ~A would be provable. But does S = ~Bew [R (n); n] really belong to your system?” (Zermelo, *In.:* Shanker, 1989 , p.233)

a) ~*Tr** (~Tr*) **é V** ⇔ ~Tr*(~Tr*) *não é V*

b) ~*Dem** (~Dem*) **é V** ⇔ ~Dem*(~Dem*) *não é demonstrável*

O predicado em negrito é "meta" em relação ao predicado em itálico, e a aparência paradoxal surge porque estamos tomando o que é de ordem superior como do mesmo nível do que é formulado no sistema. Entretanto, em relação à sentença de Gödel, não dizemos que a demonstrabilidade do sistema também deveria ser formulada fora do sistema, mas separamos a noção de verdade da noção de demonstração. Uma das questões de Wittgenstein pode ser formulada então da seguinte forma: por que não poderíamos manter a relação entre verdade e demonstrabilidade, e afirmar que a noção de demonstrabilidade não deveria ser definível no sistema? Voltaremos a esta questão adiante.

A analogia com os paradoxos por impredicatividade e a ômega-inconsistência

Para Wittgenstein, do mesmo modo que, transferindo a noção de correlação um-para-um para as classes infinitas, Cantor não provaria que os Reais são não-enumeráveis, mas mostraria apenas que esta ordenação nos é vedada no caso dos Reais – i.e., que existem menos analogias entre Reais e racionais do que se poderia pensar antes –, transferindo a formalização aritmética para a meta-linguagem, Gödel não provaria a existência de verdades matemática indemonstráveis, mas mostraria apenas que, com tal formalização, determinadas construções não podem ser provadas ou refutadas.

> Vamos supor que demonstrei a indemonstrabilidade (no sistema de Russell) de P; então por essa prova provei P. Agora se essa prova fosse uma prova no sistema de Russell – devo nesse caso ter provado de uma vez que ela pertence e não pertence ao sistema de Russell. – Isso é o que fazem semelhantes sentenças. (*RFM*, A, III, 11)

> Poderia ser dito: Gödel diz que se deve também ser capaz de confiar numa prova matemática quando se deseja concebê-la praticamente como a prova de que o padrão proposicional pode ser construído de acordo com as regras da prova? Ou: uma proposição matemática deve ser capaz de ser concebida como uma proposição de uma geometria que é realmente aplicável a si mesma. E, se se faz isso, isso implica que em certos casos não é possível contar com uma prova. (*RFM*, VII, 221)

Wittgenstein parece chegar então a sugerir que deveríamos simplesmente desistir de interpretar a sentença aritmética como denotando a sentença meta-matemática que a afirma 'indemonstrável'.

> 'Mas certamente P não pode ser provável, desde que, supondo-se que fosse provada, então a proposição de que ela não é provável seria provada.' Ma se ela [P] fosse provada agora, ou se eu acreditasse – talvez através de um erro – que a tivesse provado, por que não devo deixar a prova manter-se e dizer que devo suspender minha interpretação segundo a qual a sentença se afirma indemonstrável? (*RFM*, A, III, 10)

A analogia com os paradoxos por auto-referência é certamente o ponto mais criticado da leitura que Wittgenstein faz de Gödel. Tal analogia não é, por si mesma, de modo algum equivocada, ao contrário, ela é largamente reconhecida. É o próprio Gödel quem legitima esta associação na introdução da sua demonstração:

> A analogia deste resultado com o paradoxo de Richard é evidente; existe também uma relação íntima com o paradoxo do mentiroso [nota: qualquer antinomia epistemológica pode ser usada para uma demonstração análoga de não-demonstrablidade] uma vez que a proposição indecidível [R(q);q] afirma que q pertence a K. i.e., de acordo com (1) que [R(q);q] não é demonstrável. Assim temos diante de nós uma proposição que afirma sua própria indemonstrabilidade. (Gödel, 1931, p.251)

Mas o que justifica a afirmação de que Wittgenstein não teria mesmo entendido a prova de Gödel é a consideração de que ele não teria notado que a sentença de Gödel não engendra nenhum paradoxo por auto-referência, apesar de tudo, porque ela não contém uma circularidade viciosa. A auto-referência permitida pelo procedimento de aritmetização é uma auto-referência indireta. E sobre isso, afirma Shanker:

> Supõe-se que Wittgenstein não compreendeu o teorema de Gödel porque Gödel não teve grandes problemas para tornar os vários níveis de enunciados que a prova emprega perspícuos (Gödel não escreve as P-sentenças [sentenças aritméticas], mas se refere a elas pelos números de Gödel, que não são eles mesmo escritos, mas são denotados por complexas funções para seu cálculo, que são também usadas para denotar as M-sentenças [meta-matemáticas] às quais correspondem.) É esta crítica das observações de Wittgenstein que, talvez, demande um escrutínio maior. (Shanker, 1989, p. 222-223)

Como se sabe, o procedimento inicial de Gödel consiste em atribuir números de Gödel às fórmulas e provas do sistema, estabelecendo uma correspondência 1-1 entre expressões do cálculo e um subconjunto dos inteiros. A partir disso, enunciados meta-matemáticos sobre expressões em um cálculo objeto são ao mesmo tempo lidos como enunciados sobre as relações aritméticas mantidas entre os números de Gödel correspondentes. Mas, para Wittgenstein, o mero mapeamento das sentenças pela numeração de Gödel em nada legitimaria o suposto *espelhamento*[3] da meta-matemática na matemática, que seria já, do seu ponto de vista, uma reformulação das regras do cálculo. Tal suposto *espelhamento*, de acordo com Wittgenstein, é que faria a sentença G de Gödel mudar de regra, na medida em que assumiria que o conteúdo referencial da proposição de ordem superior poderia ser lido na proposição aritmética, o que permitiria a interpretação da sentença como dizendo algo de si mesma. O ponto consistiria em notar que o procedimento de correspondência proposto por Gödel seria apenas uma técnica de correlacionar números com expressões, mas que nada neste procedimento autorizaria a interpretação da sentença como dizendo algo de si mesma. Vejamos a seguinte afirmação de Gödel:

> Como é natural, para considerações matemáticas, não importa muito saber quais são os objetos que se tomam como símbolos primitivos e, para essa finalidade, usaremos os números naturais [nota: isto é, usaremos uma correspondência 1-1 entre os símbolos primitivos e os números naturais]. Assim, uma fórmula é uma sucessão finita de números naturais e a figura de uma demonstração é uma sucessão finita de sucessões finitas de números naturais. Deste modo, os conceitos metamatemáticos tornam-se conceitos sobre números naturais ou sucessões destes [*nota*] e por isso é pelos menos parcialmente exprimível no próprio simbolismo do sistema *PM*. (Gödel, 1931, p. 248-249)

Pela correspondência, os números seriam tomados como símbolos como quaisquer outros, mas isto em nada permitiria, para Wittgenstein, a conclusão de que conceitos meta-matemáticos se tornassem conceitos sobre números, e, portanto, se tornassem expressáveis no próprio sistema do *PM*.

É apenas na medida em que os enunciados meta-matemáticos sobre expressões são supostos espelhar, e, por isso, ao mesmo tempo lidos como enunciados sobre relações mantidas entre os números de Gödel, que estes

[3] Retiramos o termo ‘espelhamento’ não de Wittgenstein, mas de Shanker, que o utiliza para ressaltar esta mesma distinção. *Cf.*: Shanker, 1989, pp.216-222.

enunciados meta-matemáticos são tomados como podendo falar de si mesmos indiretamente, isto é, não através da sua própria referência direta, mas através das relações acima mencionadas.

