

CAPÍTULO III

DA FORMA À NORMA: A VERDADE NÃO PODE COLPSAR COM A SEMÂNTICA

3.1. Introdução

O presente capítulo engendra pretensões mais complicadas do que os precedentes. Mesmo que nossas análises anteriores não tenham sido suficientemente convincentes, é mais ou menos aceita a importância dos paradoxos por impredicatividade para as teses avançadas no *Tractatus* de Wittgenstein e, se não fomos exaustivos na demonstração da centralidade da noção em questão para as principais posições sustentadas na obra, certamente indicamos um caminho viável a ser percorrido neste sentido. Além disso, existem mesmo alguns trabalhos (já citados) aos quais podemos remeter os passos que estejam faltando nas análises anteriores, bem como indicar como complementação ao que conseguimos até aqui desenvolver. Não obstante, quanto ao chamado segundo Wittgenstein, ao período intermediário e mais tardio de sua Filosofia, é certamente mais difícil estabelecer a importância e a contínua centralidade do tema. Entretanto, nosso ponto pode ser simplificado da seguinte forma: existem certamente determinadas conclusões as quais Wittgenstein jamais abandonou. Uma delas, a partir da qual a herança temática em sua obra se faz contínua é a distinção forte entre um âmbito necessário e um âmbito contingente da linguagem. Sendo assim, na medida em que tal distinção forte pode ser mostrada derivar-se da característica *impredicativa* identificada e mantida por Wittgenstein no que diz respeito ao primeiro âmbito, a herança temática pode também ser centralizada na noção que abordamos. De maneira nenhuma, entretanto, isso significa desconsiderar a inelutável ruptura operada no pensamento de Wittgenstein, mas, antes disso, tentar compreender a ruptura a partir da continuidade, ao invés de fazer o contrário. De fato, o caminho que viemos traçando procurou mostrar como a *impredicatividade* foi vista, pelo Wittgenstein do *Tractatus*, como não podendo ser interdita externamente, mas devendo ser, de alguma maneira, interdita por dentro: não precisaríamos de uma teoria dos tipos para proibir funções impredicativas porque estas seriam impossíveis, e tentar proibir o impossível é tratá-lo como possível,

incorrendo já em contradição. A contradição diz respeito, portanto, fundamentalmente a se tentar dizer o que só pode ser mostrado. De qualquer modo, o caminho que começaremos a percorrer agora é o caminho pelo qual a impredicatividade deixa de ser interdita de todo, seja por fora seja por dentro, pois, se no âmbito empírico da linguagem, ela é anomalia, no âmbito normativo, ela é o padrão, e, nem por isso, se torna sem sentido. Todo problema consiste, assim, ainda e mais fortemente, em confundir o empírico com o normativo, e toda contradição aparece apenas quando se espera ou se exige que o *impredicativo*, por assim dizer, funcione predicativamente.

O objetivo inicial deste capítulo é investigar em que sentido pode ser dito que a mudança na concepção de linguagem de Wittgenstein relaciona-se com a questão da impredicatividade do âmbito normativo, muito embora a relação entre a necessidade e a impredicatividade fosse, como vimos, um ponto central para o primeiro Wittgenstein. Esta centralidade não será abandonada, ao contrário, as conclusões que desta se seguem serão radicalizadas. Nosso direcionamento especulativo nesse sentido é mostrar como o caráter impredicativo do âmbito necessário se relaciona com a recusa ao próprio atomismo *tractatiano*, desde que os objetos simples na base da ontologia do *Tractatus*, apesar de internamente determinados, são tomados como independentes, por analogia ao âmbito empírico, extensional, da linguagem. Na medida em que a suposição de um *Espaço Lógico* de necessárias possibilidades determinadas por objetos simples demonstra-se por princípio insuficiente para dar conta das necessidades requeridas pelo funcionamento da linguagem, a crítica à confusão do âmbito empírico com o âmbito normativo da linguagem torna-se também claramente uma crítica ao tratamento deste último como determinado por qualquer tipo de objeto. A linguagem não é, a partir de então, mais considerada como se reduzindo essencialmente à representação da realidade, mas, de qualquer modo, funciona com base em regularidades, enquanto generalizações que não se reduzem ao que de fato ocorre e ao que temos acesso, mas que parecem ter potencialmente infinitas aplicações (*PI*, 188, 196). O desafio é, portanto, entender o que significa esta generalidade e o que queremos dizer quando falamos em potencialidade infinita aqui.

Nosso foco de interesse se voltará então para a *Filosofia da Matemática* do segundo Wittgenstein, pois acreditamos que a centralidade e a continuidade do caráter *impredicativo* do âmbito necessário da linguagem possa ser usado para entender esta parte de sua obra, particularmente os infundáveis problemas relativos ao seu suposto construtivismo radical e a sua noção de ‘prova’. Além disso, e inversamente,

consideramos que esta parte de sua obra é particularmente importante para identificarmos a continuidade em questão e, nesse sentido, estamos de acordo com Stenlund quando este afirma:

É claro que o trabalho de Wittgenstein em filosofia da matemática forma uma linha de desenvolvimento quase ininterrupta em seu trabalho filosófico do início até o fim. Além disso, estou inclinado a dizer que existe mais continuidade em sua filosofia da matemática que em qualquer outra área de sua filosofia. (Stenlund, 2008, p. 03)

A noção central com a qual trabalhamos é agora a noção de ‘norma’. Quase tudo que se dizia da ‘Forma’ no *TLP* pode agora ser atribuído à noção de ‘norma’. Da mesma maneira que a Forma no *TLP* não tinha uma possibilidade anteriormente determinada porque determinava as possibilidades que poderiam ser e poderiam não ser o caso, não podendo haver uma possibilidade anterior sob pena de regresso ao infinito; agora também a norma não pode ser tomada como tendo uma determinação ‘em princípio’ anterior. A principal diferença não desprezível é que isso não significa mais, para Wittgenstein, que ela não possa ser dita, mas precise ser mostrada. A norma não é justificada por nada, mas também não está dada independentemente enquanto justificação última, não só não é representada como também não é exibida, mas isso não significa que não tenha sentido, afinal o sentido deixa de ser pensado como determinações de possibilidades de verdade e falsidade. Entretanto, agora o caráter normativo passa certamente a significar que uma regra não pode coerentemente ser dita ‘verdadeira’. O que sobra do princípio que engendrava a bipolaridade *tractatiana* – que o sentido não possa depender da verdade – torna-se uma requisição relativa à verdade: a verdade não pode colapsar com o sentido. As explicações continuam tendo fim em algum lugar, mas nenhuma escada resta para ser jogada fora. Este fim, portanto, não só não pode mais ser justificado pela linguagem com sentido, mas parece mesmo tornar-se completamente arbitrário. A conclusão central segundo a qual existe necessariamente um âmbito onde a verdade e o sentido colapsam permanece ocupando um lugar fundamental em relação às demais posições mantidas, mas se no *TLP* isso significava que, neste âmbito, não havia sentido algum, sendo o sentido entendido como determinação de condições independentes de verdade e falsidade, agora isto significará que neste âmbito não há verdade alguma, sendo a verdade entendida agora como necessariamente independente. Em suma, é como se Wittgenstein tivesse todo o tempo se deparado com estas estranhas sentenças, cuja verdade é dada com a compreensão, e o

problema envolvido nos paradoxo surgisse não da permissão destas sentenças, desde que elas seriam em grande medida inevitáveis, mas, no primeiro período, da atribuição de um sentido independente a estas e, no período tardio, da atribuição de uma verdade igualmente independente às mesmas.

Seguiremos o seguinte roteiro: abordaremos brevemente a ruptura operada no período intermediário do pensamento de Wittgenstein com a análise extensional da linguagem, passando pelo chamado ‘problema das cores’, o abandono do atomismo e analisando as consequências deste abandono na crítica à concepção essencialmente denotativa da linguagem que marca o pensamento do segundo Wittgenstein. Nosso objetivo é deixar clara a relação desta crítica com o caráter *impredicativo* do âmbito normativo e o abandono do realismo. Em seguida, nos voltaremos para a filosofia da matemática de Wittgenstein e para os tradicionais problemas que se colocam para o seu tratamento das demonstrações matemáticas. Serão abordadas as recusas tanto à concepção realista quanto à concepção intuicionista contemporânea, por Wittgenstein, e será considerada a sua negação à distinção entre *possibilidade em princípio* e *possibilidade factual* no âmbito normativo, investigando-se o que está implicado nesta negação. Isso deverá deixar claro que papel cumpre o colapso entre verdade e semântica no âmbito matemático para estas posições. Analisaremos então o ganho envolvido na abordagem de Wittgenstein das demonstrações matemáticas por figuras e avaliaremos o que pode ser clarificado sobre os mencionados problemas, e uma abordagem *dissolutiva* destes, tendo em vista o tratamento de Wittgenstein do ‘infinito matemático’. Em relação a este último ponto, algumas importantes conclusões sobre o método de Wittgenstein serão delineadas. Finalmente, pretendemos explicar o caráter *impredicativo* da indução matemática lendo as observações de Wittgenstein sob o pano de fundo da abordagem de Poincaré sobre o assunto.

3.2. A determinação *impredicativa* das regras na ruptura com a análise extensional da semântica

A ruptura central operada no chamado ‘período intermediário’ da Filosofia de Wittgenstein é uma recusa à determinação completa do sentido, que é, por sua vez, o abandono do atomismo *tractatiano*, isto é, da suposição de átomos extensionais determinados na base da linguagem. Sendo isso, na base da relação entre linguagem e

mundo, não encontramos mais algum tipo de nomeação, ou seja, o sentido deixa de ser basicamente nomeação e, a partir disso, representação. Vejamos rapidamente os aspectos dessa ruptura importantes para nossas análises.

No *Tractatus*, os objetos simples eram uma condição necessária da representação, sendo supostos pelo funcionamento da lógica de nossa linguagem, afinal, para que qualquer representação fosse possível, seria preciso haver um conjunto determinado de possibilidades combinatórias para os objetos. Apesar de não-predicáveis por definição, tais objetos possuiriam propriedades internas: suas possibilidades combinatórias com outros objetos (*TLP*, 2.012; 2.013-2.0131; 2.0141). Como já notamos no capítulo anterior, os nomes simples seriam sucedâneos de objetos simples. As proposições constituídas pelos nomes simples seriam logicamente independentes entre si. Não existiriam conexões necessárias entre proposições atômicas, elas não se excluíam, nem se condicionariam (*TLP*, 3.322; 5.152), seriam individualmente comparadas com a realidade (*TLP*, 2.222-2.2225; 4.4) e uma não poderia jamais implicar a verdade ou falsidade da outra (*TLP*, 4.211; 5.134-5.136). A verdade das proposições elementares seria condicionada somente pela existência ou não-existência de estados de coisas atômicos (*TLP*, 2.061, 2.062), posto que estas expressariam uma ‘possibilidade de verdade primitiva’ (*TLP*, 4.463).

De acordo com o que vimos no capítulo anterior, as proposições elementares não podem ser nem tautológicas nem contraditórias, já que estas são determinações simples da realidade. O produto de duas proposições elementares também não pode ser nem tautológico nem contraditório, desde que estas são independentes. As tautologias e contradições são casos limites de combinações de proposições bipolares, que podem ser verdadeiras e podem ser falsas, nas quais a informação é anulada (*TLP*, 4.46-4.466). Apenas as tautologias podem ser verdadeiras *a priori* e apenas as contradições podem ser falsas *a priori* porque, nestas, isso se deve unicamente aos signos envolvidos. Entretanto, na passagem 6.3751 do *TLP*, encontramos a seguinte afirmação:

Que, p.ex, duas cores estejam ao mesmo tempo num lugar do campo visual é impossível e, na verdade, logicamente impossível, pois a estrutura lógica das cores o exclui. Pensemos na maneira como essa contradição se apresenta na física; mais ou menos assim: uma partícula não pode ter, ao mesmo tempo, duas velocidades; isso quer dizer que não pode estar, ao mesmo tempo, em dois lugares; isso quer dizer que partículas que estejam em lugares diferentes a um só tempo não podem ser idênticas. (É claro que o produto lógico de duas proposições elementares não pode ser nem uma tautologia nem uma contradição. O enunciado de que um ponto do campo visual tem ao mesmo tempo duas cores diferentes é uma contradição)

Nessa passagem, a atribuição de cores diferentes ao mesmo ponto no campo visual é considerada inconsistente, o que significa dizer que a atribuição de apenas uma cor ao mesmo ponto no campo visual é necessária. A passagem sugere que uma afirmação que atribui duas cores ao mesmo ponto no campo visual deve ter a forma de uma contradição. Mas isso é contra-intuitivo porque a incompatibilidade entre as cores parece ser um fato da natureza e não um fenômeno derivado de leis lógicas. Quando dizemos ‘P é ao mesmo tempo completamente azul e completamente verde’, não há nada na forma dessa proposição que indique que ela é contraditória. Dificilmente, a falsidade de tal afirmação poderia ser atribuída ao signo sozinho.

Wittgenstein precisa especificar como a atribuição de cores diferentes ao mesmo ponto no campo visual é uma contradição. Para tanto, parece preciso considerar as diferentes cores não como simples, mas como complexos incompatíveis. O problema funda-se no fato de que nunca chegamos pela análise das proposições acerca das cores em proposições elementares independentes. Estas seriam exemplos de proposições onde o simples independente não apenas não pode ser identificado, mas não pode, por princípio, ser suposto. Como enunciados que se excluem mutuamente podem ser analisados de modo a gerar proposições logicamente independentes? O *TLP* precisa supor tons de cores indecomponíveis, i.e., tons simples. Entretanto, os enunciados acerca das cores envolvem gradações e cada grau não pode ser comparado individualmente com a realidade já que ‘P é azul’ implica que ‘P não é verde, não é amarelo, não é vermelho,...’ Os enunciados graduais são comparados com a realidade todos de uma vez. Os graus não podem ser simples porque não são independentes, as cores não podem ser analisadas em tons que não se excluam necessariamente. Diante disso, toda a teoria *tractatiana* pareceria ruir. As proposições acerca das cores não podem ser tautológicas e isso parece apontar para uma necessidade que não exclui o sentido.

Wittgenstein, entretanto, não dá muita atenção ao tema no *TLP*. As passagens sobre as cores são escassas em tal obra. Normalmente entende-se que a passagem 6.3751 procura solucionar o problema por referências a fatos físicos. Na interpretação “ortodoxa” do problema (que encontramos em Ramsey e em Hacker, por exemplo), a consideração acerca da velocidade das partículas seria uma explicação do fenômeno da exclusão das cores:

(...) Pensemos na maneira como essa contradição se apresenta na física; mais ou menos assim: uma partícula não pode ter, ao mesmo tempo, duas velocidades; isso quer dizer que não pode estar, ao mesmo tempo, em dois lugares; isso quer dizer que partículas que estejam em lugares diferentes a um só tempo não podem ser idênticas. (...) (TLP, 6.3751)

Wittgenstein estaria considerando as cores como complexos analisáveis em vibrações. A análise lógica das proposições que atribuem cores implicaria proposições logicamente incompatíveis sobre a velocidade das partículas. Os termos para cores seriam descrições do movimento de partículas. O problema é que as proposições resultantes continuam se excluindo e não podem ser proposições elementares. Além disso, continua tratando-se de uma incompatibilidade necessária e não lógica: não é uma impossibilidade lógica (pelo menos não evidentemente) que uma partícula não possa estar em dois lugares ao mesmo tempo. Nesse caso, pareceria que a exclusão das cores é uma necessidade física.

Sem dúvida, o problema das cores foi fundamental para o retorno de Wittgenstein à filosofia, em 1929. Esse é o tema central do texto *Algumas Observações sobre a Forma Lógica (RFL)*, primeiro texto de Wittgenstein após seu retorno à Filosofia. Não nos estenderemos aqui na consideração das tentativas de solução de Wittgenstein para o problema da exclusão das cores neste período, nem nas modificações que tal contra-exemplo gerou na *teoria pictórica*. Convém apenas mencionar alguns pontos importantes para as considerações posteriores acerca da necessidade e de sua evidenciação em enunciados graduais. No *Algumas Observações sobre a Forma Lógica*, Wittgenstein inclui números na forma lógica das proposições graduais. Os números garantiriam os intervalos entre cada tom simples, e a necessidade de exclusão dos mesmos:

A ocorrência de números na forma de proposições atômicas é, na minha opinião, não meramente um feito de um simbolismo particular, mas um traço essencial e conseqüentemente inviolável da representação. Um número terá que entrar nessas formas quando - devemos dizer na linguagem ordinária - tratamos de propriedades que admitem a gradação (...) É uma característica dessas propriedades que um grau delas exclua qualquer outro. Um tom de cor não pode simultaneamente ter dois graus diferentes de brilho ou luz. E o importante aqui é que essas observações não expressam experiências mas são em algum sentido tautológicas. (RFL, p.26)

Isso não resolve a questão acerca da exclusão de simples. Wittgenstein chega a supor que as proposições que expressam graus de uma qualidade poderiam ser pensadas como se fossem analisadas em um produto lógico de proposições elementares dos graus da qualidade juntamente com a afirmação suplementar 'e nada mais'. Tais proposições

só se excluiriam com o adendo ‘nada mais’. Mas, afirma Wittgenstein, isso não poderia permitir a análise de tais proposições porque, e.g., se ‘vermelho = 2 graus da qualidade Q’, isso não equivale a ‘vermelho = 1 grau de Q e 1 grau de Q’ porque 1 grau de Q seria uma unidade simples, um outro tom (por exemplo, rosa).¹ Como aparece nas *PR*:

Someone might imagine this being explained by supposing that certain small quantities of red added together would yield a specified degree of red. But in that case what does I mean if we say, for example, that five of these quantities of red are present? It cannot, of course, be a logical product of quantity n° 1 being present, and quantity n° 2 etc., up to 5; for how would these be distinguished from one another? Thus the proposition that 5 degrees of red are present can't be analysed like this. Neither can I have a concluding proposition that this is all the red that is present in this colour: for there is no sense in saying that no more is needed, since I can't add quantities of red with the ‘and’ of logic. (*PR*, VIII, 76)

Wittgenstein conclui então que as proposições que expressam o grau de uma qualidade não podem ser analisadas:

Eu sustento que as afirmações que atribuem graus de qualidade não podem mais ser analisadas, e, além disso, que a relação da diferença de graus é uma relação interna e que é representada por uma relação interna entre afirmações que atribuem os graus diferentes. Isso significa dizer que a proposição atômica deve ter a mesma multiplicidade dos graus que atribui, do que se segue que números devem entrar na forma de proposições atômicas. (*RFL*, p.28)

O grau de uma qualidade, qualquer que fosse, seria simples então. Mas as proposições que expressam diferentes graus se excluiriam ainda assim porque mantêm relações internas. Wittgenstein considera que os simples, nesses casos, se excluem e, como as proposições contêm a forma das entidades que representam (suas possibilidades combinatórias), ele acaba por aceitar, portanto, que proposições elementares se relacionam internamente. Isso forneceria uma maior multiplicidade lógica às proposições de grau, o que permitiria a exclusão mútua. Em todo caso, a idéia de proposição elementar necessariamente independente é abandonada, mas Wittgenstein ainda procura manter a idéia de que a exclusão é uma necessidade lógica, que não se funda na semântica: “(...) uma notação perfeita teria que excluir semelhantes estruturas por regras sintáticas definidas” (*RFL*, p.36). Sendo assim, neste momento, a necessidade e o sentido são ainda considerados incompatíveis.