Através do procedimento de Gödel, ao invés de nos referirmos diretamente à sentença, a descrevemos com uma função nome independentemente definida. Assim, a sentença poderia se referir a esta função independentemente definida enquanto fórmula, sem, com isso, supor a si mesma já completa. Dessa forma, a sentença de Gödel escaparia à circularidade viciosa presente em sentenças como: 'esta sentença é falsa' ou (1) 'a sentença (1) tem 10 palavras'. Nestes casos, se tentamos substituir o 'esta' ou o '(1)' por sua referência, ficamos com algo assim: (1) A sentença 'a sentença 'a sentença 'a sentença ... ∞ tem 10 palavras. O que significa dizer que a tentativa de auto-referência gera um regresso infinito.

> Se entendermos o 'esta' como reflexivo aqui, então se poderia escrever a proposição simplesmente como uma abreviação para: A proposição: esta proposição... não se deixa demonstrar, e aqui o 'esta' não seria usado de modo reflexivo. A proposição seria uma proposição matemática sobre sua própria forma. (...) Esta proposição.... não se deixa derivar: esta proposição... não se deixa derivar. (Wittgenstein, 2000, item 121 83v)

Estaríamos aqui tentando falar de uma sentença na qual um dos seus termos, para referir, supõe a sentença inteira completa, mas a sentença precisa do termo (referindo) para completar-se, e o termo precisa da sentença completa para referir. Entretanto, isso não ocorreria com a sentença G. E é isso o que afirma Gödel, quando objeta em nota que sua sentença G seja circular:

> Ao contrário do que pode parecer, esta proposição não é circular, porque, em primeiro lugar, afirma a indemonstrabilidade de uma fórmula especificamente definida (exatamente a de ordem q na ordenação lexicográfica, depois de uma certa substituição) e, além disso, só depois (e como se fosse por acaso) se verifica que esta fórmula é exatamente aquela cuja indemonstrabilidade se exprime. (Gödel, 1931, p.251)

Wittgenstein está bastante consciente, ao contrário do que se poderia pensar, do caráter indireto da auto-referência da sentença de Gödel, ele afirma: "A sentença de Gödel diz *de modo indireto* que não é demonstrável" (Wittgenstein, 2000, item 121 82v, grifo nosso). Não obstante, para ele, ainda assim, deveríamos perguntar o que legitima tomar a fórmula independentemente definida como espelhando a sentença que afirma a indemonstrabilidade. Ressaltar a não-circularidade da sentença de Gödel deveria significar dizer que tanto o sentido (1) da função-nome, quanto o sentido (2) da sentença G têm uma mesma referência (que permitiria ou justificaria o *espelhamento* de uma na outra), entretanto, o sentido da função-nome seria determinado independentemente do sentido da sentença G que, assim, poderia tomá-la como argumento enquanto fórmula, de tal modo que só depois, "como que por acaso", descobriríamos que o sentido 1 se refere à mesma proposição que o sentido 2. Entretanto, o que significa dizer que o sentido 1 e o sentido 2 (meta em relação a 1) tem uma mesma referência? Comentando este ponto, Rupert Read afirmou:

> Vamos por todos os meios permitir que a seta do 'esta' volte para si mesma passando através de vários estágios intermediários, e seguindo uma longa e desviante trajetória, antes de retornar para seu alvo. Mas por que isso deve nos convencer do que quer que seja? Por que deve fazer qualquer diferença para a lógica da situação se a seta que traçamos é longa ou curta? (Read, 2005, p.11)

O ponto de Read é: ou bem a sentença aritmética e a sentença metamatemática são a mesma ou são diversas. A sentença de Gödel precisa se referir à fórmula na medida em que esta se refere à sentença, ainda que seja indiretamente, de outro modo, deveríamos suspender a interpretação da sentença como se dizendo indemonstrável. Chegamos, com esta observação, à afirmação central para a leitura que Juliet Floyd e Hilary Putnam (2000) propõem das observações de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel: 'deveríamos suspender a interpretação da sentença como se dizendo indemonstrável'. No artigo *Uma nota sobre o notório parágrafo de Wittgenstein sobre o teorema de Gödel*, é apresentada uma arrojada interpretação da passagem I, III, 8, dos *RFM,* que citamos em seguida, de acordo com a qual ficaria garantido que Wittgenstein, apesar de tudo, teria entendido a prova de Gödel e, além disso, avançado uma observação de notório interesse filosófico sobre este.

> Imagino alguém pedindo o meu conselho; ele diz: "eu construi uma proposição (usarei 'p' para designá-la) no simbolismo de Russell, e por meio de certas definições e transformações, pode ser interpretada de tal modo que ela diga: 'P não é demonstrável no sistema de Russell'. Não devo dizer que esta proposição por um lado é verdadeira, e por outro é indemonstrável? Pois, admitindo que ela seja falsa, então é verdade que ela é indemonstrável. E isso não pode ser! E se ela for demonstrada, então isso mostra que ela não é demonstrável. Assim, ela só pode ser verdadeira, mas indemonstrável." Tal como perguntamos 'demonstrável em que sistema?', então também temos que perguntar 'verdadeiro em que sistema?'

> 'Verdadeiro no sistema de Russell' significa, como dissemos, demonstrado no sistema de Russell, e 'falso no sistema de Russell' significa que se demonstrou o contrário no sistema de Russell. – Agora, o que é que o seu 'suponha que é falsa' significa? No sentido de Russell, significa 'suponhamos que o contrário é demonstrado no sistema de Russell'; se essa é a sua suposição *você desistirá da interpretação segundo a qual ela é indemonstrável.* E por 'esta interpretação' eu entendo a tradução da proposição nesta proposição inglesa. – Se admitir que a proposição é demonstrável no sistema de Russell, isso significa que ela é verdadeira no sentido de Russell, e *terá novamente de desistir da interpretação 'P não é demonstrável'***.** Se admitir que a sentença é verdadeira no sentido de Russell, *a conseqüência é a mesma***.** Além disso: se é suposto que a proposição é falsa num outro sentido que não o de Russell, então não contradiz o fato de que ela seja demonstrada no sistema de Russell. (O que no xadrez significa 'perder', pode determinar a vitória num outro jogo.) (*RFM*, I, Ap III, 8, grifo meu)

De acordo com Floyd e Putnam, a passagem acima conteria uma afirmação filosófica de grande interesse. E a afirmação que os autores tomam como tendo tal interesse na passagem é: 'se se assume que ~p é provável no sistema de Russell deve-se (ou se irá presumivelmente) desistir da tradução de P pela sentença em inglês 'p não é provável'.' De acordo com Floyd e Putnam, tal afirmação deve ser explicada da seguinte forma: se se assume que não-G é provável no sistema de Russell, deve-se desistir da tradução de G pela sentença 'G não é provável', porque se não-G fosse provável no PM, o PM seria ômega-inconsistente, e se o PM fosse ômega-inconsistente, não daria conta da noção de número natural, e não poderíamos mesmo, portanto, traduzir G como 'G não é provável no PM' porque o predicado 'x é um número natural' em G não poderia ser interpretado como 'x é um número natural' – e seria isso o que Wittgenstein teria pretendido dizer.

Vejamos então o argumento completo e expliquemos em detalhe o que Floyd e Putnam estão atribuindo a Wittgenstein para avaliarmos em que medida é plausível que Wittgenstein tenha pensado isso. Primeiramente, o que significa o sistema ser ômega-inconsistente? Um sistema é entendido como ômega-inconsistente se existe uma fórmula a qual provamos todas as suas instâncias particulares, mas não provamos o universal. Ou, se existe uma fórmula que é demonstrável, mas não é demonstrável em nenhum estágio, isto é:

$\forall n \in N$, A fórmula F não é demonstrável no estágio n: {~Dem1(F); ~Dem2(F); Dem3(F);...}. Mas F é dem: {Dem(F); ~Dem1(F); ~Dem2(F); Dem3(F);...}

Ou, de modo mais geral:

$\vdash \exists x\, F(x)\ \&\ \forall n \in N \vdash \sim F(x)$

Sendo assim, teríamos que supor que podemos construir um modelo que ultrapassa os naturais, ou seja, que "o sistema não tem nenhum modelo no qual o predicado interpretado como 'x é um número natural' possua uma extensão isomórfica a dos números naturais".

A suposição de ômega-consistência, no resultado de Gödel, substitui a suposição mais forte da correção do sistema, interditando que a negação de G possa ser provada. Se G fosse provada, o sistema seria inconsistente. Se não-G fosse provada, o sistema seria ômega-inconsistente. É, portanto, supondo-se o sistema consistente e ômega-consistente que o resultado de Gödel se segue. Estas são suposições sintáticas, isto é, dizem respeito apenas à demonstrabilidade e à indemonstrabilidade, não falam em verdade ou falsidade. Uma maneira mais pesada, por assim dizer, de se garantir que G não poderia ser provada falsa no sistema seria supondo-se a correção do sistema, isto é, que o sistema não prova nada falso, sendo assim, se G fosse provada falsa, deveria ser provável no sistema (pois se afirma indemonstrável), contrariando a correção. Como quer que seja, a correção implica a ômega-consistência porque se tudo que provamos for verdadeiro no modelo, então não pode existir uma sentença F(x) provada no sistema, e para todo *n* pertencente aos naturais, provarmos no sistema ~F(n), afinal só provamos o que é verdadeiro no modelo. Adicionalmente, se tivermos provado não-G (isto é: que não é o caso que G é indemonstrável e, portanto, G seria demonstrável), isso não poderia ser o caso se o sistema fosse ômega-consistente e, portanto, o sistema seria ômega-inconsistente. Mas, por que exatamente? Porque se G é refutado, não é o caso que G é indemonstrável e, portanto, *a demonstração de G deveria ser demonstrável.* Isso se deve em grande medida ao caráter "paradoxal" da sentença, e até aqui certamente as passagens de Wittgenstein sobre o assunto realmente comprovam que ele foi. Mas, se o sistema é ômega consistente, e ~G é demonstrado, sendo portanto, G refutado, segue-se que a demonstração de G não poderia ser jamais demonstrada. Sendo assim, o sistema seria ômega-inconsistente.

De fato, isto (que, se provamos ~G, o sistema tem que ser ômega-inconsistente) se segue da própria diagonalização do predicado relativo à demonstrabilidade. Para ver isso, basta seguir os passos em detalhe:

1) Se tomarmos que a negação de uma sentença qualquer é refutável se e somente se a sentença é demonstrável:

~F(x) é ref. ↔ F(x) é dem.

2) E aplicarmos isto à diagonalização da demonstrabilidade, temos que:

~Dem*(x) é ref. ↔ Dem*(x) é demonstrável
Dem (x(x)) é demonstrável

3) Aplicando isso à sentença de Gödel, isto é, à sentença que afirma de si mesma que não é demonstrável, temos que:

~Dem*(~Dem*) é refutável ↔ Dem* (~Dem*) é demonstrável
Dem (~Dem*(~Dem*)) é demosntrável

G é refutável ↔ Dem G é demonstrável

4) Ora, mas se G é refutável, temos que

$\vdash$ ~G, o que significa que

$\nvdash$ G, mas 5) se cruzarmos isso agora com a suposição da ômega-consistência temos uma contradição, porque teríamos que :

∀n ∈ N, G não seria demonstrável no estágio n, e, portanto, $\nvdash$ Dem (G)

6) Das fórmulas acima retiramos uma contradição

$$\frac{(\text{Dem (G) é demonstrável}) \;\&\; (\nvdash \text{Dem (G)})}{\perp}$$

7) E, portanto, a suposição de ômega-consistência deve ser negada, sendo o sistema ômega-inconsistente.

A interpretação de G como se dizendo indemonstrável teria então que ser suspensa, no caso de a negação de G ser demonstrada, justamente porque a noção de número natural não poderia ser expressa no sistema, dada a sua ômega-inconsistência: “a ômega-inconsistência mostra que um sistema não tem nenhum modelo no qual o predicado interpretado como ‘x é um número natural’ possua uma extensão isomórfica a dos números naturais”. Isso se explica na medida em que a sentença G tem a forma: ~∃x Número natural (x) & Prova (x, t), onde t abrevia uma expressão numérica cujo valor resulta no número de Gödel de G ela mesma. Entretanto, afirmam Floyd e Putnam:

> (...) descobrindo que o PM é ômega-inconsistente, descobrimos que: 1. 'número natural não pode ser assim interpretado. Em todas as interpretações admissíveis do PM (todas as interpretações que se ajustem a ao menos um modelo do PM), existem entidades que não são números naturais (e, portanto, não são números de Gödel de provas); 2) aqueles predicados do PM (e.g. Prova (x,t)) cujas extensões são provavelmente infinitas e que acreditamos ser subconjuntos infinitos de N (o conjunto dos números naturais), não tem tais extensões em qualquer modelo. Ao contrário, eles têm extensões que invariavelmente também contém elementos que não são números naturais; 3) em resumo, a tradução de P como P é indemonstrável no PM é insustentável nesse caso – exatamente como Wittgenstein afirmou! Isso, como quer que seja, não afeta a correção da prova de Gödel, pois nada na prova diz respeito a tal interpretação em prosa ordinária." (Floyd; Putnam, 2000, p.625)

Esta leitura das observações de Wittgenstein, apesar de certamente elegante, não parece muito plausível porque é pouco provável que Wittgenstein tenha condensado todo este argumento naquelas duas linhas. Afinal, se este era o ponto mais importante de seus comentários sobre Gödel, ele deveria ter escrito mais sobre o assunto. A interpretação, ainda assim, parece corroborar-se por relatos de cunho biográficos, dentre os mais importantes a afirmação categórica de Goodstein, em 1957, de acordo com a qual Wittgenstein teria interpretado o teorema de Gödel imediatamente como tendo estabelecido a ômega-inconsistência do sistema formalizado em questão, bem como a sua conseqüente impossibilidade de captar o conceito de número natural; e a afirmação de Alister Watson, em seu artigo na *Mind* sobre a capacidade de sistemas recursivos aritméticos ômega-inconsistentes expressarem a noção de número natural, no qual ele afirma ter chegado a esta idéia conversando com Wittgenstein e com Turing (*Cf.*: Floyd; Putnam, 2000, p.626).

De fato, ainda que a questão da ômega-inconsistência tenha sido notada por Wittgenstein, isto não significa que ele a tomava como a questão de cunho filosófico mais importante a ser ressaltada no que se refere ao teorema, de outro modo, parece que ele mesmo teria desenvolvido em detalhes este ponto. O que é textual é que Wittgenstein certamente chega ao caráter paradoxal do passo (3) anteriormente exposto, e certamente o associa com os paradoxos por auto-referência. Parece também que isso é razão suficiente para ele propor a recusa à interpretação da sentença como se dizendo indemonstrável. Em todo caso, é razoável que Wittgenstein tenha chegado a relacionar isso com a ômega-inconsistência. Até porque, como notamos, que a ômega-inconsistência se segue de ~G é uma conseqüência da própria diagonalização do predicado, o que

Wittgenstein certamente leva em conta. Aliás, se Watson diz que chegou a esta idéia conversando com Wittgenstein, não temos mesmo razão para supor que ele mente. Obviamente isto ajuda a argumentar que Wittgenstein deve ter compreendido a prova de Gödel, se foi, afinal, capaz de pensar e formular algum raciocínio amplamente entendido como correto sobre esta.