¹ ‘ $\sim(1 Q \wedge 1 Q \leftrightarrow 2 Q)$ ’; ‘ $1 Q \wedge 1 Q \rightarrow 1 Q$ ’. Por outro lado, se considerássemos que $2Q \leftrightarrow 1Q \wedge 1Q$, acabaríamos com a unidade de Q que deixaria de ser simples.

A ruptura que se desenrola nos anos que seguem, particularmente entre o final de 1930 e meados de 1931, no pensamento de Wittgenstein é ao mesmo tempo a ruptura radical com a concepção extensional de necessidade e com o paradigma denotacional da linguagem. Já em 1930, aparece a noção de ‘gramática’, ocupando o lugar da necessidade lógica e dizendo respeito a uma necessidade não-extensional, isto é, não fundada em referenciais simples. É o momento no pensamento de Wittgenstein no qual a necessidade deixa de ser pensada como meramente sintática, embora continue pensada como ‘sem sentido’, e determinando, ao mesmo tempo, as possibilidades dos fatos e da linguagem.

A multiplicidade da linguagem é dada pela gramática. (...) A gramática nos leva a algumas coisas com a linguagem e não a outras. O octaedro de cores é usado na psicologia para representar o esquema de cores. Mas é realmente uma parte da gramática, não da psicologia. Ele nos conta o que podemos fazer: podemos falar de um azul esverdeado, mas não de um vermelho esverdeado, etc. Mas a gramática não é inteiramente um questão de escolha arbitrária. Ela deve nos capacitar a expressar a multiplicidade dos fatos, nos dando o mesmo grau de liberdade que dá aos fatos. A geometria euclidiana é uma parte da gramática. Ela é uma convenção de expressões, e, então, parte da gramática. (...) Podemos agora ver o que significamos quando dizemos que algo é possível se podemos imaginá-lo. (...) A possibilidade é expressa (contida) na linguagem ela mesma. Proposições verdadeiras descrevem a realidade. Gramática é um espelho da realidade. A gramática nos capacita a expressar proposições verdadeiras e falsas; e isso não nos diz algo sobre o mundo. O que pode ser expresso sobre o mundo pela gramática não pode ser expresso em uma proposição. Pois essa proposição pressuporia sua própria verdade, isto é, pressuporia a gramática. (AWL, pp.8-10)

Veremos que, posteriormente, esta *impredicatividade* normativa cessa de ser entendida como devendo excluir o sentido, pois, se não há e não pode haver simples independentes no final das análises da determinação semântica, ao contrário do ocorria no *Tractatus*, o que precisa ser excluído da normatividade será, mais precisamente, a referência. Entretanto, o caminho seguido para tanto consiste inicialmente na renúncia não apenas da independência das proposições elementares, mas na introdução da noção central de ‘sistema de proposições’, pela qual os enunciados graduais não seriam individualmente comparados à realidade, mas seriam sempre abordados já em *relação interna* a este sistema:

- The fact that one measurement is right automatically excludes all others. I say automatically: just as all graduation marks are on *one* rod, the propositions corresponding to the graduation marks similarly belong together, and we can't measure with one them without simultaneously measuring with all the others. - It isn't a proposition that I put against reality as a yardstick, it's a system of propositions. (PR, VIII, 82)

I once wrote: 'A proposition is laid like a yardstick against reality. Only the outermost tips of the graduation marks touch the object to be measured.' I should now prefer say: a system of propositions is laid like a yardstick against reality. What I mean by this is: when I lay a yardstick against a spatial object, I apply *all the graduation marks simultaneously*. It's not the individual graduation marks that are applied, it's the whole scale. If I know that the object reaches up to the tenth graduation mark, I also know immediately that it doesn't reach the eleventh, twelfth, etc. The assertions telling me the length of an object form a system which is compared with reality, not a single proposition. If, for instance, I say such and such a point in the visual field is blue, I not only know that, I also know that the point isn't green, isn't red, isn't yellow etc. I have simultaneously applied the whole colour scale. (...) When I was working on my book I was still unaware of all this and thought then that every inference depended on the form of a tautology. I hadn't seen then that an inference can also be of the form: A man is 6ft tall, therefore he isn't 7ft. This bound up with my then believing that elementary propositions had to be independent of one another: from the fact that one state of affairs obtained you couldn't infer another did not. But if my present conception of a system of propositions is right, then it's even the rule that from the fact that one state of affairs obtains we can infer that all the others described by the system of propositions do not. (PR, Ap. II)

A gramática, diferentemente da lógica do *TLP*, dirá respeito a esse sistema de proposições internamente relacionadas. Esta idéia acarretará uma análise distinta das relações de inferência/condicionamento entre as proposições: proposições se condicionam mutuamente e mantêm relações internas, sem que uma análise extensional desse condicionamento seja possível.

That makes it look as if a construction might be possible within the elementary proposition. That is to say, as if there were a construction in logic which didn't work by means of truth functions. What's more, it also seems that these constructions have an effect on one propositions following logically from another. For, if different degrees exclude one another it follows from the presence of one that the other is not present. In that case, two elementary propositions can contradict one another. (PR, VIII, 76)

But that would imply that I can write down two particular propositions, but not their logical product. The two propositions collide in the object. The proposition $f(g) \cdot f(r)$ isn't nonsense, since not all truth possibilities disappear, even if they are all rejected. We can, however, say that the '.' has a different meaning here, since ' $x \cdot y$ ' usually means (TFFF); here, on the other hand, it means (FFF). (PR, VIII, 79)

But what if these tints are objects lined up like links in a chain in a certain way; and now in one proposition we are speaking of five such links, and in another proposition of three. All right, but these propositions must exclude one another, while yet not being analyzable. (PR, VIII, 80)

É preciso que os enunciados de grau se relacionem internamente, como que através das operações *tractatianas*, para que possam produzir um novo tom, por isso eles precisam se condicionar e se excluir.

Neither does it mean anything to say that a rod which is 3 yards long is 2 yards long, because it is 2 + 1 yards long, since we can't say it is 2 yards long and that it is 1 yards long. The length of 3 yards is something new. And yet I can say, when I see two different red-blues: there's an even redder blue than the redder of these two. That is to say, from the given I can construct what is not given. (PR, VIII, 76)

Sendo assim, é a própria *relação interna* e não objetos independentes o que passa a ser tomado como fundamental, e como constituindo o final das análises.

A mixed colour, or better, a colour intermediate between blue and red is such in virtue of an internal relation to the structures of blue and red. But this internal relation is elementary. That is, it doesn't consist in the proposition 'a is blue-red' representing a logical product of 'a is blue' and 'a is red.' (PR, VIII, 80)

Se não há mais proposições elementares independentes, nem tudo que pode acontecer (todas as configurações possíveis) é determinado pelas proposições mais simples, existem outras relações necessárias não passíveis de determinação dessa maneira.

That is how it is, what I said in the *Tractatus* doesn't exhaust the grammatical rules for 'and', 'not', 'or', etc.; there are rules for the truth functions which also deal with the elementary part of the propositions. (PR, VIII, 82)

The concept of an elementary proposition' now loses all of its earlier significance. The rules for 'and', 'or', 'not', etc., which I represented by means of the T-F notation are a part of the grammar of these words, but not the whole. (PR, VIII, 83)

Um ponto fundamental para as análises de Wittgenstein neste período é o aparecimento do infinito na forma lógica das proposições, a análise dos enunciados graduais conduziria ao infinito, e pensá-los então como determinado por átomos seria um aspecto dessa concepção extensional enganosa com a qual Wittgenstein precisa romper. Se tomarmos o infinito como dado extensionalmente, cometemos o mesmo erro envolvido na análise extensional da determinação semântica, isto é, tentamos mantê-la como determinada por objetos extensionais independentes, ao invés de por regras (que aqui significa particularmente este *sistema* de proposições). Aparece assim a idéia pela qual o infinito, ele mesmo, não poderia ser pensado como redutível a átomos extensionais independentes (uma lista), mas só poderia ser pensado como regra. De fato, Wittgenstein chega à análise do infinito por meio de problemas relativos à determinação da necessidade e da generalidade lingüística que, justamente por incorrerem em *impredicatividade* (impossibilidade de determinação independente), conduzem ao infinito.

Durante os dois últimos semestres tenho mantido contato direto com o trabalho do senhor Wittgenstein e ele me parece ter feito notáveis progressos. Ele começou com certas questões na análise das proposições que agora o levaram a problemas sobre o infinito os quais se encontram na raiz das atuais controvérsias sobre os fundamentos da matemática. (Ramsey, *In.*: Wrigley, 1995, p.3.)

O que ocorre é que, pelo que fica evidente no problema das cores, os supostos elementos simples na base da determinação da generalidade lingüística não aparecem jamais como átomos independentes, logo, é como se a análise conduzisse ao infinito. E supor essa infinidade como atual, ou por analogia com uma coleção (lista) finita, seria supor que a análise chegou ao fim em elementos últimos (ainda que inatingíveis). Por isso, o tratamento do infinito como uma totalidade finita passa a ser associada com o tratamento da determinação da generalidade suposta na linguagem por átomos extensionais, que Wittgenstein deseja criticar, ambos sendo casos de uma confusão do âmbito necessário (das regras) com o âmbito empírico da linguagem. Supor que a análise da generalidade suposta na linguagem conduziria a alguma forma de infinidade atual significaria supor que a análise em átomos independentes extensionais chegaria a um fim, por isso pensar o infinito como atual passa a ser, na concepção de Wittgenstein, a contraparte de se pensar a determinação do sentido como conduzindo a átomos extensionais independentes e simples. Sumariamente, o infinito diz respeito à generalidade impredicativa, e não pode jamais ser pensado como dado sem contradição. As considerações sobre a infinidade a partir de então se derivam do abandono de sua análise extensional da semântica, dado este caráter *impredicativo* já mencionado, e não por acaso, portanto, suas considerações sobre o tema desde então tendem também a se aproximar conceitualmente das posições já mantidas por Poincaré (1905) sobre o assunto, o que é particularmente claro nas *Remarques Philosophiques*. Exatamente por isso as análises do infinito de Wittgenstein são tão importantes para entender a posição geral do autor sobre as determinações necessárias.

Quando Wittgenstein passa a situar o âmbito fundamental nas normas gramaticais ao invés de na forma lógica, isso significa ao mesmo tempo romper com o privilégio da extensão em detrimento da intensão, e substituir a ontologia de objetos independentes, enquanto determinação da semântica, pelo contexto. O mais importante é que a partir da noção de *sistema*, o caráter fundamental da nomeação é questionado, a denotação torna-se secundária em relação ao contexto. Como não teríamos objetos independentemente dados, mas sempre já relações internas, a nomeação ela mesma não funcionaria senão

por supor já a gramática e, portanto, a linguagem funcionando. Os enunciados graduais tornariam evidente a impossibilidade de simples *a priori*, bem como o estabelecimento de uma teoria geral unívoca do significado.²

A conclusão é que, pela própria *impredicatividade* do âmbito normativo, não podemos supor mais a ontologia de *objetos extensionais dados independentemente* porque não apenas eles precisam ser internamente, mas, dado a própria maneira como a linguagem funciona, eles não são mesmo sempre passíveis de serem supostos como dados *per se*. Enunciados como os enunciados graduais deixariam claro esse caráter vago envolvido na determinação semântica, mas, mais do que isso, tornariam clara a interdição da figura denotacional na base da significação. E isso é fundamental para avaliar a importância de nossas análises iniciais no presente trabalho.

O que Wittgenstein parece perceber e condicionar toda a ruptura então operada em seu pensamento é como a vagueza do normativo se relaciona com o caráter impredicativo do âmbito necessário, e isso acarreta, ao mesmo tempo, seu contextualismo semântico. Finalmente, como se sabe, tudo isso significará a recusa à própria idéia segundo a qual a linguagem é essencialmente representação da realidade, isto é, sua crítica à concepção agostiniana da linguagem, pela qual significar seria essencialmente nomear. Não por acaso, Wittgenstein no início das *Investigações Filosóficas* argumenta pelo caráter contextual da própria identificação de referências na linguagem³, não mais a determinação semântica supõe a referência, de qualquer espécie que seja, mas antes, qualquer identificação de referências suporia já as determinações

² Como Wittgenstein afirmará mais tarde: “... O que quero mostrar realmente é que os conceitos simples de cor não são nada claros *a priori*.” (ASC, 69, p.67) “Não queremos encontrar uma teoria das cores (nem fisiológica nem psicológica), mas antes a lógica dos conceitos de cor. E esta leva a cabo o que, com frequência, injustamente se espera de uma teoria.” (ASC, p.19)

³ Esta argumentação encontra-se particularmente entre as passagens 29 e 65 das *PI*, e estabelece as bases para a noção de *semelhança de família* (*PI*, 65-88), a qual se funda, também, no abandono da análise extensional da linguagem (universais por semelhança não podem ser analisados extensionalmente). Este ponto foi também desenvolvido em nossa dissertação de mestrado, e embora merecesse ser abordado em relação à temática que aqui tratamos, não será diretamente tratado no presente trabalho. Cumpre apenas notar que a idéia de que o sentido lingüístico seria determinado por regras e não por correspondentes quaisquer que sejam toma como primária a relação entre os entes e não os entes relacionados. Tal relação seria uma relação por semelhança justamente porque se fosse a idéia de uma relação por elemento comum aos relacionados (essência) suporia a idéia de um correspondente no real novamente. Sendo assim, o conceito de semelhança de família é derivado em Wittgenstein da redução ao absurdo que a noção de ‘condições necessária e suficiente’ para o emprego de um termo sofre no pensamento de Wittgenstein. Tal redução, por sua vez, funda-se justamente na crítica ao extensionalismo que expomos acima, pois a identificação de uma condição necessária e suficiente para o emprego de um termo suporia a identificação de um elemento simples individual comum aos assim denominados, e é nessa medida que a abordagem essencialista funda-se ainda em um primado da nomeação. Novamente é ainda o problema dos enunciados graduais o pano de fundo, desde que nestes ficaria clara a impossibilidade de encontrarmos um ponto de parada das análises em algum elemento.

semânticas contextuais, pois não poderíamos saber exatamente o que uma ostensão designa sem a inserção em uma prática lingüística.

Now one can ostensively define a proper name, the name of a colour, the name of a material, a numeral, the name of a point of the compass and so on. The definition of the number two, "That is called 'two' "—pointing to two nuts—is perfectly exact.—But how can two be defined like that? The person one gives the definition to doesn't know what one wants to call "two"; he will suppose that "two" is the name given to *this* group of nuts!—He *may* suppose this; but perhaps he does not. He might make the opposite mistake; when I want to assign a name to this group of nuts, he might understand it as a numeral. And he might equally well take the name of a person, of which I give an ostensive definition, as that of a colour, of a race, or even of a point of the compass. That is to say: an ostensive definition can be variously interpreted in *every* case. (PI, 28)

Também ali, o exemplo das cores, e outros enunciados graduais, cumprem um papel central. De fato, a relação entre o problema das cores e a recusa à concepção agostiniana da linguagem aparece já explicitamente na *Gramática Filosófica* (Cf.: PG, II, 19- 35). “(...) A palavra alemã para ‘referência’ (Bedeutung) é derivada da palavra alemã para ‘apontar’ (deuten)” (PG, I, II, 19). A identificação da referência supõe o sentido, por isso este não é determinado por objetos independentes.

(...) However, suppose that instead of saying “that is called ‘red’” I had phrased my definition “that colour is called ‘red’”. That certainly is unambiguous, but only because the expression ‘colour’ settles the grammar of the word ‘red’ up to this last point. (But here questions could arise like “do you call just this shade of colour red, or also other similar shades?”). Definitions might be given like this: the colour of this patch is called ‘red’, its shape ‘ellipse’. I might say: one must already understand a great deal of a language in order to understand that definition. Someone who understands that definition must already know where the words (‘red’, ‘ellipse’) are being put, where they belong in language. (PG, I, II, 24)

A ostensão suporia as determinações categoriais para funcionar. A mera designação do objeto não seria possível por ostensão sem supormos já uma regra para este, a idéia de Wittgenstein é que a designação não funcionaria, se o uso daquelas palavras não fosse já pressuposto no contexto. A ostensão (o mero apontar) e, portanto, o mero referir, funcionaria apenas para fazer distinções intra-categoriais, supondo-se já distinções de fundo, e, portanto, supondo-se já regras (conceitos).⁴

⁴ (...) Of course, one can reduce the description of the use of the word "slab" to the statement that this word signifies this object. This will be done when, for example, it is merely a matter of removing the mistaken idea that the word "slab" refers to the shape of building-stone that we in fact call a "block"—but the kind of *referring* this is, that is to say the use of these words for the rest, is already known. Equally one can say that the signs "a", "b", etc. signify numbers; when for example this removes the mistaken idea that "a", "b", "c", play the part actually played in language by "block", "slab", "pillar". And one can also

A partir disso, são diretamente criticados os supostos ‘simples’ do sentido imediato, e os nomes próprios que Russell mantém como os designando - ‘isto’, ‘este’ – , tais termos teriam um uso e sentido geral, não podendo jamais funcionar como simples nomes (etiquetas) de indivíduos.