Mas, tal como entendemos, a leitura defendida por Floyd é interessante, e expressa corretamente pelo um ponto central da posição de Wittgenstein, justamente na medida em que entendemos a ômega-incosistência do sistema, e a derivada impossibilidade do predicado ‘x é um número natural’ ser lido neste, como se originando da própria *diagonalização* da sentença G. Isto é: quando entendemos o resultado das análises anteriormente expressas como se derivando da exigência de que enunciados meta-matemáticos espelhem enunciados aritméticos. O ponto central seria, portanto, trivial, e isso explica porque Wittgenstein não escreveu mais sobre a questão da ômega-incosistência, como teria feito depois, supostamente influenciado pelas suas análises, Alister Watson. Sistemas que permitem a impredicatividade geram “falsas totalidades”, que são, como foi inicialmente mantido por Poincaré, justamente as totalidades impredicativas. A recorrência deste aspecto é também o foco de atenção de Wittgenstein em suas observações sobre a sentença G, e é também por isso que o predicado ‘x é um número natural’ teria uma extensão que não pode ser lida no sistema. São resultados como este que os paradoxos por impredicatividade têm gerado desde a aparição no programa logicista e isso é o que justifica a analogia que Wittgenstein faz da sentença de Gödel com o paradoxo. Permitir que a sentença através da função-nome diga algo sobre si mesma deve implicar tomar enunciados de ordem superior como sendo objetivados pelos mesmos referentes abstratos que enunciados de ordem inferior. Isso implica necessariamente tomar o domínio dos objetos abstratos como impredicativo, isto é, como “maior do que ele mesmo”. E nisso reside, para Wittgenstein, o interesse filosófico em questão. Por isso, em meio aos seus comentários sobre Gödel, Wittgenstein afirma misteriosamente: “A Filosofia deve à Teoria de Conjuntos uma enormidade, pois agora temos já uma experiência das armadilhas que a fraseologia pode apresentar (...).” (Wittgenstein, 2000, item 121 76v) A partir disso, ele conclui que devemos suspender a interpretação (em prosa) da sentença como dizendo algo de si, e também afirma que se tomamos a sentença como verdadeira no sentido de

Russell, no *PM*, a mesma conclusão se segue. Deixando isso claro, acreditamos ressaltar a coerência da leitura de Floyd e Putnam com as demais passagens de Wittgenstein sobre o tema.

O que a descrição da sentença, pela função nome, faz, para Wittgenstein, é conferir-lhe um sentido, e, nesse caso, teríamos dois sentidos, que deviam ser ambos relativos à mesma proposição, mas que não podemos, por isso mesmo, dizermos simplesmente que se tratam da mesma proposição. Do mesmo modo, então, que perguntamos em que sentido a sentença indecidível dentro do sistema é a mesma provada verdadeira fora, podemos perguntar agora em que sentido a sentença meta que afirma a indemonstrabilidade, e a sentença aritmética da qual a indemonstrabilidade é afirmada podem ser ditas proposições que espelham uma a outra. Como afirma Wittgenstein, parece que deveríamos ter duas proposições – 'P' e 'P é indemonstrável' –, e resta então justificar a asserção de que se tratam da mesma proposição.[4] Shanker comenta este ponto:

> A aparência ilusória da conclusão em prosa paradoxal de que uma proposição matemática pode inteligivelmente dizer de si mesma que é indemonstrável funda-se na premissa de que se pode distinguir entre U [enunciado aritmético] e Mi [enunciado meta-matemático] e tratá-las como proposições matemáticas autônomas mapeadas uma sobre a outra, e então argumentar adicionalmente que as estruturas de U e Mi são tais que espelham uma a outra. (Shanker, 1989, p.224)

É fudamentalmente esse *espelhamento* que o que é problematizado por Wittgenstein. Obviamente, dizendo isso, não estamos mantendo aqui que seja um problema em si mesmo, para o segundo Wittgenstein, a auto-referência da sentença de Gödel. O problema é o que se pretende com esta permissão. Wittgenstein, no período tardio de sua filosofia, não interdita a atribuição de qualquer sentido às proposições que envolvem alguma forma de impredicatividade (auto-referência). Ao contrário, ele afirmou: "Poderíamos introduzir um jogo de linguagem no qual proposições que dizem algo sobre si

[4] "O que significa dizer que 'P' e 'P é indemonstrável' são a mesma proposição? Significa que essas duas sentenças em inglês tem uma mesma expressão em tal e tal notação" (*RFM*, I, III, 9) Mas o fato de que elas têm uma mesma expressão em alguma notação, não as torna a mesma proposição, desde que "a expressão sozinha não significa nada", como notou Wittgenstein no *Tractatus* (3.332-3) "Suponhamos, pois, que a função F(fx) pudesse ser seu próprio argumento: haveria, nesse caso, uma proposição 'F(F(fx))', e nela a função externa F e a função interna F devem ter significados diferentes: pois a interna tem a forma Φ(fx), a externa, a forma Ψ(Φ(fx)). Ambas as funções têm em comum apenas a letra 'f', que sozinha, porém, não designa nada. (...)" (*TLP*, 3.333)

mesmas encontram aplicação" (Wittgenstein, 2000, item 121 79v). Mas é preciso, de um ponto de vista afim com o método *wittgensteiniano*, clarificar o que está envolvido nesta atribuição de sentido, e o que decorre da mesma, na medida em que, nestes casos, não é possível contar com nenhuma suposta referência, ou critério, existente independentemente determinando para o sentido da proposição. De um ponto de vista *wittgensteiniano*, como nossas explicações têm um fim em algum lugar, a própria determinação semântica envolve alguma ausência de critérios externos de determinação ulterior, e, nesse sentido, uma certa forma de *impredicatividade* é mesmo a característica geral do âmbito normativo da linguagem: "Se poderia dizer também que a proposição aritmética 3 + 2=5 afirma algo de si mesma. Ela poderia ser desmembrada em um grupo de 3 e um grupo de 2 signos?" (Wittgenstein, 2000, item 124 89). Nos lembrar disso é também uma importante função dos paradoxos por impredicatividade: "As várias formas quase piadistas do paradoxo lógico são de interesse apenas até lembrarem alguém do fato de que uma forma séria do paradoxo é indispensável para entendermos sua função."(*RFM*, VII, 30). O problema é se pretender aceitar o sentido de uma sentença auto-referente, sem maiores modificações em nossos conceitos, como se esta pudesse continuar a ter sua verdade determinada externamente, por uma referência independente, tal como uma proposição empírica. Do ponto da vista da Filosofia do segundo Wittgenstein, se pode atribuir um sentido às sentenças auto-referentes, do mesmo modo que as proposições normativas podem também possuir sentido, mas, para isso, é preciso que estas tenham um uso e se insiram em uma prática bem determinada, que lhes confira significabilidade e função, anulando a vacuidade de sentido da proposição:

> Muito embora "a classe dos leões não é um leão" pareça uma sentença sem sentido, a qual se pode apenas atribuir um sentido por delicadeza, eu ainda não quero tomá-la dessa forma, se apenas isso é tomado como certo (e não como no *Tractatus*). Assim minha concepção é diferente aqui. Isso significa que estou dizendo agora: existe um jogo de linguagem com esta sentença também. (*RFM*, VII, 36)

Assim, se é verdade que Wittgenstein não pretende expulsar a *impredicatividade* de nossa prática lingüística legítima, desde que a toma mesmo como inevitável e constitutiva do uso normativo da linguagem, é igualmente correto que ele mantém ainda como um problema de princípio conceitual a contradição inerente à *impredicatividade*, isto é, ele jamais abriu mão das análises que compartilha com Poincaré sobre o tema.