But what, for example, is the word "this" the name of in language-game (8) or the word "that" in the ostensive definition "that is called"—If you do not want to produce confusion you will do best not to call these words names at all.—Yet, strange to say, the word "this" has been called the *only genuine* name; so that anything else we call a name was one only in an inexact, approximate sense. (...) (PI, 38)

Entretanto, com isso, também são criticados agora não apenas os objetos por *acquaintance* de Russell, mas também os simples *tractatianos*, que cumpriam o mesmo papel de ponto zero do sentido no sistema de Wittgenstein. É interessante notar que, de acordo com as análises de Wittgenstein, poderíamos usar vários termos como designadores rígidos, dependendo do contexto, mas o ‘isto’, o ‘este’ são indicativos que funcionam como termos gerais.

(...) It is quite true that, in giving an ostensive definition for instance, we often point to the object named and say the name. And similarly, in giving an ostensive definition for instance, we say the word "this" while pointing to a thing. And also the word "this" and a name often occupy the same position in a sentence. But it is precisely characteristic of a name that it is defined by means of the demonstrative expression "That is N" (or "That is called 'N' "). But do we also give the definitions: "That is called 'this' ", or "This is called 'this' "? (...) (PI, 38)

Ou seja, o ‘este’ mesmo, justamente, não poderia funcionar desta maneira nominativa, ele não serve para batizar algo, pois é um indicativo geral.

(...) What is it to *mean* the words "That is blue" at one time as a statement about the object one is pointing to—at another as an explanation of the word "blue"? Well, in the second case one really means "That is called 'blue' ".—Then can one at one time mean the word "is" as "is called" and the word "blue" as " 'blue' ", and another time mean "is" really as "is"? (...) (PI, 38)

No segundo caso, que seria o caso de nomeação por excelência, ‘azul’ não funciona como predicado porque não tem ainda um sentido determinado independentemente do

say that "c" means this number and not that one; when for example this serves to explain that the letters are to be used in the order a, b, c, d, etc. and not in the order a, b, d, c. (...) (PI, 10)

objeto, mas é uma observação sobre a linguagem. Agora, quando a linguagem é tomada como essencialmente denotativa, tal uso fundamental e necessariamente não predicativo é equacionado com a nomeação. (E o que Wittgenstein manterá é que pela mesma razão que não é uma atribuição empírica, também não é um nome.)

A identificação destes com os “verdadeiros nomes” teria origem na busca de nomes próprios lógicos de indefiníveis, algo que não pudesse senão ser nomeado, e cuja existência fosse, portanto, necessária e eterna. Apenas os simples serem definidos ostensivamente cumpriria justamente a função de evitar qualquer dúvida em relação ao que é denotado, pois a nomeação nesse caso entraria justamente no ponto onde a explicação e a dúvida cessam. O ponto é que se fossemos elucidando as determinações categoriais que precisamos para que a ostensão nominativa funcionasse univocamente, chegaríamos, por fim, no final das explicações, aos verdadeiros nomes, em relação aos quais nenhuma elucidação seria possível, e cuja referência seria suposta por todas as elucidações possíveis (que seria a ligação imediata com a realidade).

Perhaps you say: two can only be ostensively defined in *this* way: "This *number* is called 'two' ". For the word "number" here shews what place in language, in grammar, we assign to the word. But this means that the word "number" must be explained before the ostensive definition can be understood.—The word "number" in the definition does indeed shew this place; does shew the post at which we station the word. And we can prevent misunderstandings by saying: "This *colour* is called so-and-so", "This *length* is called so-and-so", and so on. That is to say: misunderstandings are sometimes averted in this way. But is there only *one* way of taking the word "colour" or "length"?—Well, they just need defining.—Defining, then, by means of other words! And what about the last definition in this chain? (Do not say: "There isn't a 'last' definition". That is just as if you chose to say: "There isn't a last house in this road; one can always build an additional one".) (...) (*PI*, 29)

Tais designadores seriam então os verdadeiros nomes e não descrições disfarçadas, porque se ligariam de maneira certa ao que nomeiam, visto que estes justamente não poderiam ser identificados independentemente da nomeação. Se apenas os simples fossem nomeados, não haveria espaços para dúvidas adicionais (categoriais) diante da ostensão, e este seria o papel que cumpriria os nomes próprios lógicos.

O ponto que mais nos interessa, portanto, é: chega-se a tomar justamente estes indicativos como os verdadeiros nomes porque aquilo que pode funcionar dessa maneira não predicativa, funcionando como o final das explicações, é justamente aquilo cuja falha referencial parece (e deve ser) impossível, por isso em relação a eles o problema das distinções categoriais não se coloca, e mais nenhuma elucidação pode ser dada,

justamente porque nestes casos não temos predicções sobre um objeto já dado, mas trata-se da função que os objetos por *acquaintance* deveriam cumprir, isto é, não há um sentido pelo qual o objeto poderia ser descrito, se não existisse. Trata-se daquilo cuja existência deve ser dada com o significado (e, por isso, cuja atribuição da existência é impossível) e a falsidade é impossível. Por isso se pensa nestes nomes supostamente genuinamente próprios (sem identificação/sentido anterior) no fundamento da linguagem. No caso deles, também encontraríamos um colapso entre extensão e intensão, porque só haveria extensão.

But why does it occur to one to want to make precisely this word into a name, when it evidently is *not* a name?—That is just the reason. For one is tempted to make an objection against what is ordinarily called a name. It can be put like this: *a name ought really to signify a simple*. And for this one might perhaps give the following reasons: The word "Excalibur", say, is a proper name in the ordinary sense. The sword Excalibur consists of parts combined in a particular way. If they are combined differently Excalibur does not exist. But it is clear that the sentence "Excalibur has a sharp blade" makes *sense* whether Excalibur is still whole or is broken up. But if "Excalibur" is the name of an object, this object no longer exists when Excalibur is broken in pieces; and as no object would then correspond to the name it would have no meaning. But then the sentence "Excalibur has a sharp blade" would contain a word that had no meaning, and hence the sentence would be nonsense. But it does make sense; so there must always be something corresponding to the words of which it consists. So the word "Excalibur" must disappear when the sense is analysed and its place be taken by words which name simples. It will be reasonable to call these words the real names. (*PI*, 39)

Wittgenstein cita então Platão, no *Teeteto*, ressaltando o caráter impredicativo dessa suposta nomeação primitiva:

What lies behind the idea that names really signify simples?— Socrates says in the Theaetetus: "If I make no mistake, I have heard some people say this: there is no definition of the primary elements—so to speak—out of which we and everything else are composed; for everything that exists¹ in its own right can only be *named*, no other determination is possible, neither that it *is* nor that it *is not* But what exists¹ in its own right has to be named without any other determination. In consequence it is impossible to give an account of any primary element; for it, nothing is possible but the bare name; its name is all it has. But just as what consists of these primary elements is itself complex, so the names of the elements become descriptive language by being compounded together. For the essence of speech is the composition of names." Both Russell's 'individuals' and my 'objects' (*Tractates Logico-Philosophicus*) were such primary elements. (*PI*, 46)

O mais interessante aqui é que, no final das contas, justamente a razão pela qual eles parecem “os nomes genuínos”, a sua impredicatividade, é exatamente a razão da impossibilidade de que eles sejam nomes, pois nomes não funcionam assim normalmente. E é essa confusão gramatical fundamental que Wittgenstein quer

desfazer: a de se tomar como “o mais verdadeiro” caso de nomeação aquilo que justamente impossibilita também que se trate ainda de uma nomeação.⁵

The demonstrative "this" can never be without a bearer. It might be said: "so long as there is a *this*, the word 'this' has a meaning too, whether *this* is simple or complex."——But that does not make the word into a name. On the contrary: for a name is not used with, but only explained by means of, the gesture of pointing. (*PI*, 45)

Recusando isso, será agora a significação (intensão ↔ uso) que cumprirá esta função de estabelecer o necessário. Nesse sentido, Wittgenstein argumenta que mesmo que o portador de um nome não exista, ele continua ainda tendo significado, apenas nomes que não pertençam a uma prática lingüística não o teriam (*PI*, 42, 43). Os enunciados da forma ‘isto é o que denominamos ‘A’ não poderiam ser predicacões sobre o elemento em questão porque determinam estes elementos como tais no jogo de linguagem. Desta forma, tais atribuições não poderiam ser verdadeiras ou falsas, elas não predicariam o elemento pela mesma razão que ‘o metro padrão não mede um metro’. Tal impredicatividade significará a partir de agora no pensamento de Wittgenstein justamente que se tratam de padrões, paradigmas, regras da linguagem.

What does it mean to say that we can attribute neither being nor non-being to elements?—One might say: if everything that we call "being" and "non-being" consists in the existence and non-existence of connexions between elements, it makes no sense to speak of an element's being (non-being); just as when everything that we call "destruction" lies in the separation of elements, it makes no sense to speak of the destruction of an element. One would, however, like to say: existence cannot be attributed to an element, for if it did not *exist*, one could not even name it and so one could say nothing at all of it.—But let us consider an analogous case. There is *one* thing of which one can say neither that it is one metre long, nor that it is not one metre long, and that is the standard metre in Paris.—But this is, of course, not to ascribe any extraordinary property to it, but only to mark its peculiar role in the language-game of measuring with a metre-rule.—Let us imagine samples of colour being preserved in Paris like the standard metre. We define: "sepia" means the colour of the standard sepia which is there kept hermetically sealed. Then it will make no sense to say of this sample either that it is of this colour or that it is not. (...) (*PI*, 50)

E atribuir este caráter *impredicativo*, como ele mesmo havia feito, à existência necessária de quaisquer entidades que sejam, ou mais precisamente, de objetos especiais (simples) que corresponderiam a nomes especiais (lógicos) seria o caso paradigmático

⁵ E em toda a crítica ao mentalismo e, em particular, no *ALP*, esta mesma confusão gramatical é ainda objeto de análise.

de confusão do gramatical com o empírico, que é exatamente como Wittgenstein compreende agora o extensionalismo.

(...) We can put it like this: This sample is an instrument of the language used in ascriptions of colour. In this language-game it is not something that is represented, but is a means of representation.— And just this goes for an element in language-game (48) when we name it by uttering the word "R": this gives this object a role in our languagegame; it is now a *means* of representation. And to say "If it did not *exist*, it could have no name" is to say as much and as little as: if this thing did not exist, we could not use it in our language-game.—What looks as if it *had* to exist, is part of the language. It is a paradigm in our language-game; something with which comparison is made. And this may be an important observation; but it is none the less an observation concerning our language-game—our method of representation. (*PI*, 50)

A transferência do caráter impredicativo do suposto uso referencial para agora o âmbito gramatical aparece nesta passagem:

I want to restrict the term '*name*' to what cannot occur in the combination 'X exists'.— Thus one cannot say 'Red exists', because if there were no red it could not be spoken of at all.—Better: If "X exists" is meant simply to say: "X" has a meaning,—then it is not a proposition which treats of X, but a proposition about our use of language, that is, about the use of the word "X". (...) (*PI*, 58)

É, portanto, a regra, ou seja lá o que cumpra esta função normativa, e não um referente especial, o que é indestrutível.

(...) If we call such a table the expression of a rule of the language-game, it can be said that that we call a rule of a language-game may have very different roles in the game. (*PI*, 53)

"What the names in language signify must be indestructible; for it must be possible to describe the state of affairs in which everything destructible is destroyed. And this description will contain words; and what corresponds to these cannot then be destroyed, for otherwise the words would have no meaning." I must not saw off the branch on which I am sitting. One might, of course, object at once that this description would have to except itself from the destruction.—But what corresponds to the separate words of the description and so cannot be destroyed if it is true, is what gives the words their meaning—is that without which they would have no meaning.—In a sense, however, this man is surely what corresponds to his name. But he is destructible, and his name does not lose its meaning when the bearer is destroyed.—An example of something corresponding to the name, and without which it would have no meaning, is a paradigm that is used in connexion with the name in the language-game. (*PI*, 55)

Deve-se, portanto, levar a sério o primado da relação em detrimento ao primado dos relacionados, o que significa levar a sério o princípio do contexto:

(...) We may say: *nothing* has so far been done, when a thing has been named. It has not even *got* a name except in the language-game. This was what Frege meant too, when he said that a word had meaning only as part of a sentence. (*PI*, 49)

No *Tractatus*, nem tudo poderia ter referência (o que se seguiria do próprio paradoxo), mas, assim como no *PM*, de Russell, o paradigma da linguagem ainda é referencial, as operações lógicas são sincategoremáticas (insaturadas), mas é a nomeação o que está base do sistema. Após o problema das cores, Wittgenstein buscará na base da linguagem algo já com esta estrutura sincategoremática das operações, mantendo a partir de então que aquilo que não é independentemente identificado, se não pode ser descrito exatamente, tampouco pode ser nomeado. Trata-se, de uma inversão do primado da referência pelo primado do sentido, que se deriva diretamente do abandono da imagem extensional da generalidade

But what are the simple constituent parts of which reality is composed?—What are the simple constituent parts of a chair?—The bits of wood of which it is made? Or the molecules, or the atoms?—"Simple" means: not composite. And here the point is: in what sense 'composite'? It makes no sense at all to speak absolutely of the 'simple parts of a chair'. We use the word "composite" (and therefore the word "simple") in an enormous number of different and differently related ways. (Is the colour of a square on a chessboard simple, or does it consist of pure white and pure yellow? And is white simple, or does it consist of the colours of the rainbow?—Is this length of 2 cm. simple, or does it consist of two parts, each 1 cm. long? But why not of one bit 3 cm. long, and one bit 1 cm. long measured in the opposite direction?) To the *philosophical* question: "Is the visual image of this tree composite, and what are its component parts?" the correct answer is: "That depends on what you understand by 'composite'." (And that is of course not an answer but a rejection of the question.) (*PI*, 47)

De qualquer forma, a inversão se sustenta ainda pela manutenção de um âmbito no qual 'sentido e referência' colapsam, e uma das conclusões interessantes dessa continuidade é entender o ponto de ruptura. No primeiro Wittgenstein, o colapso significa a anulação do sentido, enquanto que, no segundo, o mesmo colapso significa a anulação da referência.

É fundamental aqui explicar melhor como isso se relaciona com o próprio caráter impredicativo da determinação semântica (da regra), ao qual desejamos chamar atenção, pois se tivéssemos uma identificação de objetos independentes na base, poderíamos contar com um domínio de objetos dados independentemente da função (intensão/regra) que a eles se aplica, que é o que precisa ser suposto em uma análise extensional qualquer que seja. A impossibilidade desta suposição equaciona-se, portanto, com a conclusão pela total impossibilidade de se evitar a *impredicatividade*.

Uma delimitação é *impredicativa*, como já notamos, se delimita um objeto ou indivíduo de uma coleção fazendo uso de uma quantificação sobre esta coleção, desde que, desta forma, o objeto é delimitado por relação a uma totalidade a qual pertence. Nesse caso, não é difícil dizer que isso é inevitável no que diz respeito à própria delimitação intensional. E não haveria nenhuma novidade nesta afirmação, ela pode ser inferida da Lógica de Aristóteles, onde a inversão complementar que existe entre o ponto de vista extensional e o ponto de vista intensional funda-se precisamente em: se do ponto de vista da extensão, a classe ‘homem’ está dentro da classe ‘mortal’, do ponto de vista da intensão, é a mortalidade que compõe, semanticamente, o conceito homem (Aristóteles, *Analíticos Posteriores*, I, 4, In: 2005, p.259) (ou, dito de modo mais palatável, o conceito de homem tem como *nota* a mortalidade). Sendo assim, pode-se notar que, do ponto de vista extensional, partimos de indivíduos para classes; mas, do ponto de vista intensional, procedemos sempre ao contrário, do que se segue a própria complementariedade que existe entre a compreensão e a extensão, pois a relação entre conceitos ‘cresce’ na medida em que a relação entre classes ‘diminui’. Assim, uma estruturação hierárquica cresce extensionalmente de baixo para cima; e intensionalmente de cima para baixo, sendo irrazoável exigir que a regra de definição (intensional) dos indivíduos não suponha a totalidade dos indivíduos que delimita. É nesse sentido que Chateaubriand mantém em *Logical Forms* (2002) que o contexto intensional é sempre impredicativo, embora o âmbito extensional seja necessariamente predicativo. Entidades extensionais não dependeriam das propriedades intensionais que a elas se aplicam para se determinarem (ou definirem) no sentido ontológico; entretanto, o critério de identidade das propriedades suporia as propriedades que se aplicam a elas, e, nesse sentido, *as entidades intensionais seriam entidades impredicativas*. O critério usual de identidade, em termos do princípio dos indiscerníveis seria impredicativo: $\forall x \forall y (\forall z (Zx \leftrightarrow Zy) \rightarrow x=y)$ porque apelaria para todas as propriedades do que é identificado (Cf.: Chateaubriand, 2002, p. 350). A condição identificadora: ‘ $\forall z (Zx \leftrightarrow Zy)$ ’ quantificaria sobre um domínio de variáveis que abarca uma totalidade que inclui (e, nesse sentido, pressupõe) a propriedade a ser identificada.