> Por que não deve ser dito que uma contradição como 'heterologica' ∈ heterologica ≡ ~(heterologica ∈ heterologica), mostra uma propriedade lógica do conceito heterológica'? 'dissílaba é heterologica', ou 'polissiliaba não é heterologica' são proposições empíricas. Pode ser importante em alguns contextos descobrir se adjetivos possuem as propriedades que representam. A palavra 'heterológica' seria neste caso usada em um jogo de linguagem. Mas agora, a proposição ' 'h' ∈ h' é suposta ser uma proposição empírica? Obviamente que não, nem devemos admiti-la como uma proposição em nosso jogo de linguagem mesmo se ainda não descobrimos a contradição. 'h' ∈ h' ≡ ~('h' ∈ h) pode ser chamada 'uma verdadeira contradição'. – mas essa contradição não é uma proposição com sentido! Concordo, mas as tautologias da lógica também não são. A contradição é verdadeira significa: ela é provada, derivada das regras para a palavra 'h'. Seu emprego é mostrar que 'h' é uma daquelas palavras que não produzem uma proposição quando inseridas em 'x ∈ h'. A contradição é verdadeira significa: ela é realmente uma contradição e então você não pode usar a palavras ' 'h' ' como um argumento em 'x ∈ h'. (*RFM*, VII, 28)

Mas a auto-referência é apenas aceitável se não se toma o sentido como determinado por referência independente. É, portanto, no mesmo sentido que Wittgenstein antevê a aceitação de uma contradição em um cálculo, desde que a esta seja atribuída um sentido, sem que o cálculo se torne, por isso, trivial, que Wittgenstein também poderia aceitar uma sentença auto-referente, mas ainda assim com sentido. Obviamente, isso apenas procede por conta de suas considerações semânticas, pelas quais nossas determinações conceituais são significativas não por correspondência ao que quer que seja, mas por inserção prática. Nesse sentido, as próprias contradições podem ser determinadas, não porque, claro, correspondem a alguma determinação real, extensional – alguma realidade contraditória –, mas justamente porque se inserem, no sentido acima, em alguma prática determinada

> (...) A contradição *russelliana* é inquietante não porque é uma contradição, mas porque todo o desenvolvimento que culmina nela é um desenvolvimento canceroso, ela parece crescer para fora do corpo normal sem objetivo e sem sentido. (...) Mas você não pode permitir que uma contradição se estabeleça! – Por que não? Nós algumas vezes usamos essa forma na nossa fala, claro, não freqüentemente – mas se poderia imaginar uma técnica de linguagem na qual as contradições fossem instrumentos regulares. Pode-se dizer, por exemplo, de um

> objeto em movimento que ele existe e não existe neste lugar; a mudança é muito bem expressa por meio da contradição. (*RFM*, VII,11)

É claro que se o critério que estamos utilizando para algo ter um sentido determinado não é a correspondência a alguma suposta realidade extensional, mas o cumprimento de uma determinada função em nossos jogos de linguagem, não há motivo nenhum, em princípio, para que uma contradição não possa ter sentido, afinal, ter ou não sentido não depende, assim, de algo pré-determinado, extensionalmente, e para todo sempre, mas é uma questão prática e contextual. Além disso, não precisaremos, neste caso, retirar desta atribuição de um sentido determinado às contradição, a existência de uma realidade ela mesma contraditória. E o equívoco comum é que fazemos isto, ou ainda, pensamos que podemos nos livrar da própria contradição por conta do sentido determinado que atribuímos a ela. Supomos que esta determinação deve corresponder a algo no mundo e, mais ainda, justamente por isso, esperamos poder resolver, a partir disso, a contradição. Para Wittgenstein, ao contrário, o problema relativo às contradições seria a paralisação que elas produzem em nós, que é o que a torna de fato, para Wittgenstein, algo que possa ser chamado 'contradição', enquanto aquilo que 'não determina um lance em nosso jogo de linguagem'.

> A contradição impede-me de chegar a agir no jogo de linguagem. (*Z*,685)
> A contradição deve olhar-se não como uma catástrofe, mas como uma parede indicando que nós não podemos continuar por ali. (*Z*, 687)
> Gostaria de perguntar, não "que temos de fazer para evitar uma contradição?" mas "que devemos fazer se chegarmos a uma contradição?" (*Z*, 688)

A posição que Wittgenstein quer negar é aquela segundo a qual a descoberta de uma contradição poderia nos levar ao abandono da matemática que foi feita, da técnica de cálculo produzida e usada. "If I can apply the calculus, I have applied it; there are to be no subsequent corrections. What I can do, I can do. I cannot undo the application by saying: strictly speaking that was not an application." *(WVC,* p.139*)* Para ele, dizer que a contradição só surge fora do cálculo, quando fazemos *metafísica* e buscamos fundamentos para a matemática significa dizer exatamente que a contradição, com seu poder de contradição, isto é, com seu poder paralisação, só surge neste contexto porque, de outro modo, sabemos sempre como proceder sem problemas.[5] O problema das contradições para Wittgenstein é apenas a não determinação de nada, isto é o que o autor expressa por afirmar que "não determinam um lance em um jogo de linguagem", não têm sentido. Quem diz algo e em seguida nega é como se fosse efetuar um lance em um jogo e depois mudasse de idéia, portanto, a contradição, nesse sentido, não pode significar nada, não tem significação. Tal característica pode ser entendida como equivalente à trivialidade, isto é, à regra segundo a qual de uma contradição qualquer coisa pode ser derivada, daí dizer-se que a contradição não determina nada porque "diz tudo", isto é, não exclui nada e, portanto, "não diz nada". Mas se podemos pensar que contradições sejam admitidas, e que nem por isso tudo mais se siga, ou seja, que a contradição não implique a trivialidade, desde que associamos as contradições a uma regra, a uma determinação, a uma técnica, que impeça que desta siga-se qualquer coisa, não há então nenhum problema com as próprias contradições (*LFM*, XXI, p.209). Por isso que alguns a associam Wittgenstein a uma certa forma de defesa da paraconsistência, ainda que não desenvolvida, desde que o autor, em várias passagens, não considera legítima a inferência da trivialidade a partir da contradição.[6] Se uma contradição é encontrada e isto não faz com que o sistema deixe de funcionar, isso significa que existem determinações, e, portanto, exclusões semânticas, que admitem contradições, e que nem tudo pode ser, portanto, inferido destas.

> If a contradictions were now actually found in arithmetic – that would only prove that an arithmetic with such a contraction in it could render very good service; and it will be better for us to modify our concept of the certainty required, than to say that it would really not yet have been a proper arithmetic. (*RFM*, VII, 36)

Mas isso apenas seria admitido se as contradições fossem "úteis", se "servissem para alguma coisa" (*LFM*, XXI, p.207-209), pois, neste caso, haveria uma regra, uma determinação associada a ela. É exatamente neste mesmo sentido que Wittgenstein não pretende excluir a auto-referência do nosso uso lingüístico. De todo modo, não é desta forma que se pretende que a sentença de Gödel funcione.

---

[5] "Enquanto posso jogar um jogo, posso jogá-lo, e tudo está bem. A verdade da questão é esta – nosso cálculo enquanto cálculo está todo certo. Não faz sentido falar de contradições. O que é chamado uma contradição vem à existência tão cedo damos um passo fora do cálculo e dizemos, na prosa diária, 'portanto esta propriedade é verdadeira de todos os números, mas o número 17 não tem esta propriedade'. No cálculo, uma contradição não pode se manifestar." (*WVC*, p.120)

[6] *Cf.: RFM*, IV, 57; *WVC*, pp.131-132.

E não é claro que possamos mesmo ter isso no suposto âmbito da meta-matemática:

> Aqui é necessário lembrar que as proposições da lógica são construídas como não tendo nenhuma aplicação como informação na prática. Então se poderia muito bem dizer que elas não são proposições de todo; e que a escrita delas encontra-se sob a necessidade de justificação. Agora se nós juntamos a estas proposições uma estrutura adicional como uma sentença, então estamos mais no escuro sobre que tipo de aplicação este sistema de combinações de signos é suposto ter; desde que o mero envolver uma sentença não é suficiente para fornecer a esta conexão de signos qualquer significado.(*RFM*, A, III, 20, p.123) Você não tem acima de tudo o menor uso para uma tal sentença. (Wittgenstein, 2000, item 121 81v)

Na aritmética formal, a permissão da auto-referência aparece apenas, portanto, como uma permissão de um lance indevido em um jogo de linguagem, tentando ser entendida ainda sob a manutenção parcial das regras que a interdita, e é só por isso, por esta manutenção parcial, que ainda acredita-se poder ter critérios externos para a determinação da verdade da sentença G.