O que mantenho é que a hierarquia padrão de conjuntos é impredicativa no sentido epistemológico forte [isto é: tem totalidades com membros definíveis apenas em termos dela mesma], mas é predicativa em ambos os sentido ontológicos. (...) O que eu gostaria

de sugerir como um critério de extensionalidade para um tipo de entidade é ser predicativa no sentido ontológico forte. Meu entendimento disso é que exista uma estruturação hierárquica bem fundada das entidades em questão, baseada no nível fundamental das entidades, tal que a identidade das entidades de qualquer nível α depende apenas das entidades de níveis inferiores – i.e. existe um critério de identidade para entidades de nível α que apela apenas para entidades de nível menor que α . (Chateaubriand, 2002, p.349)

Logo, quando Wittgenstein argumenta contra a possibilidade de supormos a delimitação de indivíduos sem intensão (sem regra), isto é, quando ele rompe com o ponto de vista ontológico-extensional, ele argumenta em favor de uma dependência da extensão em relação à intensão, que, em máximo grau, atestaria a inevitabilidade das determinações impredicativas. E esta impossibilidade se derivaria justamente da ruptura com a idéia de átomos simples dados independentemente, na base de seu sistema. Pois, ainda que cada nível fosse pensado, extensionalmente, tendo como critério de determinação apenas o nível inferior, o primeiro nível dos indivíduos permaneceria sem nenhum critério de determinação⁶ independente (posto que é excluído que este critério seja dado pelo nível acima). A recusa de Wittgenstein aqui é, portanto, destas entidades sem regra (sem intensão), e pode ser dito que isso condicionará, em alguma medida, sua crítica ao realismo. A idéia é que os indivíduos dependem da sua condição identificadora (regra), pois se é impossível determinar o nível extensional sem alguma intensão, parece razoável que os objetos também dependam ontologicamente da intensão. Ou seja, não conseguiríamos ter a extensão determinada sem uma intensão. O comprometimento com a suposição de delimitação do âmbito extensional sem intensão (sem regra), acarretaria um compreensão do extensional como *determinado sem determinação*. De fato, que a intensão seja necessária para a determinação da extensão se coaduna com uma necessária complementaridade entre os dois aspectos, pois, havendo uma relação de interdependência entre o âmbito extensional e o intensional, não poderíamos tomar o primeiro já dado sem qualquer intensão. E se precisamos das intensões e não queremos nos comprometer de modo algum com supostas entidades, elas mesmas impredicativas, como seriam supostas entidades intensionais, devemos assumir uma postura anti-realista quanto às regras (as intensões), isto é, o âmbito intensional não poderia ser determinado por algo dado em qualquer lugar que seja, pois entes dados são extensionais e

⁶ “Naturalmente, qualquer tal estruturação será relativa às entidades do nível fundamental, para o qual a determinação da identidade deve ou ser pressuposto ou caracterizado de um outro modo.”(Chateaubriand, 2002, p.350)

predicativos. Também aqui é interessante compararmos as observações que Chateaubriand faz a respeito de Quine:

Minha conclusão é que as propriedades (como usualmente concebidas) não são extensionais porque são necessariamente impredicativas no sentido ontológico forte. Esta conclusão se relaciona com as conclusões a que chegou Quine em várias ocasiões, elencando dúvidas sobre a legitimidade de se postular propriedades. Ele chega a aceitar conjuntos, mas isso é o mais longe que chega seu platonismo. Ele não poderia aceitar um platonismo de propriedades porque isso significaria aceitar entidades impredicativas. (Chateaubriand, 2002, p.356)

A abordagem extensionalista da linguagem, particularmente a análise atomista, que pressupõe a denotação na base da determinação semântica, senão de todos os nomes, pelo menos dos nomes próprios lógicos primitivos, parece garantir em máximo grau uma anterioridade geral do sentido em relação à verdade, e, sendo assim, evita a impredicatividade. Mas então o ponto central da ruptura operada na Filosofia de Wittgenstein na passagem do *Tractatus* às *Investigações* é: isso não pode ser feito, a impredicatividade não *pode* e, portanto, não *deve* ser evitada. Pelo menos não para todos os casos, pelo menos não para o âmbito necessário da linguagem (a determinação das regras) e, sendo assim, sempre encontraremos na base de uma série extensional qualquer que seja, permitindo a série, algo não-extensional, sem o qual a própria série extensional incorreria em um *regresso ao infinito*. Este será quase um “argumento coringa” para Wittgenstein a partir de então, e ele o repete de maneiras diversas nos vários âmbitos que analisa. Manter este argumento claro é certamente uma chave de leitura para as observações de Wittgenstein em muitos aspectos.

Particularmente, a crítica ao extensionalismo matemático (ou normativo, no geral), que acompanhará Wittgenstein, é também uma consideração segundo a qual, nesse âmbito, esta independência suposta pela imagem denotacional não poderá ser obtida. François Schmitz, em seu livro *Wittgenstein, la philosophie et les mathématiques* tem uma boa clareza sobre esse ponto, o que justifica as longas citações que faremos em seguida de suas análises:

L'analyse de la proposition dans la logique frégeo-russellienne semble à Wittgenstein particulièrement malheureuse en mathématiques à cause du modèle sous-jacent qu'elle transcrit et qui n'est pas conforme à la nature calculatoire des mathématiques. En général la critique porte sur l'extériorité entre concept et extension de concept (classe) qui se manifeste dans le fait que l'on prétend rapporter un concept à un ensemble d'individus, même si l'on ignore de quels individus il s'agit. Cet aspect de la notation frégeo-russellienne est particulièrement sensible lorsque l'on envisage les énoncés numériques : dans une telle notation, attribuer un nombre à un concept apporte une information nouvelle car, d'une part, il n'est pas possible de le faire de tout concept, et surtout, d'autre

part, on ne peut savoir quel nombre est attribuable avant de faire la liste des individus appartenant à son extension. D'où la formule de Wittgenstein : « le nombre est propriété interne d'une extension de concept, mais propriété externe du concept » (Schmitz, 1988, pp. 97-98)

Trata-se aqui exatamente da crítica que vimos, no capítulo anterior, relativa à definição logicista de número. Mas, o ponto central é uma repetição da mesma nota que perpassa recorrentemente o pensamento de Wittgenstein: o que não podemos ter é uma independência entre a função e seu domínio no âmbito normativo, o que significará agora, sobretudo a partir de 1931, não podemos ter denotação aqui e, portanto, precisamos nos livrar da figura extensional. Continuando com Schmitz:

De manière générale, comme nous avons déjà eu l'occasion de la noter, l'analyse fonction/argument semble à Wittgenstein empruntée à des situations empiriques du type : « Berlin [est la capitale de l'empire germanique] » dans lesquelles le nom du concept est satisfait par un ou plusieurs noms d'objets que l'on est susceptible de reconnaître, chacun pour lui-même, comme ayant les propriétés qui sont marques caractéristiques du concept (en termes frégeens). Ainsi, les objets entretiennent un rapport au concept (dans notre exemple) qui est laissé indéterminé, car on ne spécifie pas la manière de s'assurer que tel objet tombe pas sous le concept. A cela s'ajoute, inévitablement, que l'objet doit pouvoir être donné indépendamment de la donnée du concept. (Schmitz, 1988, p.98)

Ou seja, a análise funcional em termos de um domínio extensional de objetos supõe que possamos tomar estes objetos como independentes, e isso é exatamente o que impede que a função seja impredicativa. Mas, não podemos sempre contar com tal domínio. Particularmente, não podemos ter esta independência no âmbito normativo, logo, a própria imagem atomista na base da linguagem deve ser recusada, e, com ela, a figura extensional da matemática e o realismo também.

(...) qu'au départ, e avant le développement du système, on a pu reconnaître que les 'noms' primitifs (d'objets, comme de fonctions) ont une dénotation. Ainsi les expressions que l'on pourra correctement former dans le cadre du système, sont-elles, avant toute preuve, certainement douées de sens et de dénotation ; les preuves ayant pour charge de construire pas à pas l'ensemble des expressions dènotant le vrai. Cela présuppose donc (et renforce) l'idée selon laquelle le sens (et la vérité ou fausseté) d'une proposition mathématique est indépendant de la preuve que l'on peut en fournir, ce que Wittgenstein conteste en général très fermement et qui le conduit à mettre en cause l'intérêt de la 'logique mathématique'. (Schmitz, 1988, p.98)

Esta temática será ainda abordada em nosso trabalho logo adiante. Mas o que nos importa notar agora com o comentário citado é como a recusa do extensionalismo matemático (e normativo em geral) se relaciona com a recusa do atomismo, enquanto

crítica de uma denotação independente, e, assim, com a própria crítica ao realismo matemático, tão cara a filosofia do segundo Wittgenstein. Um conceito matemático não subsume objetos da mesma maneira que um conceito como ‘as pessoas nessa sala’, por exemplo, pois não subsume objetos de um modo que possamos atribuir verdade às suas aplicações independentemente da determinação do conceito. Sendo assim, o colapso entre verdade e semântica do âmbito necessário da linguagem nada mais é que um colapso entre intensão e extensão, razão pela qual o primeiro Wittgenstein tratou a lógica como completamente extensional (sintática). Mas, de fato, não importa tanto dizer se o normativo é completamente extensional ou completamente não-extensional, importa mais destacar o ponto zero dessa relação (e isso aparece em toda a sua Filosofia), que torna mesmo sem sentido a aplicação das noções em questão (intensão e extensão), neste caso, conceito e extensão de conceitos não se separam no âmbito normativo, daí também a repetida afirmação de Wittgenstein: “Em matemática, descrição e objeto são equivalentes.” (PG, II, VI, 39).

Ao mesmo tempo, podemos então dizer que, embora a impredicatividade da necessidade fosse já patente ao primeiro Wittgenstein, razão pela qual o âmbito necessário é então entendido como esvaziado de sentido, vemos agora que a impossibilidade da determinação anterior do sentido em relação à verdade, torna-se também a razão para a recusa da própria imagem atomista, o que significa reafirmar a impredicatividade na base normativa da significação sem, como isso, negar-lhe agora um sentido: onde a impredicatividade é o padrão e não a anomalia, a função lingüística é normativa, e a imagem de uma correlação entre signo e objeto é interditada tanto quanto uma determinação unívoca do sentido. Se o âmbito normativo tem um sentido, não é jamais por uma denotação independente, e que não possa ser por uma denotação independente mostra que nem sempre o sentido precisa de tal denotação. Podemos falar de enunciados que são significativos não por aquilo que representam, desde que, grosso modo, eles não podem representar nada independentemente dado, mas por aquilo que podemos fazer com eles. E, como isso, o pragmatismo semântico se segue das conseqüências retiradas de sua própria determinação *impredicativa*. Vemos, portanto, que a razão da mudança radical é ainda uma permanência de fundo na Filosofia de Wittgenstein: inicialmente o colapso entre verdade (extensão) e semântica (intensão) no âmbito normativo significou tomar este como completamente extensional, agora o mesmo colapso significa tomá-lo como completamente não-extensional. De qualquer

forma, o colapso continua sendo afirmado, e, com ele, a própria determinação interna da necessidade.

A partir dessas análises, Wittgenstein poderá sustentar que as regras gramaticais são autônomas (não correspondem a nada dado independentemente) e devem cuidar de si mesmas. Wittgenstein rompe, assim, com a sua problemática ‘necessidade lógica’ do *TLP* e a sintaxe é substituída pelas regras gramaticais, enquanto convenções que regulam o uso lingüístico e, conseqüentemente, o sentido deste uso. As regras gramaticais governam as ocorrências lingüísticas porque possuem função normativa e não por consistirem de enunciados meta-lingüísticos. O “ponto de parada das explicações” sobre a linguagem, ao qual Wittgenstein se refere de maneira recorrente então não é um fundamento fixo, mas contextual. Um enunciado qualquer é gramatical pela função que desempenha em uma prática lingüística e não pela sua forma. Assim como a *forma lógica*, a gramática é necessária, entretanto, isso não significa mais que ela seja sem sentido, mas apenas que, ela mesma, enquanto regra, não pode ser verdadeira ou falsa, mas deve ser pressuposta. Não há nada no mundo, ou onde quer que seja, capaz de determinar a aplicabilidade das regras gramaticais, pois o que quer que fosse utilizado para cumprir este papel ou já suporia as regras em questão para ser determinado e apreendido como tal, ou não seria simplesmente capaz de cumprir sua função, dada a relação contingente que sua determinação independente exigiria que isto mantivesse com a regra em questão. Isso significa que as regras constituem um âmbito fulcral, internamente determinado, que não pode ser ulteriormente explicado: as possíveis aplicações de uma regra lhe são internas, ou, como também afirmou Wittgenstein em relação à matemática, as construções aritméticas garantem sua própria aplicabilidade (*PR*, X, 111).

De modo geral, do ponto de vista da filosofia do segundo Wittgenstein, toda regra possui um domínio de aplicações que lhe é intrínseco. Que as regras sejam ditas elas mesmas arbitrárias e contextuais ressalta a impossibilidade de tratarmos as regras pelo modelo das determinações empíricas, externamente e contingentemente determinadas. É porque as regras são internamente determinadas e necessárias que não pode haver nada independentemente determinado das próprias regras, as justificando ou a que elas correspondam.

Enfatizar então, como faz Wittgenstein, que existe uma relação interna entre uma regra e suas aplicações significa justamente salientar o caráter impredicativo e injustificável das regras. Na medida em que haver uma relação interna entre regras e

aplicações significa que o domínio de possíveis aplicações de uma regra não é determinado independentemente do conteúdo da regra, as regras são definidas pela própria impredicatividade: são exatamente determinações que não possuem um domínio determinado independentemente de seu próprio conteúdo.

Tal como avaliamos, a relação que há entre uma regra e suas aplicações possíveis corresponde então justamente à definição que Russell fornece, no *PM*, como vimos no Capítulo I, para as relações impredicativas. O domínio de aplicabilidade de uma regra não independe de seu conteúdo. Isso é também o que afirma Medina⁷:

De acordo com Wittgenstein, não existem regras ociosas, regras sem aplicações. Nesta visão, uma regra e suas aplicações não são elementos separados que pode ser estabelecidos independentemente: **o domínio de aplicações possíveis de uma regra é constitutivo da regra**. Isso é o que Wittgenstein constantemente enfatiza por dizer que existe uma relação interna entre uma regra e suas aplicações. (Medina, 2002, p. 101)

Podemos ressaltar assim em que medida ser uma relação interna significa ser uma relação *impredicativa*.

The same point is contained in the question: What is the difference between a portrait and a picture? What makes this picture a portrait of Mr. Smith? Is it similarity to Mr. Smith? No The criterion of a portrait is not similarity because there are bad portraits and good. In a portrait we pre-suppose a particular kind of similarity; what makes a portrait a portrait is the intention. How can you explain the intention? Whatever one could add to the portrait could never make the intention clear, because some further interpretations could still be asked for. The rule projection is expressed in projecting, the intention in intending. **The internal relation is only there if both things related are there**. You cannot anticipate the result which you project. (AWL, pp. 31-32, grifo nosso)

A relação com a *impredicatividade* aqui é um ganho explicativo no que se refere à obscura de noção de ‘relação interna’ na segunda fase da Filosofia de Wittgenstein e, a partir disso, é também uma chave de leitura importante para sua recusa ao realismo matemático, como abordaremos no item seguinte, e sua noção de demonstração matemática. Citando Medina novamente:

⁷ Medina (2002) situa a unidade do pensamento de Wittgenstein também na sua abordagem da necessidade, particularmente na sua preocupação com a confusão entre o âmbito necessário e o âmbito contingente da linguagem. O problema seria sempre a necessidade concebida como constringendo a linguagem de fora, e, portanto, a necessidade concebida como um fato. Realmente, esta crítica perpassa ambas as fases do pensamento de Wittgenstein e está diretamente ligada à sua crítica à filosofia tradicional (e com sua concepção acerca da tarefa e da natureza da filosofia). Medina, portanto, analisa, em acordo com nossa leitura, a unidade metodológica como condicionada pela unidade temática da obra de Wittgenstein, mas não resalta a questão da determinação interna e da estrutura *impredicativa* derivada desta abordagem como inerente, em ambas as fases, à unidade considerada.

Chamar a relação entre regras e aplicações interna sublinha dois aspectos dessa relação. Primeiro, ressalta que a relação entre regra e aplicação é constitutiva de seus termos, que estes não seriam o que são sem ela: essa regra não seria a regra que é se não tivesse as aplicações que tem, nem a aplicação seria a aplicação que é se não tivesse em acordo com a regra. Segundo, ressalta que a relação entre regra e aplicação é não-mediada, nenhum intermediário pode ser colocado entre seus termos para mantê-los: não existe nada que interponha entre a expressão (x/x elevado a 2) e suas aplicações a números. (Medina, 2002, p.102)

Ora, dizer que não existe nada que *se interponha* significa também dizer que não existe nada capaz de justificar a regra, que não apenas a regra não pode corresponder à realidade, como também, não pode haver nenhuma meta-regra. Pois, se este fosse o caso, com a regra separada de suas aplicações, um intransponível abismo seria introduzido (PR, XIV, 164). É por isso que exigir que as regras fossem justificadas para que fossem necessárias, como o faz Kripke, na sua famosa interpretação cética de Wittgenstein, consiste em um mal entendimento do funcionamento da necessidade: exatamente porque o âmbito necessário possui sempre uma estrutura *impredicativa*, ele não é jamais passível de explicações adicionais, isso não é uma falha ou ameaça à necessidade, é a sua constituição. Qualquer suposta explicação da necessidade supõe o que está em questão e não é, assim, jamais uma explicação.

3.3. A matemática pode cuidar de si mesma

O ponto central para entender a concepção de prova matemática em Wittgenstein parte de uma compreensão anterior da sua distinção entre um âmbito normativo e um âmbito empírico da linguagem. Como, para Wittgenstein, a matemática seria um âmbito completamente normativo, as demonstrações matemáticas não poderiam ser pensadas sob o ponto de vista de uma justificação externa ao que é provado. Isso se justifica porque uma característica central do âmbito normativo da linguagem, como já notamos, na filosofia de Wittgenstein, consiste justamente em não poder se referir a algo independentemente existente, isto é, não poder ser descritivo. Tal característica segue-se do próprio caráter necessário do âmbito normativo, isto é, as normas gramaticais só poderiam dizer respeito a um âmbito não-descritivo, relativo à determinação do significado, pois, para que uma proposição pudesse ser descritiva de uma realidade, deveria ser possível determinar sobre o que tal proposição fala independentemente da sua verdade, o que é um requisito da possibilidade de verificação empírica. Mas, se esse

fosse caso, a proposição já não seria necessária. A independência entre o objeto da proposição e a própria proposição nos forneceria um critério de avaliação da verdade ou falsidade. Por outro lado, no caso de uma proposição necessária, não podemos contar com tal critério porque, tal como argumenta Wittgenstein, o que quer que fosse usado para tanto, já suporia a própria proposição em questão.

If I could describe the point of grammatical conventions by saying they are made necessary by certain properties of the colours 'say', then that would make the conventions superfluous, since in that case I would be able to say precisely that which the conventions exclude my saying. Conversely, if the conventions were necessary, i.e. if certain combinations of words had to be excluded as nonsense then for that very reason I cannot cite a property of colours that makes the conventions necessary, since it would then be conceivable that colours should not have this property, and I could only express that by violating the conventions. (...) (*PR*, I, 4)

I do not call a rule of representation a convention if it can be justified in propositions: propositions describing what is represented and showing that the representation is adequate. Grammatical conventions cannot be justified by describing what is represented. Any such description already presupposes the grammatical rules. That is to say, if anything is to count as nonsense in the grammar which is to be justified, then it cannot at the same time pass for sense in the grammar of the propositions that justify it. (*PR*, I, 7)

Sendo assim, na medida em que a matemática seria completamente composta por proposições necessárias, a determinação da verdade de suas proposições não seria independente da determinação da semântica destas e, por isso, se vamos continuar falando em 'verdade' neste contexto será somente em um sentido pelo qual não apenas a demonstração determina a verdade das proposições ou fórmulas, mas determina também, e ao mesmo tempo, o significado destas. "Em matemática não existem, primeiro, proposições que têm sentido por si mesmas e, segundo, um método para determinar a verdade ou falsidade de proposições; existe apenas um método, e o que é chamado uma proposição é apenas um nome abreviado para o método." (*WVC*, I, p.33) Esta abordagem condiciona a conhecida distinção entre prova e experimento: proposições matemáticas não poderiam ser empiricamente justificadas simplesmente porque não poderiam ser justificadas por um padrão externo. "A proposição aritmética não é a proposição empírica: 'quando faço isso, obtenho aquilo' – na qual o critério para meu fazer isso não é supostamente o que resulta disso." (*RFM*, VI, 22). Ou seja, no caso de uma proposição aritmética, o critério para o procedimento é o seu resultado e, por isso, provas jamais seriam experimentos, senão por uma analogia inadequada. Descrever um experimento não é ainda um experimento, justamente porque, neste caso,

o objeto do experimento e o experimento são independentes entre si, enquanto que, por outro lado, descrever uma prova matemática com certo nível de detalhe é já produzir a prova.

(...) We might put it like this: If I am looking for something, - I mean, the North Pole, or a house in London – I can completely describe what I am looking for before I have found it (or have found that it isn't there) and either way this description will be logically acceptable. But when I'm 'looking for' something in mathematics, unless I am doing so within a system, what I am looking for cannot be describe it in every particular, I would already actually have it; and before it is completely described I can't be sure whether what I looking for is logically acceptable, and therefore describable at all. That is to say, the incomplete description leaves out just what is necessary for something to be capable of being looked for at all. So it is only an apparent description of what is being 'looked for' (...) (*PG*, II, V, 22)

Sendo uma proposição empírica, e.g.: 'quando corremos, nossa pressão sanguínea aumenta', precisamos possuir um outro critério que não ter corrido para saber que a pressão aumentou, só assim podemos verificar que quando alguém corre, sua pressão aumenta. Devemos poder determinar independentemente de alguém ter corrido, que sua pressão aumentou, medindo-a com aparelhos apropriados. Mas se o condicional em questão fosse uma proposição normativa, não poderia ser assim porque qualquer critério para o antecedente incluiria o conseqüente e vice-versa. Tomemos uma proposição matemática simples, como ' $449 + 1 = 450$ ', essa proposição é uma regra, o que significa: apenas quando o resultado é 450, aplicamos +1 a 449. Nesse caso, o critério para ter efetuado a operação é o seu resultado:

Agora alguém diz que na série dos números cardinais que obedecem a regra + 1, a técnica nos ensina que de tal e tal modo, 450 sucede 449. Não é uma proposição empírica que passamos de 449 para 450 quando aplicamos a operação '+1' a 449. É antes uma estipulação que apenas quando o resultado é 450 aplicamos esta operação. (*RFM*, VI, 22).

Uma proposição matemática é sempre em uma regra, e, portanto, não é jamais uma hipótese que pode ser testada por um experimento, mas enquanto proposição matemática é um paradigma pelo qual a experiência é comparada e julgada. “‘É uma propriedade desse número que esse processo leva a ele’ – Mas, matematicamente falando, um processo não leva a ele, ele é o fim de um processo (e é ele mesmo parte do processo).” (*RFM*, I, 84) Resultado e procedimento são indissociáveis quando a determinação é uma norma, isto é, não podemos ter o procedimento com outro resultado, se temos outro resultado, simplesmente não executamos o procedimento. O

problema central da abordagem realista da matemática consistiria, assim, em tratar as normas pelo modelo de uma determinação empírica, isto é, uma determinação externa, tratando as proposições em questão como proposições contingentes, às quais faria sentido atribuírmos verdade ou falsidade, desde que, no modelo da correspondência a um padrão independentemente existente, deveria ser possível identificarmos aquilo que determina a semântica da proposição sem já pressupormos a sua verdade, que é justamente o que torna seu oposto também possível. “Devemos reconhecer a regra $25^2 = 625$, se não chegamos a este resultado? Bem, então por que não devemos ser capazes de fazer uso da proposição empírica ao invés da regra? – A resposta é esta: porque o contrário de uma proposição empírica não corresponde ao contrário da regra.” (RFM, VI, 26) Vemos assim que é na identificação de uma assimetria da negação relativa ao funcionamento das proposições necessárias que Wittgenstein localiza ao mesmo tempo a razão da impossibilidade de justificação independente das proposições normativas e a recusa, portanto, de uma abordagem realistas destas. Como em relação às proposições matemáticas o oposto não é jamais possível, elas são regras e não descrições.

É fato, entretanto, que, pelo menos durante o período intermediário, Wittgenstein trabalha claramente com a idéia de *sistemas matemáticos*. Tal noção lhe permite afirmar que a intervenção de uma proposição matemática em um sistema de proposições formalmente similares, permitiria também determinar um padrão de prova para as proposições, garantindo, com isso, o que ele chama *o seu controle*. Tal controle possibilita que as proposições, pelo menos as decidíveis, tenham sentido independentemente de sua verdade e que, portanto, saibamos pelo que procurar quando tentamos provar ou refutar a proposição em questão. A noção de sistema matemático permite a Wittgenstein dizer isso para as proposições decidíveis, isto é, para aquelas em relação às quais dispomos de um método de decisão.

(...) In order to understand of $25 \times 25 = 625$ I may ask: how is this proposition proved? But I can't ask how its contradictory is or would be proved, because it makes no sense to speak of a proof of the contradictory of $25 \times 25 = 625$. So if I want to raise a question which won't depend on the truth of the proposition, I have to speak of *checking* its truth, not of proving or disproving it. The method of checking corresponds to what one may call the sense of the mathematical proposition. The description of this method is a general one and brings in a system of propositions, for instance of propositions of the form $a \times b = c$. (PG, II, V, 23)

De maneira nenhuma, entretanto, isso poderia significar que a proposição fosse verdadeira *em princípio*. A idéia de uma determinação ‘em princípio’ para a matemática é rejeitada inúmeras vezes por Wittgenstein, já no período intermediário. Mesmo a noção de ‘sistema’ não autoriza a distinção entre *em princípio* e *factual* na matemática, pois o sentido que ele fornece às proposições não poderia ser entendido jamais como ‘a possibilidade em princípio’ da verdade destas.

We have a feeling: There can't be possibility and actuality in mathematics. It's all on one level. And is in certain sense, actual. – And that is correct. For mathematics is a calculus; and the calculus does not say of any sign that it is merely possible, but is concerned only with the signs with which it actually operates. (Compare the foundations of set theory with the assumption of a possible calculus with infinite signs). (*PG*, II, VII, 40)

A idéia de ‘sistema matemático’ não autoriza a analogia entre uma proposição matemática e uma proposição empírica, por isso o próprio sentido matemático é já aqui a técnica de cálculo, e é indissociável da determinação da verdade das proposições particulares para as quais serve como controle. A descoberta de um novo método de prova, por exemplo, mudaria, para Wittgenstein, a gramática da proposição matemática, pois que uma sentença se tornasse decidível constituiria não apenas uma mudança em seu valor de verdade, mas, ao mesmo tempo, em seu estatuto. Podemos dizer que, em relação às normas, a semântica e a determinação da verdade não são jamais independentes, pois o oposto de uma proposição matemática (normativa) não é jamais possível. O problema é que, dado que as proposições matemáticas são necessárias, se o sentido das proposições para as quais possuímos um método de prova é já determinado antes de efetivarmos a prova, isso parece significar que também seu o valor de verdade o é, mas apenas *em princípio*, ainda que factualmente não o saibamos. E essa é, de fato, precisamente a conclusão que Wittgenstein deseja recusar. Para ele, essa conclusão é tão nociva do ponto de vista da prosa filosófica sobre que o cálculo, que será preferível dizer, como encontramos explicitamente nos *RFM*, que a proposição não provada não é sequer ainda uma proposição matemática.

A conjectura não provada não tem papel normativo, por isso o seu sentido muda, porque muda seu emprego, ela passa a ser usada como padrão, em alguma medida, só agora ela se torna uma proposição matemática, porque só agora se torna necessária. (...) Eu gostaria de dizer: a prova muda a gramática de nossa linguagem, muda nossos conceitos. Ela faz novas conexões e cria os conceitos dessas conexões. (Ela não mantém que eles existem, eles não existem sem que ela os faça). (*RFM*, II, 41)

Aceitar a distinção entre *factual* e *em princípio* na matemática, para Wittgenstein, é já tratar a proposição matemática como contingente. O argumento é o mesmo que interdita o realismo. Uma prova matemática não procederia de acordo com um significado já dado *em princípio*, justamente porque não podemos entendê-la como sendo justificada tendo por base conceitos independentes desta. Como o significado da proposição matemática não é independente da sua prova, este significado não pode ser entendido jamais como justificando a prova. É justamente porque o oposto da proposição normativa é impossível, que ela não é justificável, e precisamos desse sistema geral de proposições formais, ele mesmo não independente dos casos particulares que regula⁸, para o controle da proposição matemática: sua verdade não é determinada jamais por uma falsidade também possível. Se a posição geral de Wittgenstein sobre as proposições matemáticas se radicalizou do período intermediário para o período das *RFM*, não foi tanto por este ponto⁹, pois, a distinção entre *o factual* e *o em princípio* no âmbito matemático é recusada desde sempre. A idéia de ‘sistema matemático’ permitia, no caso dos decidíveis, um sentido anterior à verdade, mas não poderia, ainda assim, autorizar jamais o tratamento de uma proposição matemática como uma proposição empírica.

We must first ask ourselves: is the mathematical proposition proved? If so, how? For the proof is part of the grammar of the proposition! – The fact that this is so often not understood arises from our thinking once again along the lines of a misleading analogy. As usual on these cases, it is an analogy from our thinking in natural sciences. We say, for example, “this man died two hours ago” and if someone asks us “how can you tell that?” we can give a series of indications (symptoms). But we also leave open the possibility that medicine may discover hitherto unknown methods of ascertaining the time of death. That means that we can already describe such possible methods; it isn’t their description that is discovered. What is ascertained experimentally is whether the description corresponds to the facts. For example, I may say: one method consists in discovering the quantity of

⁸ Este é um outro passo, independente, da nossa argumentação geral, ele é tratado particularmente nas considerações de Wittgenstein sobre a generalidade matemática, na *Gramática Filosófica* (*PG*, II, II); e nas suas análises sobre a indução matemática (*PG*, II, VI). Retornaremos a ele no último item deste capítulo.

⁹ Quando e até que ponto Wittgenstein radicaliza sua posição não é totalmente claro. É ainda controverso se, nas *RFM*, Wittgenstein abandona completamente a idéia de um sistema de cálculo determinando o sentido das proposições matemáticas. É fato que, ainda que menos freqüentemente, a noção de sistema de cálculo aparece explicitamente nas *RFM* (inclusive sistemas com ‘diferentes geometrias’, como ele costumava dizer no período intermediário, o que parece indicar que ele mantém a analogia com o espaço de condições). Por exemplo: “A prova de uma proposição certamente não menciona, certamente não descreve, todo o sistema de cálculo que está por trás da proposição e fornece seu sentido.” (*RFM*, VI, 11) Além disso, há também expressamente nas *RFM* a idéia pela qual uma questão matemática muda de *status* quando se torna decidível (*Cf.*, *e.g.*, *RFM*, V, 9). De qualquer forma, o que importa para o ponto que pretendemos ressaltar aqui é que, no geral, não podemos ter, para Wittgenstein, uma proposição que seja matemática e contingente, e que, com isso, o filósofo termina por concluir que, em relação às proposições matemáticas, estritamente falando, não podemos coerentemente nos comprometer com nenhuma noção de ‘determinação *em princípio*’.

hemoglobin in the blood, because this diminishes according to such and such a law in proportion to the time after death. Of course that isn't correct, but if it were correct, nothing in my imaginary description would change. If you call the medical discovery "the discovery of a proof that the man died two hours ago" you must go on to say that this discovery does not change anything in the grammar of the proposition "the man died two hours ago". The discovery is the discovery that a particular hypothesis is true (or: agrees with the facts). We are so accustomed to these ways of thinking, that we take discovery of a proof in mathematics, sight unseen, as being the same or similar. We are wrong to do so because, to put it concisely, the mathematical proof couldn't be described before it is discovered. (*PG*, II, V, 24)

Michael Dummett (1959) leu as observações de Wittgenstein sobre a matemática como um convencionalismo radical, de acordo com o qual não haveria qualquer determinação para a necessidade matemática, além de nossa livre escolha em aceitar cada passo de uma demonstração como se estabelecendo por livre convenção. De acordo com Dummett, para Wittgenstein, haveria um *gap* entre nosso assentimento às regras de inferência e nosso reconhecimento de cada aplicação destas como uma aplicação correta, afinal, argumenta Dummett, Wittgenstein mantém que não haveria nada em nossas formulações das regras, nem em nossa mente, nem em qualquer realidade abstrata, que nos compelsse a aceitar as transições feitas a cada passo de uma prova, determinando as aplicações que fazemos de nossas regras. Para Dummett, ao contrário, precisaríamos garantir que, 'uma vez que estabelecemos determinadas construções', não estamos mais livres para decidir a necessidade do que destas se segue, o que não seria, ainda segundo ele, garantido pela abordagem de Wittgenstein.

Nunca uma interpretação aparentemente absurda foi tão literal, pois, de fato, é Wittgenstein mesmo quem o diz, mais de uma vez: procedemos em uma demonstração livremente, tomamos decisões. "Estou tentando dizer algo como: mesmo se a proposição matemática parece apontar para a realidade fora dela, ela é ainda apenas a expressão da aceitação de uma nova medida da realidade. (...) Por que não devo dizer: na prova, tomamos uma decisão?" (*RFM*, II, 27) Ora, muitas são as razões para não se dizer isso. Crispin Wright (1980), por exemplo, considera este problema a partir da já mencionada suposta modificação/criação conceitual operada pela prova. Se tomarmos que qualquer prova aceitável de um enunciado deve estar de acordo com o sentido do enunciado, tal como compreendido antes da prova, a aceitação da prova é obrigatória para qualquer um que entendeu este enunciado. Por outro lado, se o sentido é modificado enquanto resultado da prova, o que exatamente poderia compelir a sua aceitação? Parece que apenas seríamos livres para recusar ou aceitar uma prova (ou cada passo seu) exatamente porque ela não se estabeleceria em virtude de um

significado previamente dado ou aceito, mas determinaria, ela mesma, o conceito em questão. E, novamente, a identificação do problema é bem justificada textualmente:

O que então faz o matemático apenas seguir por estas regras? – Ele forma mesmo novas regras: está sempre construindo novas estradas para o tráfico; por estender as antigas. Mas não é necessário uma sanção para isso? Ele pode estender a rede arbitrariamente? Bem, eu poderia dizer que um matemático está sempre inventando novas formas de descrição, algumas estipuladas por necessidades práticas, outras por necessidades estéticas, e ainda outras por uma variedade de modos. (...) O matemático é um inventor, não um descobridor. (*RFM*, I, 165-67)

O cerne do problema que se apresenta para as considerações de Wittgenstein sobre as demonstrações matemáticas diz respeito, portanto, à concepção de acordo com a qual as provas matemáticas determinariam ou modificariam o significado dos conceitos envolvidos na proposição provada. A idéia intuitiva envolvida nesta concepção é, como vimos, justamente uma contraposição à tese realista segundo a qual a prova procederia de acordo com um significado já dado, e que a correteza da prova, portanto, seria justificada tendo por base conceitos independentes desta. O argumento consiste em notar que, como o significado em questão não é independente da prova, este não pode ser entendido jamais como a justificando, e, assim, seria mais adequado, para não tratar a prova como independente, novamente por analogia a um experimento de verificação, dizer que a própria prova cria o conceito em questão. Mas embora a crítica que interdita a consideração da prova como um experimento de justificação seja pertinente, o problema de considerar a prova como constituindo os conceitos envolvidos nela aparece imediatamente, afinal, uma prova parece ser válida justamente em virtude da sua fidelidade ao conteúdo da proposição provada. Então, se é assim, como ela poderia ser necessária e, ainda assim, criar ou modificar este conteúdo? Parece óbvio que não somos livres para recusar ou aceitar a prova, pois cada passo seu se impõe com necessidade, ao que parece, em virtude mesmo das noções ali envolvidas. Além disso, se a proposição apenas recebesse seu sentido ao ser provada, como entenderíamos e tentaríamos provar/refutar conjecturas ainda não provadas/refutadas? Wittgenstein esteve certamente consciente dessas objeções, mas parece não tê-las levado tão a sério quanto seus comentadores mais tarde o fizeram.

Agora o que dizer sobre isso – devo dizer que o mesmo sentido pode ter apenas uma prova? Ou que quando a prova é encontrada o sentido se altera? Claro, alguém se oporia a isso e diria: ‘então a prova de uma proposição não pode ser jamais encontrada, pois se ela

fosse encontrada, não seria mais a prova dessa proposição.’ Mas dizer isso não é dizer nada de todo. (*RFM*, V, 7)

A razão pela qual ele afirma tão rapidamente e sem maiores justificativas que um problema já tão longamente debatido na sua bibliografia secundária ‘não significa nada de todo’ é um ponto que certamente vale a pena investigar.