Um problema para o programa de Hilbert

As próprias análises de Wittgenstein se coadunam com a idéia, atribuída ao resultado de Gödel, de que um sistema não possa ser usado para provar sua própria consistência, desde que seria preciso sair deste para isso. Particularmente, dado as críticas que Wittgenstein faz ao programa de Hilbert, parece que ele deveria ser simpático a esta leitura intuitiva da prova de Gödel.

Pode ser mostrado, entretanto, que o principal problema que Wittgenstein identifica na prova Gödel teria suas raízes já no programa de Hilbert, na aceitação da sua demanda de que a linguagem matemática fale e dê conta formalmente de seus próprios fundamentos, o que se relaciona diretamente com o já mencionado suposto espelhamento dos enunciados meta-matemáticos, acerca da demonstrabilidade em S, em enunciados aritméticos, que são eles mesmos parte de S. De acordo com Wittgenstein, Hilbert demanda justificação para além do que é possível obter. Lembremos aqui então a muito citada exasperação de Hilbert diante da aparente quebra de confiança que os paradoxos acarretariam para a matemática:

> A situação na qual nós presentemente nos encontramos com respeito aos paradoxos é ao final das contas intolerável. Apenas pense: na matemática, este modelo

> perfeito de confiança e verdade, as várias noções e inferências, como todos aprendemos, ensinamos e usamos, levam às absurdidades. E onde mais encontraríamos confiança e verdade, se mesmo o pensamento matemático falhasse? (Hilbert, 1925, p.375)

Mas é realmente possível que a matemática esteja toda em risco? Parece que queremos uma prova de consistência para fundamentar aquilo que já confiamos. E o problema de princípio envolvido nesta tarefa é que se a matemática provar sua própria consistência, isso não pode ser razão para confiarmos nela, pois apenas aceitamos a prova de consistência porque já a supomos, consistente, ou melhor, já confiamos cegamente na prova:

> Mas espere – não é claro que ninguém queira encontrar uma contradição? E então se eu mostrasse a alguém a possibilidade de uma contradição, ele faria tudo para torná-la impossível? (E se não fizesse isso, seria um 'cabeça de vento'.) Mas suponha que ele respondesse: "não posso imaginar uma contradição em meu cálculo. – Você me mostrou uma contradição em outro, mas não nesse. Nesse, não existe nenhuma, nem sequer posso ver a possibilidade de uma." "Se minha concepção do cálculo vier a se alterar; se seu aspecto mudar por causa de algum contexto que não posso ver agora – então falarei algo mais sobre isso." "Não vejo a possibilidade de uma contradição [em meu cálculo]. Não mais do que você – como parece – vê a possibilidade de existir uma em sua prova de consistência." (*RFM*, III, 88)

A confiabilidade na matemática deve ser fulcral, isso significa dizer que ela não está realmente em questão, mas é suposta para que a própria prova seja aceita, e, nesse sentido, a prova de consistência perde seu sentido, pois, em máximo grau, estaríamos provando algo que já supomos, e que, não pode, portanto, ser provado, mas precisa sempre ser tomado como necessário:

> Se tenho medo de que alguma coisa possa em algum momento ser interpretada como a construção de uma contradição, então nenhuma construção pode tirar este medo indefinido de mim. A cerca que coloco ao redor da contradição não é uma meta-cerca. Como uma prova pode tornar o cálculo certo em princípio? Como ele poderia ter falhado em ser um cálculo próprio a menos que essa prova tivesse sido encontrada? (*RFM*, III, 87)

A própria demanda pela prova de consistência aparece, assim, como desprovida de propósito, posto que já supõe que tomamos o cálculo no qual a prova é feita como certo, indubitável – isso mostra que nós mesmos não levamos a sério o suposto perigo das contradições como interditando nossa prática matemática, como devendo nos fazer jogá-la fora, mas, se já temos que confiar no cálculo para que a própria demanda da prova de consistência faça sentido, se já confiamos então no cálculo cegamente, por que precisamos da prova? A prova não poderia fornecer a confiança última que buscamos (uma que não seria cega, mas fundamentada), afinal, a prova de consistência é feita na própria matemática, e se a inconsistência é um risco, por que não afetaria a própria prova? Como poderíamos então confiar na própria prova de consistência? Se a matemática for inconsistente, ela mesma não será inválida?[7] Afinal, se supomos o sistema inconsistente, e a regra da trivialidade, qualquer sentença poderia ser provada, inclusive a que afirma a consistência do sistema. Dessa forma, vemos que, se o sistema for inconsistente, ele provará sua consistência, e, portanto, tal prova não pode ser razão suficiente para a consistência. De outro modo, estaríamos agindo como alguém que confia no mentiroso porque ele afirma que não mente. Ora, mas é evidente que, se ele mente, isso também é uma mentira, da mesma forma que, se a matemática fosse já inconsistente, sua consistência seria um teorema.

O problema que Wittgenstein vê na prova de Gödel estaria já primariamente em aceitar como legítima a demanda, por princípio, impossível, erguida pelo programa de Hilbert:

> Tudo que constitui a matemática hoje é rigorosamente formalizado, então esta se torna uma pilha de fórmulas... À matemática ordinária, então formalizada, é adicionada uma, em certo sentido, nova matemática, uma metamatemática. ... Nessa metamatemática trabalha-se com as provas da matemática ordinária, essas últimas, elas mesmas, formam o objeto de investigação. (Hilbert, *In:* Shanker, 1989, p 184)

Mas qual o problema geral aqui? A metamatemática teria que ser matemática ainda, e, portanto, não poderia fazer o que se propõe.

> If the contradictions in mathematics arise through an unclarity, I can never dispel this unclarity by a proof. The proof only proves what it proves. But it can't lift the fog. This of itself shows that there can be no such thing as a consistency proof (if we are thinking of the inconsistencies of the mathematics as being of the same sort as the inconsistencies of the set theory), that the proof can't begin to offer what we want of it. If I'm unclear about the nature of the mathematics, no proof can help me. And if I'm clear about the nature of mathematics the question of the consistency can't arise at all. (*PR*, Ap.II)

[7] De fato, este é também o cerne da crítica de Poincaré à fundamentação da matemática com provas de consistência, na medida em que o filósofo mantém que tal fundamentação incorreria em circularidade por precisar se referir a todas as provas do sistema e, ao mesmo tempo, empregar provas, não podendo, assim, justificar a indução matemática.

Isso é fundamental para entender o que Wittgenstein afirma sobre a interpretação filosófica da prova de Gödel: a prova não pode superar a névoa filosófica, "ela apenas prova o que ela prova", quer dizer, não garante nada sobre a natureza da matemática.

Na medida em que Hilbert espera que a matemática prove sua própria razoabilidade, parece perguntar pela "possibilidade absoluta", o que seria, para Wittgenstein, o mesmo problema por ele já enfrentado desde o *Tractatus* e cujo diagnóstico poderia ser fornecido, trata-se de um contra-senso:

> I cannot draw the limits of my world, but I can draw limits within my world. I cannot ask whether the proposition *p* belongs to the system *S*, but I can ask whether it belongs to the parts *s* of *S*. So that I can locate the problem of the trisection of an angle within the larger system, but can't ask, within the Euclidean system, whether it's soluble. In what *language* should I ask this? In the Euclidean? But neither can I ask in Euclidean language about the possibility of bisecting an angle within the Euclidean system. For in this language what would boil down to a question about absolute possibility, and such a question is always nonsense. (*PR*, XIII, 152)

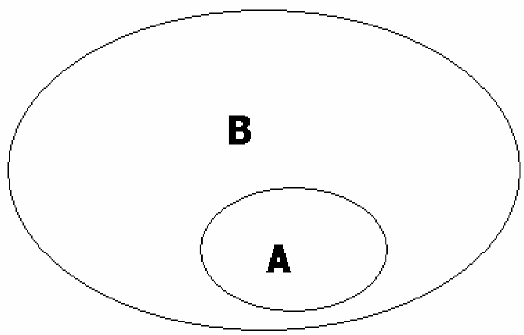
Entretanto, isso não significaria, para Wittgenstein, que, por outro lado, a consistência absoluta poderia ser provada satisfatoriamente em um meta-sistema, por assim dizer, desde que, por um lado, a questão obviamente retornaria para este suposto meta-sistema, e, ainda teríamos que justificar a relação entre sistema e meta-sistema.