3.4. A recusa a toda distinção entre *atual* e *em princípio* no âmbito normativo

A distinção forte entre normativo e empírico, proposta na Filosofia de Wittgenstein não implica apenas uma crítica ao realismo matemático, mas implica também uma recusa a toda distinção entre possibilidades factuais e possibilidades ‘em princípio’, dentro do âmbito normativo, e, portanto, dentro da matemática. Tal interdição é, de fato, a mesma que interdita a própria noção de meta-matemática na filosofia *pós-tractatiana* de Wittgenstein: se não há uma noção de ‘em princípio’ adicional no âmbito da matemática, então também não há também a possibilidade de garantia adicional, seja de que natureza for, para a prática matemática. A idéia de ‘em princípio’, para Wittgenstein, nada mais poderia ser que um resultado da própria idéia de uma determinação normativa, que ultrapassa o factual no sentido em que ultrapassa o empírico. É por isso que não faz sentido, para ele, dentro da própria matemática, introduzir novamente uma distinção entre ‘factual’ e ‘em princípio’. Como aparece já nas *Philosophical Remarks*, todo ‘em princípio’ da nossa prática matemática diria respeito já ao atual, na medida mesma em que todo possível seria já necessário:

The negation of ‘It is necessary that p holds for all numbers’ is of course ‘It is not necessary that....’ It is necessary that not...’ But now we think: if it isn’t *necessary* that p holds for all numbers, it’s surely still possible. But this is where the fallacy lies, since we don’t see that we’ve slipped into the extensional way of looking at things: the propositions ‘it’s possible – though not necessary – that p should hold for all numbers is nonsense. (*PR*, XIII, 154)

Tal abordagem surge dentro do pensamento do filósofo associada a sua crítica geral a qualquer noção de ‘justificação’ aplicada à prática normativa, e acarreta o colapso entre atualidade e possibilidade no contexto matemático.

O que prova realmente uma prova matemática: prova que a proposição p pode ser provada ou prova a própria proposição p ? (Pode-se estar tentado a dizer que apenas a primeira fosse assunto da matemática.) Russell não poderia dizer no fim de toda prova:

‘esta e esta proposição podem ser provadas’? (...) E será então que eu deveria também dizer que a prova matemática prova duas proposições matemáticas de um só golpe: a proposição provada e a que ela poderia ser provada? (*RFM*, V, 16)

Esta talvez seja a distinção central entre a abordagem de Wittgenstein e a do *intuicionismo* matemático contemporâneo. Dummett, como se sabe, foi inegavelmente influenciado por esta análise *wittgensteiniana*. Seu projeto de fundamentação da lógica intuicionista parte da abordagem de Wittgenstein para recusar o mentalismo de Brower, visando uma abordagem lingüística das nossas construções matemáticas. Seguindo em grande medida Wittgenstein, Dummett observa que se a consideração de condições de verdade entrasse na abordagem da determinação semântica de nossas proposições normativas, nos comprometeríamos com uma noção de ‘verdade’ inefável, isto é, uma verdade não avaliável, posto que tais condições não poderiam ser entendidas como passíveis de identificação independente.

Importa-nos aqui ressaltar que a própria crítica que Dummett faz ao realismo passa pelo mesmo princípio que impede a distinção entre em princípio e factual no âmbito normativo/necessária (da determinação do significado). O caráter inefável que Dummett atribui à noção de verdade realista, ainda que não claramente formulado desta forma, na medida em que faz uso de uma versão do argumento da linguagem privada de Wittgenstein, se segue justamente de pretendermos separar neste âmbito verdade e semântica, o que geraria o caráter inefável. De acordo com Dummett, do ponto de vista realista, precisamos supor uma verdade inefável, que não possa ser adicionalmente avaliada, para determinar o significado, desde que, se esta pudesse ser avaliada, suporia já, circularmente, o próprio significado determinado.

(...) toda explicação de ‘verdade’, em seu único sentido inteligível, é dado pelo princípio de que ‘A’ é equivalente a ‘é verdade que A’, ou por uma definição que é apenas suficiente para produzir esta equivalência para cada caso; o uso, ou significado, de uma asserção de que uma sentença é verdadeira será então precisamente o mesmo que o do proferimento desta sentença, e a noção de verdade será impotente para produzir qualquer resultado sobre o significado (...). Se a equivalência “‘a neve é branca’ é verdadeira” como ‘a neve é branca’ e assim por diante, constitui toda explicação do conceito de verdade, então o conceito é inútil para fornecer uma teoria do significado. (...) Essa circularidade [que apareceria na tentativa de estabelecer as condições de verdade das sentenças] então nos leva a atribuir ao falante a capacidade para a reconhecimento imediata de certas qualidades, objetos, processos, ou estados (a definição ostensiva privada), capacidade esta que não pode ser adicionalmente explicada. (Dummett, 1979, pp.107-113)

Não podemos supor o significado sempre determinado por algo externo. Isto se segue de não podermos determinar ou avaliar a verdade de uma proposição sem supor a sua semântica já determinada. Mas se tampouco poderíamos determinar a semântica de um proferimento qualquer sem supor a determinação da sua verdade já dada, isto aponta para o caráter necessário da própria determinação semântica, que não poderia ser, ela mesma, avaliada como verdadeira ou falsa. Isto parece apontar para a necessidade de um âmbito onde verdade e semântica colapsam, isto é, onde o sentido de algo já o supõe como certo, e onde não há espaço para verificações adicionais. Este seria o âmbito normativo. A suposição de um elemento inefável, presente nas abordagens realistas do significado, tal como analisamos, cumpre justamente esta função – ser um âmbito tomado como certo, onde colapsam verdade e semântica. É este papel que cumpre as próprias condições de verdade do realista: nelas colapsam verdade e semântica, elas precisam ser determinadas sem uma regra externa de avaliação. O realismo, assim, conduziria à suposição de condições de verdade inefáveis, que não têm elas mesmas condições de verdade adicionais, sendo, portanto, responsáveis pela determinação do sentido e sem sentido. O suposto reino independente dos sentidos realista precisa ser determinado juntamente com sua verdade, não havendo a possibilidade de falsidade neste caso, e isto é que significa dizer que estamos lidando aqui com uma verdade inefável, que seria verdadeira sem nenhum critério de avaliação. Precisamos de condições de verdade *inefáveis* para justificar o significado, e isto significa dizer que precisamos de condições de verdade onde colapsam verdade e semântica. O exemplo mais recorrente de apelo a este recurso é o que encontramos na suposição, pelo mentalismo, de um acesso privado imediato (ou inato) da mente ao suposto reino independente do sentido. O significado de nossos estados mentais seria introduzido juntamente com a verdade destes, isto é, não haveria espaço para falsidade nestes casos, e, portanto, estaríamos lidando com uma noção de verdade inefável, que não poderia ser falsa, e que seria verdadeira sem nenhum critério de avaliação. Nossas afirmações privadas não poderiam jamais estar erradas, não havendo, portanto, nenhum padrão externo regulativo do uso, e, por isso, elas também não poderiam estar certas. Entretanto, este âmbito *inefável* é ainda pensado pelo modelo daquilo que faz sentido duvidar, ou seja, ele é pensado ainda como portador de verdade ou falsidade, isto é, como fazendo sentido dizer deste âmbito que ele é verdadeiro, e é esta concepção que conduziria à principal confusão porque, se este fosse o caso, tal âmbito deveria supor, como já notamos, a semântica já determinada anteriormente – desde que toda atribuição

de verdade supõe a semântica dada – e isso significaria que a determinação da semântica já suporia a determinação da verdade, mas, se assim não é, isso significa que este âmbito, onde colapsam verdade e semântica, deveria ser entendido apenas como já constitutivo do significado. Dito de outro modo: o âmbito onde colapsam verdade e semântica, as próprias condições de verdade no modelo realista, continuam sendo pensadas como externas à semântica, isto é, pelo modelo da determinação externa, como uma realidade dada, determinada independentemente do significado (e, portanto, podendo determiná-lo). O realismo aceita então a necessária verdade do âmbito fulcral, mas ainda assim toma tal âmbito como externo à semântica. O que ocorre então, como já notamos, é se tomar a verdade como entendida “tacitamente”, isto é, de algum modo independente do significado: “Esta última alternativa [a de Frege] conta como uma consideração do significado em termos de condições de verdade depende de um tácito entendimento da verdade.” (Prawitz, 2006, p.507) Sumariamente, pretende-se separar, dentro do âmbito normativo, verdade e semântica, avaliando adicionalmente a primeira, mas perde-se com isso necessariamente o critério independente da verdade, logo, esta última torna-se inefável. A verdade que garantiria a determinação semântica, do ponto de vista clássico, deveria ser completamente independente de qualquer avaliação, e não envolveria a noção de ‘reconhecimento da verdade’, devendo estar, assim, completamente determinada ainda que não sejamos capazes de avaliá-la. As condições para se afirmar uma sentença seriam completamente diversas e independentes das suas condições de verdade.

Toda estratégia construtivista vem então, em um primeiro momento, na direção de afastar a questão da determinação da verdade da questão da determinação do significado, na medida em que esta última é aproximada do uso. Afinal, como as condições *inefáveis* são supostas determinadas sem avaliação adicional externa, o uso da linguagem é também colocado para fora junto com a suposta externalidade ao significado. Com isso, a determinação e o reconhecimento dessas condições na nossa prática lingüística não parece mais entrar em jogo – a prática lingüística é colocada para fora juntamente com a suposição da inefabilidade do modelo realista –, temos regras agora que não se relacionam mais com seu uso. O problema da crença realista na existência de uma realidade de universais independentes da nossa capacidade para reconhecê-los aparece então como o problema do que permite o acesso a esta suposta realidade independente. Como então estas condições inefáveis se relacionam com o uso da linguagem, já que são, por princípio, independentes deste? A crítica construtivista ao

realismo do significado pode ser entendida então como tendo por alvo primeiro este ‘tácito’ e obscuro pressuposto entendimento da verdade pelas teorias clássicas do significado. A abordagem primeira proposta pelo projeto de elaboração de uma semântica construtiva procurou então inicialmente banir toda consideração da verdade do tratamento da semântica. Todo o recurso à noção de ‘prova’, pelo projeto construtivo, seria no sentido de buscar algo que evitasse esse caráter inefável então identificado por Dummett, seguindo Wittgenstein, na abordagem realista. Na medida mesma em que a abordagem construtiva do significado substitui as condições de verdade pelas condições de assertabilidade, enquanto responsáveis pela determinação semântica, substitui também, na teoria semântica, a noção de verdade de um enunciado pela noção de demonstração deste. O intuicionismo prescindiria de uma noção independente de ‘verdade de uma asserção’. Fundamentalmente, recusar condições de verdade dadas independentemente significaria recusar tratar as proposições matemáticas como passíveis de justificação pelo modelo experimental. A noção de ‘verdade’ deveria, portanto, ser banida da abordagem das proposições matemáticas, no lugar dela deveria ser colocada a noção de ‘prova’. Dito de outro modo, no que diz respeito às proposições matemáticas, o modelo da determinação por meio de supostos correspondentes independentes seria substituído pela especificação de circunstâncias nas quais as asserções seriam legítimas.

Entretanto, o projeto contemporâneo de elaboração de uma semântica construtiva, tal como avançado por Dummett e Prawitz a partir da década de 70, faz apelo já inicialmente à distinção entre princípios de inferência tomados como constitutivos do sentido, e princípios de inferência tomados como fundados em um significado já dado; e, portanto, à distinção entre *justificação factual* e *justificação em princípio*. Introduz-se assim a possibilidade de que, mesmo no âmbito matemático (necessário), o que é verificado já seja determinado independentemente da verificação, distinguindo-se rigidamente entre verificações constitutivas do sentido e verificações meramente avaliativas da verdade de um enunciado já significativo. Tal distinção, como se sabe, é garantida pela distinção entre provas canônicas – diretas – e provas não canônicas – indiretas, sendo as primeiras obtidas de acordo com o modelo das regras de introdução de Gentzen para os operadores lógicos em dedução natural. As regras de introdução seriam responsáveis pelo fornecimento de uma forma geral de provas para um enunciado qualquer, e, com isso, pelo critério de determinação da semântica dos enunciados. Isso implica assumir que faz sentido justificar regras, não por definições

semânticas baseadas em condições de verdade, como no enfoque realista, mas por uma distinta, tomada como mais básica, classe de regras: as regras de introdução. A idéia de uma justificação das demais regras pelas regras de introdução, na abordagem construtiva, suporia que estas últimas seriam as responsáveis pela determinação do conteúdo semântico, e seria com base neste conteúdo que as demais regras, apenas aplicativas de tais conteúdos, seriam justificadas. As provas canônicas deveriam estabelecer o que *contaria em princípio* como verificando uma determinada asserção, sem que, para tanto, tivéssemos que ter já a proposição provada atualmente. Assim, uma determinada asserção poderia ter sentido antes de ser verificada, e, com base na verificação canônica, poderíamos mesmo reconhecer as provas indiretas como provas do que elas provam.

O construtivismo semântico contemporâneo estabelece assim uma possibilidade de avaliação do próprio âmbito necessário da linguagem, determinando um limite para as conexões conceituais normativas e delimitando, no interior da matemática, um âmbito privilegiado que serviria de critério para a avaliação das demais conexões necessárias, isto é, delimitando um âmbito que julgaria a própria necessidade, permitindo, entre outras coisas, o próprio revisionismo da lógica clássica pela lógica intuicionista.

As razões para a introdução desta separação entre (i) regras constitutivas, em princípio, do significado; e (ii) regras meramente avaliativas, e para que as segundas prestem contas às primeiras, não são poucas. Tal separação permite que o construtivismo contemporâneo responda problemas tradicionais que se colocam para o anti-realismo, evitando que a própria determinação semântica seja tomada como uma contingência factual, e, com isso, evitando também incorrer exatamente nos problemas que Dummett identifica na sua interpretação da proposta de Wittgenstein, de acordo com a qual a aplicação de nossas regras estaria sempre em perigo, e deveríamos mesmo ‘decidir’, ao final de uma prova, se um dado teorema é ou não teorema. Se como notamos, para Dummett precisaríamos garantir que, ‘uma vez que estabelecemos determinadas construções’, não estamos mais livres para decidir a necessidade do que destas se segue, só poderíamos fazer isso estabelecendo um âmbito de regras privilegiadas, responsáveis pela possibilidade do próprio revisionismo da prática matemática, na medida em que responsáveis pela justificação da validade dos princípios lógicos.

O princípio central envolvido nesta justificação seria o chamado *Princípio de Harmonia*, de acordo com o qual não podemos retirar mais informações de uma determinada asserção do que aquelas que estão presentes nas condições para afirmá-la. Trata-se, portanto, de garantir a harmonia entre as condições para asserir e as conseqüências que podem ser retiradas de uma sentença qualquer, que corresponderiam, respectivamente, às regras de introdução e eliminação, nos sistemas de dedução natural. Dada uma sentença qualquer poderia ser afirmada ou (1) diretamente, com base nas condições nas quais pode ser afirmada, o que corresponderia às regras de introdução, constitutivas do significado da regra e responsáveis pelas provas canônicas dos enunciados; ou (2) indiretamente, como uma conseqüência de outras sentenças, o que corresponderia às regras de eliminação. O que se exige então é uma harmonia entre estes dois modos, de maneira que (2) não permita jamais afirmar nada além do que (1) permite.

Uma objeção sumária a esta suposta justificação de regras por outras regras mais fundamentais, no projeto intuicionista, que se coaduna com a conclusão geral do presente estudo, aparece justamente em Crispin Wright, quando ele discute o problema enfrentado por Wittgenstein, relativo à determinação e reconhecimento da necessidade matemática. Diferentemente de Wittgenstein, os intuicionistas, apesar de manterem o sentido dos enunciados matemáticos como determinados por suas demonstrações, não enfrentariam o problema do reconhecimento de uma prova como a prova do enunciado que ela prova justamente porque se comprometeriam com a idéia de *justificações em princípio*, enquanto responsáveis pelo significado dos enunciados em questão. Assim, considera Wright:

Para responder a primeira questão [como reconhecer a necessidade de uma prova matemática se ela introduz o significado do que é provado?], um anti-realista pode ser tentado a utilizar algo como as explicações intuicionistas das constantes lógicas. Nós fornecemos uma explicação geral de quando uma dada inferência simples é válida baseada na recognição da principal constante lógica na sua conclusão e sobre o entendimento dos constituintes na conclusão. Admitidamente, adaptar as explicações intuicionistas a este propósito requereria que algo fosse mantido sobre sua impredicatividade; pois as idéias de uma prova de uma negação, e de um enunciado condicional são ambas explicadas por apelo a uma quantificação irrestrita sobre provas [ver Heyting, 46 pp.98-99; Dummett 30, concluding philosophical remarks, p.389]. Então é feito apelo, para compreender a noção de prova para classes particulares de enunciados a uma noção completamente irrestrita de prova supostamente já compreendida. As explicações intuicionistas são não mais que caracterizações que alguém que já entendeu a noção em questão poderia reconhecer como uma razoável reflexão deste entendimento. (Wright, 1980, p.51)

Sabemos que Dummett sustenta certa noção de circularidade, inevitável, a qual ele denomina *pragmática*, envolvida na explicação do significado de nossos operadores lógicos, e, portanto, em qualquer explicação do âmbito *em princípio* do significado. Tal circularidade, segundo Dummett, não seria ainda um problema para este âmbito justamente por seu caráter pragmático, ela poderia mesmo ser mantida quando são levantadas questões epistemológicas.¹⁰ Sendo assim, ele poderia apresentar uma resposta à objeção rapidamente mencionada por Wright. Embora seja possível questionar até que ponto esta resposta proceda, pelo menos em relação à formulação apresentada por Wright, quando a questão é justamente saber até que ponto o significado das proposições matemáticas pode *justificar* e ser ao mesmo tempo *justificado* por provas.

Em todo caso, e independentemente disso, a distinção entre ‘factual’ e ‘em princípio’ acabou possibilitando a re-introdução, no cerne do projeto construtivista, da própria noção de ‘verdade’ e, através desta, dos problemas que os construtivistas inicialmente identificaram no realismo. Porque isso ocorre é o que acreditamos que a abordagem *wittgensteiniana* da diferença entre enunciados normativos e empíricos

¹⁰ “Precisamos, portanto, investigar se uma circularidade desse tipo retira todo valor de qualquer justificação que a exhibe. Não é imediatamente óbvio que isso ocorra, pois a circularidade argumentada não é a circularidade grosseira ordinária que consiste na inclusão da conclusão a ser encontrada entre as premissas iniciais do argumento. Temos algum argumento que objetiva chegar à conclusão de que tal e tal lei lógica é válida, e o custo não é que este argumento deve incluir entre suas premissas o enunciado de que esta lei lógica é válida, mas apenas que ao menos um dos passos inferenciais no argumento deve estar de acordo com a lei. Podemos chamar isso de circularidade pragmática. Nossa primeira questão deve ser se uma circularidade pragmática vicia um argumento como uma circularidade grosseira o faz. **A resposta depende em parte do propósito para a qual a justificação está sendo dada**, e em parte do caráter do argumento, pois, se a justificação tem o objetivo de convencer, então a circularidade pragmática falhará em seu principal objetivo. (...) Se, por outro lado, é intencionada a satisfação da perplexidade filosófica sobre nosso estar intitulado a raciocinar de acordo com tal lei, a justificação pode muito bem servir. O filósofo não duvida seriamente da validade da lei e está, portanto, preparado para aceitar um argumento construído de acordo com ela. Ele não precisa ser persuadido da verdade da conclusão, o que ele está buscando é uma explicação da sua verdade. (...)” (Dummett, 1993, p.202, grifo nosso) “Do ponto de vista de um filósofo buscando uma explicação da possibilidade da inferência dedutiva em geral, ou perplexo sobre algum princípio particular de inferência que freqüentemente empregamos, não existe nada problemático com a justificação ser dada em termos de alguma teoria semântica que ele ache satisfatória, isto é, que ele vê como sendo coerente com o tipo de teoria do significado para a linguagem como um todo que ele está disposto a concordar. Tal justificação será muito provavelmente pragmaticamente circular, mas ele não tem razão para dispensá-la sob esta justificativa. Uma justificação dada em termos de uma teoria semântica não resolverá por si mesma este problema que não é puramente semântico, mas também epistemológico. Ele quer saber como podemos ao mesmo tempo reconhecer a lei como válida e usá-la para obter conhecimento que não possuíamos antes, mas ele pode usar a justificação semântica da lei como uma base para sua resposta ao problema epistemológico. Por contraste, na presença de uma genuína disputa sobre a validade de uma lei lógica, a circularidade pragmática deve ser evitada.” (Dummett, 1993, p.203)

ajuda a clarificar. A partir do final da década de 90, Dummett procurou separar a verdade construtiva da asserção justificada. Ele considerou que se o sentido de uma proposição matemática está determinado no âmbito canônico, com a possibilidade da verificação, antes da verificação atual de um enunciado, então parece também que deve ser determinada a ‘verdade’ deste enunciado antes da justificação atual. Esta noção de ‘verdade’, a qual chamamos ‘verdade em princípio’, parece corresponder à verdade dada tacitamente com o sentido, que parece acabar sendo assumida então pelo projeto construtivista contemporâneo. Se isto estiver correto, a própria noção de verificação canônica, enquanto distinta da noção de demonstração, estabelece a necessidade de que enunciados já sejam determinadamente verdadeiros ou falsos, sem que tenhamos os demonstrados ou refutados factualmente. Isso ocorreria porque, levando-se a sério a distinção entre provas canônicas e provas indiretas (demonstrações), introduzimos uma distinção modal entre possibilidades lógicas e possibilidades reais no âmbito normativo. Uma prova canônica refere-se à possibilidade lógica, em princípio, da demonstração, então, ‘A é verdadeiro’ não significa que temos atualmente uma prova de A, ou mesmo que podemos realmente tê-la, desde que possuir atualmente uma prova de A é uma contingência, e diz respeito às possibilidades reais. Agora, se dispomos de um procedimento que, se levado à cabo, produz uma prova de A, o que temos é uma prova de A *em princípio*. Este procedimento determinado pode, logicamente, ser transformado em uma prova de A, muito embora, provar A possa ser, factualmente, impossível.

De fato, não há uma concordância geral sobre como a noção objetiva de verdade deve ser entendida do ponto de vista construtivo, nem é nosso objetivo aqui estabelecer uma análise exaustiva desse tópico, cumpre-nos apenas notar que Prawitz realmente acaba concluindo que a verdade já deveria estar determinada para todos os enunciados os quais somos capazes, em princípio, de reconhecer a prova como uma prova do que ela prova. Ele é então obrigado a avançar bem mais do que um construtivista gostaria, e a supor a existência de provas em abstrato, existindo em um “reino de provas” determinado e atemporal. Se um enunciado é verdadeiro, deve existir algo em virtude do que ele é verdadeiro (princípio C), portanto, a prova possível do enunciado deveria existir, o que significa mesmo assumir uma existência abstrata de provas. Parece mesmo então que Prawitz deveria estar preparado para assumir o terço exclusivo irrestrito, desde que mantém que somos capazes de provar *em princípio* tudo que um dia provaremos, e, dessa forma, a verdade de todas estas sentenças já deveria estar determinada. Mas o que está de fato envolvido nesta estranha conclusão? Ora, se não são as verificações atuais

que conferem sentido às proposições, então não devem ser também as verificações atuais que as tornam verdadeiras ou falsas *em princípio*. Sendo assim, tal como avaliamos, a própria noção de verificação ‘em princípio’ acaba re-introduzindo no cerne do projeto construtivista uma noção de ‘verdade independente’, que eles procuravam evitar no realismo. Se o realista tem que, como afirma Dummett, supor um tácito acesso à verdade, o construtivista, por seu turno, separa o uso, responsável pela determinação do significado, da noção verdade, mas termina tendo que retornar a esta na própria determinação das condições de asserção responsáveis pela determinação do sentido. Se pretendemos novamente separar a verdade da semântica no âmbito normativo, a partir da distinção entre ‘possibilidade em princípio’ e ‘possibilidade factual’, parece que introduzimos novamente uma noção de verdade inefável, responsável pela determinação da própria ‘possibilidade em princípio’. Normalmente a determinação da verdade supõe a semântica já dada, mas isso é o que não podemos ter no âmbito normativo, então se continuamos tratando a verdade como independente, supomos também uma noção de verdade sem critério de avaliação. Daí Prawitz manter que uma proposição matemática já era verdadeira no passado, antes da verificação atual e, portanto, sem critério de verdade. Poder-se-ia dizer, entretanto, que as provas *em abstrato* continuam sendo entendidas como *em princípio* acessíveis, logo não haveria qualquer uma noção verdade inefável suposta aqui, mas como estas provas são necessariamente supostas como existentes independentes, de fato, elas mesmas não podem ser ulteriormente determinadas. Não podemos justificar a existência de uma prova canônica, elas são a prova da possibilidade da construção factual, mas não possuem uma possibilidade anterior, e é neste sentido, que são *inefáveis*. A existência atribuída à prova canônica deveria ser caracterizada abstratamente e em termos clássicos, posto que, se tentássemos dizer que a prova existe porque provamos sua efetividade, teríamos um regresso ao infinito de possibilidades. De acordo, então, com nossas análises, a própria separação entre as verificações *em princípio* e as verificações factuais, introduz novamente uma noção de ‘verdade em princípio’, enquanto distinta da verdade factual. Se isso é correto, é por uma questão de coerência interna que a distinção entre possibilidades em princípios e possibilidades factuais deve ser recusada. Como expomos, as análises de Wittgenstein do contexto normativo da matemática têm como conclusão que, neste contexto, não há e nem pode haver um critério externo em virtude do qual pudéssemos dizer que a sentença é verdadeira para além da sua demonstração, que seria ao mesmo tempo constitutiva do sentido da sentença: “Em um certo sentido, não é possível apelar

ao significado dos signos na matemática, exatamente porque é apenas a matemática que lhes confere seu significado.” (*RFM*, V, 16) Daí a recusa ao realismo. Mas Wittgenstein percebe que isso também significa dizer que, em relação ao âmbito da matemática, as possibilidades em princípio de uma sentença encontram-se colapsadas às possibilidades factuais, desde que se entenda que o que diz respeito ao ‘em princípio’ diz respeito ao significado, e o que diz respeito ao ‘factual’ diria respeito à verdade. Como a sentença é necessária (desde que se trata de uma sentença matemática), a verdade da sentença seria dada com seu sentido (não anteriormente ao factual, mas com este mesmo): sendo assim, o caráter *em princípio* do significado está colapsado ao factual no âmbito normativo. No geral, a abordagem de Wittgenstein pode ser entendida como uma recusa à separação forte, no âmbito necessário da linguagem, entre o que é ‘atual’ e o que é ‘em princípio’ – separação que seria, para ele, uma característica das teorias filosóficas. Esta recusa é expressa já, tal como entendemos, pela própria noção de ‘relação interna’. Para Wittgenstein, a relação entre o âmbito atual e o âmbito em princípio seria interna no âmbito normativo da linguagem. Todo ‘em princípio’ da nossa prática matemática diria respeito já ao atual.

Pode ser esclarecedor aqui a comparação com o *Tractatus*. Separar ‘em princípio’ e ‘factual’ no âmbito normativo equivale a separar no âmbito formal (no próprio espaço lógico) o que é possível e o que é atual. Isso é o que o Wittgenstein de então identifica já como necessariamente gerando um regresso ao infinito. No que diz respeito às relações necessárias não seria possível uma determinação ulterior externa. Isso é permanente nas análises de Wittgenstein: se é possível uma determinação em princípio anterior à determinação factual, então não se tratam de proposições necessárias. Quase tudo que se dizia da ‘Forma’ no *TLP* pode agora ser atribuído à noção de ‘norma’. Da mesma maneira que a Forma no *TLP* não tinha uma possibilidade anteriormente determinada porque determinava as possibilidades que poderia ser e poderiam não ser o caso, não podendo ter uma possibilidade anterior sob pena de regresso ao infinito; agora também a norma não pode ser tomada como tendo uma determinação ‘em princípio’ anterior.

Quando se separa, em uma determinada linguagem, as regras canônicas das regras secundárias desta, isso implica não apenas tomar o âmbito canônico como também responsável pela ‘verdade em princípio’ dos enunciados, mas parece permitir agora falarmos em falsidade mesma em relação às regras, isto é, ao âmbito necessário da linguagem. Isso aparece pela própria noção de ‘justificação’ aplicada às regras, afinal, o

que é justificado precisa ser justificado por algo independente do justificado, o que tornaria contingente a relação em questão. Quando se pretende justificar as regras de eliminação pelas regras de introdução, fazendo-se uso de princípio de harmonia, se está tratando as regras ao mesmo tempo como necessárias e como contingentes: necessárias porque, pela harmonia, o que é permitido por eliminação deve poder ser reduzido ao que é permitido por introdução, de tal modo que a eliminação se siga da introdução e não acrescente nada a esta; contingentes porque a eliminação seria justificada externamente pela introdução, o que parece significar poder apelar a um significado dado independentemente para a determinação posterior da verdade.

A noção de ‘em princípio’ cumpre a função de expressar a determinação do significado, mas como ele é separado em um âmbito privilegiado, a determinação da semântica parece ser apartada novamente de nossas práticas particulares, e é, com isso – isto é, com a suposição da independência entre o a regra e o que dela se segue –, que o realismo retorna. Tal suposição é que é repetida através da distinção entre provas canônicas e provas indiretas, pelo construtivismo matemático contemporâneo, de tal modo que o realismo e sua noção de verdade independente acabam sendo restituídos. A crítica de Wittgenstein ao realismo pode ser entendida como tendo por objetivo deixar claro a impossibilidade de se justificar a necessidade sem tratá-la como contingente, e é nesse sentido que as críticas de Wittgenstein aplicam-se também ao construtivismo contemporâneo do significado.

O que a distinção entre ‘em princípio’ e ‘de fato’ faz, grosso modo, é forçar dentro do âmbito normativo a possibilidade do âmbito ‘independentemente dado’, o que significa, do ponto de vista da Filosofia do segundo Wittgenstein, tratar o normativo como empírico, ou seja, repetir o equívoco realista. Se recusar o realismo, como vimos, significa recusar que o âmbito necessário da linguagem seja tratado como contingente, no sentido de avaliado por determinação ulterior; e o construtivismo contemporâneo, através da distinção entre demonstração em princípio e demonstração de fato, não recusa que o âmbito necessário da linguagem seja tratado dessa forma, então, só podemos concluir que o construtivismo contemporâneo não recusa o realismo.

Vemos também, assim, que é a mesma assimetria no funcionamento da negação relativa às proposições necessárias que impede Wittgenstein de aceitar a distinção entre factual e em princípio no âmbito da matemática: se aceitar o âmbito ‘em princípio’, é aceitar uma justificativa da prática matemática atual, isso significaria também instituir

seu oposto como possível, e, assim, tratar o necessário ao mesmo tempo como contingente.

3.5. Breve digressão sobre os julgamentos hipotéticos e as relações com o intuicionismo originário

De acordo com o que viemos analisando até o item anterior, pode-se perguntar: recusar coerentemente o realismo significa então manter uma abordagem completamente irrazoável da prática matemática? Afinal, se a distinção entre ‘factual’ e ‘em princípio’ no âmbito normativo conduz ao retorno de algum tipo de realismo, isso não anula em nada o problema inicial que se coloca para a compreensão das demonstrações matemáticas quando esta distinção é recusada. O âmbito mais simples para o qual qualquer rejeição radical da noção de ‘em princípio’ na matemática pareceria gerar conseqüências drásticas seria já para a noção básica de implicação, e, portanto, de um ‘julgamento hipotético’, isto é, nossa inocente ‘Se A, então B’. Sem essa noção, não temos nem lógica, nem aritmética, nem mesmo qualquer derivação em uma cadeia dedutiva. Deste ponto de vista, o problema que viemos apresentando para as demonstrações matemáticas seria apenas herdeiro, em Wittgenstein, deste problema mais básico e simples, envolvido na própria extração de conseqüências a partir de hipóteses previamente aceitas.

A leitura construtiva tradicional de um julgamento hipotético consiste em definir ‘A implica B’ como: ‘qualquer prova de A *pode* ser transformada em uma prova de B’. Evita-se, portanto, a referência a supostas condições de verdade independentes como determinando a implicação. Ocorre, entretanto, que este ‘pode’ não parece dizer respeito a uma possibilidade atual, desde que ele deveria dar conta também dos casos nos quais não temos atualmente uma prova de A e, mais ainda, como afirmou Van Atten:

(...) as Troelstra and van Dalen suggest, the identity transformation as the one that will transform any proof of the antecedent into one of the consequent. Of course the observation that one never will actually have to apply this transformation is correct, as there will never be a proof of the antecedent. However, this is not the only information available. One also knows that the transformation is the identity transformation. In particular, this transformation will transform last lines of proofs into themselves. Now, the last line of a proof is its conclusion. But here one can see that any proof of the antecedent, hypothetical or not, will have a different conclusion from any proof of the consequent. It is therefore impossible that the identity transformation will transform a proof of the antecedent, hypothetical or not, into one of the consequent. So although Troelstra and van Dalen are right to say that as matter of fact one will never be asked to carry out this transformation, one also sees that in the counterfactual situation that one

does actually have a proof of the antecedent, the proposed transformation will not work. (Van Atten, 2007, p.02)

O que transformamos não são provas atuais. Sendo assim, a própria noção de julgamento hipotético e, com ela, de derivação pura e simples, pareceria forçar imediatamente a manutenção de alguma noção de ‘possibilidade em princípio’ na aritmética. Sobre isso, é interessante chamar atenção para a posição de Freudenthal, tal como também citada por Van Atten:

Going back to the table, perhaps the most surprising thing in it is Freudenthal’s rejection of the hypothetical judgement. It is to be understood as follows. He held that the only interpretation that can be given to $A \rightarrow B$ is: ‘I have actually obtained a proof of A and building on that proof I have then actually obtained a proof of B.’ Thus understood, the hypothetical judgement is really a special case of conjunction. This of course would make it impossible to assert any hypothetical judgement with an unprovable or even merely unproved antecedent, because a conjunction is assertable only if both conjuncts are. (Van Atten, 2007, p.04)

E ele continua:

Freudenthal arrived at this interpretation because he rejected propositions as independent entities. He accepted only assertions, which he thought of as last lines of actually given proofs; he held that the meaning of an assertion is only determined by an actual proof of it. Then it obviously makes no sense to ask for a consideration of the content of a proposition in abstraction from a proof of it. However, such consideration is precisely what a hypothetical judgement requires (...). (Van Atten, 2007, p.04)

Assim, parece que se pretendemos pensar um julgamento hipotético como não determinado ‘em princípio’, ele simplesmente deixa de ser um julgamento hipotético, não há uma noção de ‘hipótese’ meramente factual, mais ainda, a própria noção de ‘condicional’ introduziria a noção de determinação ‘em princípio’, que se pretenderia recusar. Se isso é correto, um atualismo radical não seria apenas uma revisionismo da prática matemática, mediante a rejeição de alguns princípios – o que já seria problemático do ponto de vista da Filosofia de Wittgenstein –, mas, mais do que isso, pareceria ser a destruição completa da prática inferencial.

Tendo um mínimo de boa vontade com Wittgenstein, considerando a economia geral das posições por ele mantidas e uma mínima coerência interna no seu pensamento, não deve ser isso o que ele pretendeu sustentar. O intuicionismo originário de Brouwer, por seu turno, parece apresentar uma visão bem mais razoável, se bem que ainda sem precisar comprometer-se diretamente com uma noção de ‘possibilidade em princípio’.

Apesar da forte recusa a qualquer noção de construção mental como essencial para o funcionamento da prática matemática, convém notar que a filosofia da matemática de Wittgenstein, sobretudo em seu período intermediário, mantém vários pontos de contato com o intuicionismo originário de Brouwer. Independentemente da suposta influência da conferência de Brouwer para o próprio retorno de Wittgenstein à Filosofia, podemos identificar indícios da recusa a uma distinção forte entre ‘atual’ e ‘em princípio’ nas posições mantidas por Brouwer em sua dissertação de 1907. Neste trabalho, tal recusa se relaciona diretamente com uma das posições centrais defendidas então por Brouwer, a saber: que a matemática não depende da lógica e que, ao contrário, é a lógica que depende da matemática. “We want to show that mathematics is independent of the so-called logical laws (laws of reasoning or of the human thought).” (Brouwer, 1907, p.72) “While thus mathematics is independent of logic, logic does depend upon mathematics.” (Brouwer, 1907, p. 73) Uma posição simpática a esta pode ser também encontrada em Wittgenstein, tal como aparece nas *Lectures* 32-35: “Existe um substrato no qual a matemática se funda? A lógica é o fundamento da matemática? Na minha visão, a lógica matemática é simplesmente uma parte da matemática.” (AWL, p.205)

É interessante notar que Brouwer associa construções ‘em princípio’ (hipotéticas) à lógica e mantém que a matemática só precisaria do que é atual. Então, dizer que a matemática não precisa da lógica seria se livrar ao mesmo tempo de uma noção de construção ‘em princípio’ como fundamentando a prática matemática. Entretanto, e apesar disso, Brouwer assume existir casos nos quais precisamos dos julgamentos hipotéticos em matemática, nesses casos, pareceria que precisamos também dos julgamentos ‘em princípio’, o que nos levaria, ainda segundo Brouwer, à idéia pela qual a matemática seria dependente da lógica.