> But there's nothing to be found here which we could call a hierarchy of types. In mathematics, we cannot talk of systems in general, but only *within* systems. They are just what we can't talk about. And so, too, what we can't search for. (…) Now suppose I have two systems: I can't enquire after one system encompassing them both, since not only am I unable now to search for this system, but even in the event of one turning up that encompasses two systems analogous to the original, I see that I could never have looked for it. (*PR*, XIII, 152)
>
> Thus, it isn't enough to say that *p* is provable, what we must say is: provable according to a particular system. Further, the proposition doesn't assert that *p* is provable in the system *S*, but in its own system, the system of *p*. That *p* belongs to the system *S* cannot be asserted, but must show itself. You can't say *p* belongs to the system S, you can't ask which system *p* belongs to; you can't search for the system of *p*. Understanding *p* means understanding its system. If *p* appears to go over from one system into another, then *p* has, in reality, changed its sense. (*PR*, XIII, 153)

E estas passagens são particularmente significativas para entender as observações de Wittgenstein que expomos anteriormente. Apenas sob este ponto de vista, entendendo as suas razões, podemos compreender a recusa a aceitar que uma mesma proposição possa ser indemonstrável em um sistema e demonstrável em outro.

É interessante observar que Russell mesmo associou a solução proposta pela hierarquia dos tipos, para a impossibilidade ressaltada no *Tractatus* da linguagem falar sobre seus próprios fundamentos com as conclusões gödelianas, segundo as quais seria sempre possível construir uma proposição indemonstrável no sistema e que, portanto, o sistema não poderia provar sua própria consistência. Embora Russell não comente diretamente o teorema de Gödel, em seu livro *My Philosophical Development* (1959), ele menciona rapidamente esta comparação, expressando a opinião segundo qual a hierarquia dos tipos seria suficiente para compreender também os desafios erguidos por Gödel (*Cf.:* Russell, 1959, p. 85). Antes de avaliar se a comparação erguida despretensiosamente por Russell procede e, se sim, até que ponto, podemos afirmar que ela nos ajuda a entender em que medida o próprio Wittgenstein pode ter partido desta comparação em suas observações ao teorema. Ora, se a teoria dos tipos não pode resolver, como vimos, o problema *de princípio* para a linguagem poder representar o fundamento da própria representação, mas apenas posterga o problema, gerando um regresso ao infinito e incorrendo ela mesma (a teoria) em *impredicatividade*, o que Wittgenstein já sabe desde o *Tractatus*, o que podemos dizer sobre a questão da consistência nos sistemas formais? Se Wittgenstein se colocou essa pergunta, ele associou diretamente, como Russell, a questão suscitada por Gödel à impossibilidade da meta-linguagem, presente no *Tractatus,* e jamais abandonada em sua obra. Com essa abordagem como pano de fundo, torna-se mais fácil compreender, portanto, seus comentários a Gödel.

De fato, Hilbert procurou diferenciar dois usos da indução matemática, um uso conceitual e outro formal (*Cf.*: Hilbert, 1927, p. 471-472). Não precisaríamos, assim, garantir pelo método indutivo a própria indução matemática. Tal possibilidade se funda na distinção geral de Hilbert entre proposições algébricas – ideais – e proposições conteudísticas – reais – da matemática. As proposições conteudísticas seriam formalizadas produzindo proposições ideais, meta-matemáticas, que poderiam ser aplicadas em domínios inesperados. Mas a consistência das proposições conteudísticas é suposta estar garantida intuitivamente, e, com base nestas, poderíamos fundar, então, a consistência da matemática em geral, reduzindo as verdades da aritmética superior ao que é providenciado pela intuição. Sendo assim, a matemática é dividida, por Hilbert, em (A) uma parte real, intuitiva, e (B) uma parte ideal, formal e sem conteúdo. A parte intuitiva seria um sub-conjunto da parte formal, mas a consistência da parte real é tomada como garantida e é a partir desta que a parte B seria formalizada, para que, assim, em B, fosse provada a consistência de A + B.



A) REAL/INTUITIVA:
A TEM A CONSISTÊNCIA GARANTIDA. A PARTIR DE A FORMALIZA-SE B.

B) IDEAL/FORMAL:
SEM CONTEÚDO

EM B PROVA-SE A CONSISTÊNCIA DE A + B

Esta é uma distinção que Wittgenstein não aceita *(Cf., e.g.*, *PR*, XIII, 150). A parte ideal precisaria obedecer, de acordo com Wittgenstein, aos mesmos princípios do que o que é real para que a fundamentação funcionasse – o que significa também dizer que o formal já deveria estar dado com o conteudístico. Estaríamos, portanto, supondo A como certa, e – na medida em que B obedece aos mesmos princípios que A – também estaríamos, para provar a correção de A + B, supondo B como certa. Ora, se os princípios de B são os mesmos de A, quando provamos A + B, em B, estamos garantindo estes princípios por eles mesmos (ou melhor, não os estamos garantindo). O que ocorreria, de acordo com Wittgenstein, seria, primeiro, uma separação entre o âmbito real e o âmbito ideal, e, depois, a junção destes novamente, para que um pudesse garantir o outro. Mas, ou bem eles se separam, e não conseguem mais fundamentar um ao outro, ou já estão sempre juntos, e a fundamentação é impossível. Hilbert supõe que as proposições formais seriam desprovidas de sentido, de conteúdo, mas, se é assim, como elas se relacionam como as supostas proposições conteudísticas? Parece mais razoável pensar que já estão sempre relacionadas, mas isso significa exatamente manter que não há qualquer fundamentação possível:

> A meta-matemática de Hilbert deve ser mostrada ser matemática disfarçada. (*WVC*, p.136)
> O que Hilbert faz é matemática e não meta-matemática. É outro cálculo, exatamente como qualquer outro. (*WVC,* p.121)
>
> I can play with the chessmen according to certain rules. But I can also invent a game in which I play with the rules themselves. The pieces of my game are now the rules of chess, and the rules of the game are, say, the laws of logic. *In that case I have yet another game and not a metagame*. (*PR*, Ap. II)

Basicamente, o ponto de Wittgenstein é: qualquer suposto meta-cálculo é, no final das contas, apenas cálculo e, por isso mesmo, não pode fundamentar o calculo em geral.

> What is a proof of provability? It's different from the proof of proposition? And is a proof of provability perhaps the proof that a proposition makes sense? But then, such a proof would have to rest on entirely different principles from those on which the proof of the proposition rests. There cannot be an hierarchy of proofs! On the other hand there can't in any fundamental sense be such a thing as meta-mathematics. Everything must be of one type (or, what comes to the same thing, not of a type.) (*PR*, XIII, 153)

Então, o que dizer da prova de Gödel? Gödel teria cometido o mesmo engano de Hilbert na medida em que teria aceito a sua demanda como tendo sentido, acreditando poder provar matematicamente sua impossibilidade. Mas, embora a demanda seja impossível e sem sentido, a prova de sua impossibilidade, nesse caso, também o é – o problema estaria, para Wittgenstein, como sempre, já em aceitar a questão. Segundo Wittgenstein, Gödel responde Hilbert aceitando que a matemática poderia ser metamatemática. Por isso ele afirma que a sentença de Gödel tem a pretensão de ser uma sentença matemática sobre sua própria forma (*Cf.*: Wittgenstein, 2000, item 121 83v) Com isso, Gödel estaria também acreditando provar uma verdade filosófica.

> (...) o desenvolvimento da matemática, no sentido de uma maior exatidão, conduziu à formalização de vastos domínios desta ciência, de modo a que as demonstrações possam ser efetuadas de acordo com algumas regras mecânicas. (...) Como é natural, para considerações matemáticas, não importa muito saber quais são os objetos que se tomam como símbolos primitivos e, para essa finalidade, usaremos os números naturais [nota: isto é, usaremos uma correspondência 1-1 entre os símbolos primitivos e os números naturais]. Assim, uma fórmula é uma sucessão finita de números naturais e a figura de uma demonstração é uma sucessão finita de sucessões finitas de números naturais. *Deste modo, os conceitos meta-matemáticos tornam-se conceitos sobre números naturais ou sucessões destes* [nota: por outras palavras: o processo descrito acima fornece uma linguagem isomórfica do sistema

> PM no domínio da aritmética e pode-se perfeitamente efetuar todas os raciocínio meta-matematicamente nesta imagem isomórfica. Isto ocorre no esquema da demonstração que vai se seguir, onde por ‘fórmula’, ‘proposição’, ‘variável’, etc., se entenderá sempre os objetos correspondes da imagem isomórfica.] *e por isso é pelos menos parcialmente exprimível no próprio simbolismo do sistema PM.* (Gödel, 1931, p. 247-249, grifo nosso)

Tentar fundamentar a matemática matematicamente se ligaria diretamente com a suposição de que um problema filosófico poderia ser resolvido com uma prova. Mas a matemática, tanto quanto, como Wittgenstein sempre ressaltou, a própria linguagem, não poderia estabelecer seus próprios fundamentos. A matemática não poderia ser metamatemática, e, fundamentalmente, a matemática não poderia ser Filosofia. Aqui é importante ressaltar, no entanto, a distinção entre o mero procedimento de *gödelização*, enquanto um mapeamento das sentenças meta-matemáticas pela numeração de Gödel, do suposto *espelhamento* da meta-matemática na matemática, que seria uma reformulação, em *prosa,* das regras do cálculo. Tal suposto *espelhamento* é que faria a sentença G de Gödel mudar de regra, na medida em que assumiria que o conteúdo referencial da proposição de ordem superior poderia ser lido na proposição aritmética. Apenas o *espelhamento* permitiria a interpretação da sentença como dizendo algo de si mesma, isto é, apenas o espelhamento permitira a auto-referência, o mero mapeamento seria apenas um procedimento de correlação que não se comprometeria com o colapso entre linguagem e meta-linguagem. Desta forma, o procedimento de correspondência proposto por Gödel estaria bem, na medida em que seria apenas uma técnica de correlacionar números com expressões, mas que nada neste procedimento autorizaria a interpretação *em prosa* da sentença como dizendo algo de si, o que seria, de acordo com Wittgenstein, uma mudança indevida nas suas regras gramaticais: "‘A sentença diz que este número não é alcançável destes números’ – Mas você também está certo que a traduziu corretamente *em alemão*?" (Wittgenstein, 2000, item 124 89) De fato, esta distinção aparece claramente no próprio artigo de Gödel, desde que a correspondência é meramente sintática, os números naturais são símbolos como quaisquer outros, mas isto em nada permite a conclusão de que conceitos meta-matemáticos se tornem conceitos sobre números, e, portanto, se tornem expressáveis no próprio sistema do *PM*, podendo este, assim, falar de si mesmo. Não haveria, de fato, nenhum problema em fazer a correlação, a confusão estaria em a partir disso interpretar a sentença como uma proposição falando de si mesma.

Aceitar que uma sentença afirme sua própria indemonstrabilidade é já aceitar que a matemática possa falar de seus próprios fundamentos. Manter que a sentença que afirma a demonstrabilidade e aquela sobre a qual a demonstrabilidade é afirmada são a mesma subscreve a confusão conceitual que legitima a um sistema matemático provar sua própria consistência.

Conclusão

Wittgenstein sempre procurou ressaltar que, em nossos estabelecimentos de ordenações inteligíveis da realidade, usamos sempre a linguagem (verbal e matemática) para formular teorias, e, portanto, não podemos explicar como nossas teorias são capazes de explicar o que consideramos como a realidade, sem gerar paradoxos. Poderíamos recorrer a outra teoria, mas isso geraria uma série infinita – quer dizer, podemos elaborar teorias sobre o mundo e estas teorias poderiam ser testadas serem verdadeiras ou falsas, mas não poderíamos elaborar teorias sobre o que nos permite elaborar teorias porque não poderíamos testar ser verdadeiro ou falso o que nos permite testar o que quer que seja.

> Não é a prova de Gödel que me interessa, mas a possibilidade que Gödel nos faz consciente através da sua discussão. A prova de Gödel desenvolve uma dificuldade que deve aparecer em um modo muito mais elementar. E nisso está, me parece, o grande serviço de Gödel à filosofia da matemática, e, ao mesmo tempo, a razão porque não é a sua prova particular que nos interessa. (Wittgenstein, 2000 item 163 37v)

Sendo assim, que um sistema matemático não possa fundamentar a si mesmo, Gödel e Wittgenstein terminam em acordo.

> Pode-se perguntar: o que há de profundo nisso? (como: o que é a beleza?) como se nós devêssemos justificar a profundidade apenas através de alguma outra coisa. Isto é profundo. (Wittgenstein, 2000, item 121 77v)

> The problems arising through a misinterpretation of our forms of language have the character of *depth.* They are deep disquietudes; their roots are as deep in us as the forms of our language and their significance is as great as the importance of our language. (*PI*, 111)

Entretanto, o que extrair disso? Wittgenstein continua: “Os limites do empirismo não são suposições não-garantidas, ou intuitivamente sabidas corretas: são os modos nos quais fazemos comparações e nos quais agimos” (*RFM*, VII, 21).

> Mas a fundamentação, a justificação da evidência tem um fim - mas o fim não é um fato, certas proposições que se apresentam como sendo verdadeiras, isto é, não se trata de uma espécie de ver da nossa parte; é o nosso atuar que está no fundo do nosso jogo de linguagem. (*OC*, 204)
> Como se fornecer razões não chegasse ao fim. Mas o fim não é um pressuposto não fundamentado: é uma via de ação não fundamentada. (*OC*, 110)

Como vimos, na medida em que aceitamos a demanda de Hilbert – fundamentar matematicamente a matemática –, está posto que devemos nos deparar, mais cedo ou mais tarde, com uma sentença degenerada como a de Gödel. Nesse sentido, acreditar que a sentença de Gödel prova o platonismo matemático seria a confusão maior. Como já citamos:

> Poderia ser dito: Gödel diz que se deve também ser capaz de confiar numa prova matemática quando se deseja concebê-la praticamente como a prova de que o padrão proposicional pode ser construído de acordo com as regras da prova? Ou: uma proposição matemática deve ser capaz de ser concebida como uma proposição de uma geometria que é realmente aplicável a si mesma. E, se se faz isso, isso implica que em certos casos não é possível contar com uma prova. (*RFM*, VII, 21)

Com base nesta confusão maior, a prova particular de Gödel é suposta demonstrar a existência de verdades indemonstráveis, ou seja, é suposta legitimar a existência de um ponto de avaliação último, uma abstração definitiva, uma super-realidade análoga à realidade empírica, e isso é o que, para Wittgenstein, engendraria os problemas filosóficos em geral. Quando Wittgenstein comenta Gödel é dessa confusão primordial que ele está falando, por isso só é possível entender seus comentários tendo em vista este problema, por isso também não é exatamente a prova de Gödel que Wittgenstein comenta. Wittgenstein está fazendo Filosofia, e, portanto, ele tem como objeto questões de ordem conceitual.