In one particular case the chain of syllogisms is of a somewhat different kind, which seems to come nearer to the usual logical figures and which actually seems to presuppose the hypothetical judgment from logic. This occurs when a structure is defined by some relation in another structure, while it is not immediately clear how to effect its construction. Here it seems that the construction is supposed to be effected, and that starting from this hypothesis a chain of hypothetical judgments is deduced. (Brouwer, 1907, p.72)

O problema, então, que acompanha os julgamentos hipotéticos, na leitura de Brouwer, é que, ao introduzirem a noção de ‘em princípio’, estes parecem legitimar a atribuição de

um caráter mais fundamental para a lógica que para a matemática. Não obstante, essa dependência da matemática em relação à lógica seria apenas aparente porque a noção de ‘sistema de condições’ permitiria pensar a matemática apenas em termos de ‘construções efetuadas’ e condições, eliminando a noção de ‘em princípio’, mesmo nos casos em que parecemos requerer construções hipotéticas.

But this is no more than apparent; what actually happens is the following: one starts by setting up a structure which fulfills part of the required relations, thereupon one tries to deduce from these relations, by means of tautologies, other relations, in such a way that these new relations, combined with those that have not yet been used, yield a system of conditions, suitable as a stating-point for the constructions of the required structure. Only by this construction will it be proved that the original conditions can be fulfilled. (Brouwer, 1907, p.72)

Ressaltando exatamente este ponto, em seu recente artigo *Brouwer e a Natureza da Lógica*, Pereira afirmou:

A saída para a armadilha das construções não construídas, mas supostas, é trabalhar com condições e transformações atuais. Em um raciocínio hipotético partimos das condições especificadas pelo antecedente do juízo hipotético correspondente e, através de transformações construtivamente legítimas (tautologias intuicionistas), transformamos essas primeiras condições em condições para a construção do conseqüente. (...) Essa leitura de Brouwer não contém nada com natureza hipotética: temos condições (atuais) e transformações (atuais) sobre condições. (Pereira, 2007, p.52)

A noção de sistema matemático, no período intermediário da Filosofia de Wittgenstein, pode ser lida como cumprindo um papel análogo ao esperado destes sistemas de condições propostos por Brouwer. Apesar de alguns intérpretes, como por exemplo Frascolla (1994), afirmarem justamente que a noção de ‘sistema matemático’ em Wittgenstein cumpriria o papel de uma determinação ‘em princípio’, mesmo no âmbito normativo da matemática, como já expomos, entendemos que esta noção de ‘possibilidade em princípio’ sempre foi rejeitada como enganosa por Wittgenstein, pois suporia que aquilo que é *em princípio* também é de algum modo atual, o que acarretaria uma imagem já extensional da generalidade matemática. A razão pela qual a noção de sistema matemático é introduzida, de fato, não se distancia muito do diálogo com a posição de Brouwer, tal como apresentada acima, embora adquira um caráter diverso dentro do desenvolvimento do pensamento de Wittgenstein.

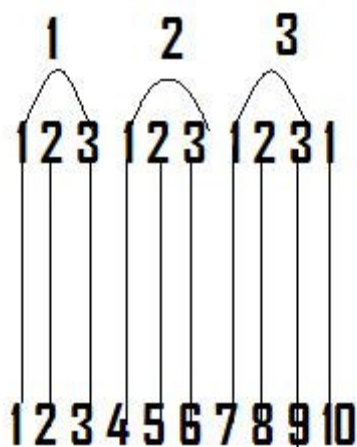
A noção de ‘sistema matemático’ ou ‘sistema de cálculo’ em Wittgenstein, do mesmo modo que a noção de ‘sistema de condições’ em Brouwer, permite evitar a noção de determinação ‘em princípio’ nos âmbitos em que esta parece ser requerida,

porque permite que possamos tomar a proposição matemática como tendo um sentido independente da sua verdade, isto é, ainda que não construída atualmente, ou seja, ela poderia garantir assim o caráter condicional da implicação, sem se comprometer com qualquer construção que ultrapasse nossas construções reais.

The method of checking the truth corresponds to the sense of a mathematical proposition. If it's impossible to speak of such a check, then the analogy between 'mathematical proposition' and the other things we call propositions collapse. Thus there is a check for propositions of the form ' $(\exists K) {}^n_m \dots$ ' and ' $\sim(\exists K) {}^n_m \dots$ ' which bring in intervals. (PG, II, V, 23)

Interessantemente a descrição do sistema de condições citada acima por Brouwer é extremamente análoga à construção de um sistema de proposições formalmente similares, por meio de relações internas, na Filosofia de Wittgenstein. Tal sistema de relações, por meio de uma visão sinóptica, possibilitaria à matemática justamente o estabelecimento de novas relações sob o pano de fundo de relações já dadas, sem que qualquer noção de justificação ou construção *em princípio* tivesse que ser introduzida.

What is the characteristic use of the derivation procedure as a calculation – as opposed to its use as an experiment? We regard the calculation as demonstrating an internal property (a property of the essence) of the structures. But what does that mean? The following might serve as a model of an 'internal property':



$$10 = 3 \times 3 + 1$$

Now when I say: 10 strokes necessarily consist of 3 time 3 strokes and 1 stroke – that does not mean: if there are 10 strokes there, then they have always got these figures and loops round them. (...) (RFM, I, 99)

Quando Wittgenstein rejeita, nos *RFM*, a fundamentação da matemática na Lógica, ele a contrasta justamente a sua noção de surveyability, a partir da qual ele pode opor o que denomina a necessidade da derivação a uma necessidade geométrica, o que soa fortemente novamente como uma rejeição de algo com caráter aparentemente ‘em princípio’ em favor de algo completamente atual.

I should like to say that where surveyability is not present, i.e., where is room for a doubt whether what we have really is the result of this substitution, the proof is destroyed. And not in some silly and unimportant way that has nothing to do with the nature of proof. Or: logic as the foundation of all mathematics does not work, and to shew this it is enough that the cogency of logical proof stands and falls with its geometrical cogency. (*RFM*, III, 43)

A razão pela qual o cálculo aritmético não precisaria da lógica, de acordo com Wittgenstein, é simplesmente que *ele cuida de si mesmo*.

The application of the calculation must take care of itself. And that is what is correct about the formalism. The reduction of arithmetic to symbolic logic is supposed to shew the point of application of arithmetic, as it were the attachment by means of which it is plugged in to its application. As if someone were shewn, first a trumpet without the mouthpiece – and then mouthpiece which shews how a trumpet is used, brought into contact with the human body. But the attachment which Russell gives us is on the hand too narrow, on the other hand too wide; too general and too special. The calculation take care of its own application. (*RFM*, III, 4)

Este é o tipo de comentário da mesma natureza dos envolvidos na discussão sobre a relação interna entre regras e aplicações, generalidade e casos, determinações em princípio e factuais: tomá-los separadamente já seria desconsiderar o caráter necessário destas relações. Sendo assim, a impossibilidade de redução da matemática à lógica já se seguiria do caráter normativo do cálculo, isto é, como vimos, da diferença entre cálculo e experimento.

‘Proof must be capable of being taken in’ really means nothing but: a proof is not an experiment. We do not accept the result of a proof because it results once, or because it often results. But we see in the proof the reason for saying that this must be the result. What proves is not that this correlation leads to this result – but that we are persuaded to take these appearances (pictures) as models for what it is like if...The proof is our new model for what it is like if nothing gets added and nothing taken away when we count correctly etc...But these words shew that I do not quite know what the proof is model of. I want to say: with the logic of PM it would be possible to justify an arithmetic in which $1000 + 1 = 1000$, and all that would be necessary for this purpose would be to doubt the sensible correctness of calculations. But if we do not doubt it, then it is not our conviction of the truth of logic that is responsible. (*RFM*, III, 170)

Tal como analisamos, para Wittgenstein, o que há de nocivo com a idéia segundo a qual a noção de ‘em princípio’ é necessária para o cálculo é exatamente supor-se que tal noção funciona como uma justificativa externa às nossas práticas inferenciais aritméticas. Não precisamos da lógica para justificar a aritmética exatamente no sentido em que não precisamos de um âmbito ‘em princípio’ para fundamentar nossas práticas atuais. Entretanto, isso não significa que estas sejam independentes, a noção de implicação é irreduzível, não vamos nos livrar dela, ela não justifica nossa prática de cálculo matemático, mas também não se separa desta prática. E aqui Wittgenstein talvez se distancie da abordagem de Brouwer:

So much is true when it's said that mathematics is logic: its moves are from rules of our language to other rules of our language. And this gives it its peculiar solidity, its unassailable position, set apart. (Mathematics deposited among the standard measures.) (*RFM*, I, 165)

De qualquer forma, é possível notar que o caminho seguido pelas análises de Wittgenstein mostra também uma clara convergência em relação à posição de Brouwer, pelo menos no sentido pelo qual podemos também atribuir a este último o reconhecimento de que, por um lado, a natureza da implicação parece requerer a necessidade de uma justificação ‘em princípio’ no âmbito matemático, mas, por outro lado, uma maneira distinta de analisar as relações formais dentro de um sistema de condições é capaz de mostrar ao mesmo tempo o caráter irreduzível da noção de implicação e, com isso mesmo, sua impossibilidade de justificação externa. Não cabe aqui desenvolvermos mais detidamente a análise desta convergência, cuja consideração precisaria ser desenvolvida em um trabalho independente sobre o assunto.

3.6. Provas como figuras

Consideramos que a abordagem das provas matemáticas como figuras nos ajuda a compreender o enfoque proposto por Wittgenstein e, mesmo, a resolver os problemas que se colocam recorrentemente para sua concepção.

Retomando o que viemos analisamos, vimos que a impossibilidade de se pensar um âmbito de possibilidades em princípio no contexto normativo da aritmética se seguiria da assimetria relativa ao âmbito necessário da linguagem no que diz respeito ao funcionamento da negação. Para Wittgenstein, não podemos supor sentido para o

impossível, por isso não podemos pensar que a proposição matemática exclui uma proposição igualmente possível, de tal modo que a sentença aritmética não teria um sentido dado e uma verdade apenas descoberta e justificada posteriormente. Ao mesmo tempo, e apesar disso, precisamos que a sentença tenha um caráter que cumpra já a função do ‘em princípio’, isto é, que a insira em um sistema de proposições “formalmente” análogas, que seja capaz de determinar as condições de construção da proposição, sem instituir, com isso, algo que ultrapassasse e fosse independente ao factual.

Pensemos rapidamente no funcionamento da *redução ao absurdo*. Uma prova por absurdo ilustra bem o problema central que Wittgenstein pretende ressaltar em relação ao nosso tratamento das proposições necessárias. Quando provamos algo por absurdo, supomos “a possibilidade do impossível”, por assim dizer, e, em seguida, derivamos uma contradição, para negarmos a proposição inicial, chegando ao necessário. Mas, claro, se o impossível não tivesse sentido, considerando-se o sentido como uma possibilidade, como a prova poderia proceder sem transformar-se ela mesma, juntamente com a proposição provada, também em um contra-senso? Vejamos então o que deveria significar o procedimento por absurdo e o que ele pode contribuir para nosso problema central, isto é, para a questão sobre se Wittgenstein precisaria de uma noção de ‘possibilidade em princípio’, enquanto distinta de nossas possibilidades factuais, para ser coerente com a prática matemática.

We can always imagine proof by reduction ad absurdum used in argument with someone who puts forward a non-mathematical assertion (e.g. that he has seen a checkmate with such-and-such pieces) which can be mathematically refuted. The difficulty which is felt in connexion with reduction ad absurdum in mathematics is this: what goes in this proof? Something mathematically absurd, and hence unmathematical? How – one would like to ask – can one so much as assume the mathematically absurd at all? That I can assume what is physically false and reduce it ad absurdum gives me no difficulty. But how to think the – so to speak – unthinkable? What an indirect proof says, however is: ‘if you want *this* then you cannot assume *that*: for only the opposite of what you do not want to abandon would be combinable with that.’ (RFM, V, 28)

Tal como avaliamos, é da mesma maneira que não supomos exatamente a possibilidade do impossível na redução ao absurdo, que também não supomos exatamente a possibilidade do necessário em uma demonstração matemática qualquer que seja. O necessário não teria possibilidade anterior, para Wittgenstein, precisamente porque o impossível também não teria. Supor uma possibilidade para o necessário seria uma contradição porque deveria significar que o impossível também tem possibilidade.

Mas não precisamos jogar nossa prática com o âmbito necessário no lixo pela mesma razão que não precisamos jogar fora a redução ao absurdo. Se, na redução ao absurdo, não se trata de tomar o impossível como possível, mas apenas de mostrar que tentamos fazer algo que, *de fato*, não fazemos, então, não deve ser preciso também supor nenhuma possibilidade anteriormente determinada para isso que, *de fato*, fazemos. Isso, que fazemos ou não fazemos, tem já um estatuto relativo ao que é possível, na prática normativa. Mas, por isso mesmo, o sentido do ‘é possível’ aqui, de maneira geral; ou do ‘não podemos assumir isso’, nas demonstrações por absurdo, não se refere a negar ou afirmar a possibilidade da proposição, mas diz respeito à possibilidade, *por fora*, por assim dizer, de todo o procedimento em questão.

A contradição derivada na redução não tem possibilidade anterior, ela seria simplesmente a marca da impossibilidade em questão, isto é, ela não era antes possível e se tornou atual ao ser derivada, ela significa que o cálculo pára ali, é um limite para nossa prática com signos. Então, se no caso do impossível, não precisamos supor uma possibilidade anterior, para que ele funcione naquilo que chamamos um julgamento hipotético, por que precisamos supor no caso do necessário? Daí podermos dizer a partir dessa comparação que, se o impossível marca simplesmente o que não fazemos no âmbito normativo, o necessário marca o que fazemos neste âmbito, sem que seja preciso supor algo oculto. “Não é algo atrás da prova, mas a prova, que prova.” (*RFM*, III, 42) Expulsa-se, assim, o que se pode fazer *em princípio*, isto é, a possibilidade de segunda ordem, mantém-se o que se pode ou não fazer, e todo regresso ao infinito de nossa prosa sobre a necessidade matemática seria assim evitado.

Retomemos o fio de nossas reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento de Wittgenstein. O “problema” relativo à redução ao absurdo foi o mesmo que fez Wittgenstein no *Tractatus* retirar o sentido da lógica, pois, como vimos no capítulo anterior, o espaço lógico não exclui nenhum espaço ilógico (e considero como já aceita aqui a relação deste ponto com o paradoxo). Se a lógica fosse dita com sentido suporia a possibilidade do impossível. Dizer assim que a lógica não tem sentido era já manter que o espaço dos possíveis não tem possibilidade anterior. Mas o que dizer sobre isso no período mais tardio de sua Filosofia, quando não há mesmo espaço dos possíveis que se mostre em tabelas de verdade? A ausência dessa possibilidade anterior, não anula o sentido do normativo, porque se agora o necessário tem sentido não é enquanto possibilidade. O mesmo ponto argumentativo central já presente no *TLP* adquire então outro enfoque, e passa então a significar que o âmbito necessário não pode ser, sem

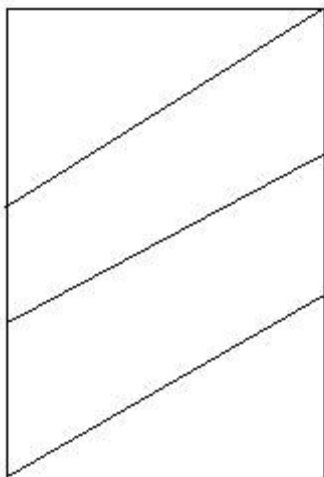
crítica, chamado de ‘verdadeiro’, que apenas ocorreria mediante o arcabouço conceitual que separa factuality de ‘em princípio’. Supor que a determinação da verdade das proposições necessárias estaria dada em princípio significaria novamente supor a possibilidade do falso. Por outro lado, se ela não tem possibilidade anterior, isso não significa que não tenha sentido, enquanto uso normativo e funcionamento em nossa prática de cálculo.

Mas o que está envolvido nesse uso normativo então? Tal como avaliamos, exatamente o que nos permite tomar figuras como provas. De fato, seria preciso que as demonstrações matemáticas funcionassem ao mesmo tempo como regra e casos, ou, como factuais em princípio, por assim dizer. Figuras permitiriam exatamente isso, ou melhor, figuras são provas precisamente quando são tomadas como instâncias que introduzem ao mesmo tempo um sistema de condições. Tal sistema é assim, portanto, introduzido não por exclusão de algo também possível, que deveria ser suposto quando a possibilidade anterior também o é. Ou seja, não justificamos dessa forma a normatividade por algo independente que instituisse a possibilidade exatamente daquilo que o padrão normativo exclui. Sendo assim, é a partir das ‘provas por figuras’, na abordagem de Wittgenstein, que podemos ilustrar em que sentido uma prova matemática precisa funcionar ao mesmo tempo como *type* e *token*.

Todo tratamento das provas como figuras, em Wittgenstein, vem acompanhado da idéia pela qual as provas fazem o que fazem porque traçam conexões, isto é, colocam proposições em um sistema de relações internas, então expressos pelas figuras. “A força de uma demonstração matemática está em que eu reconheço, por meio dela, isto, como análogo àquilo lá.” (*LFM*, p.63)

Tomando-se as provas geométricas, que Wittgenstein gosta tanto, a relação entre a modificação conceitual exercida por uma prova e a capacidade de ‘reconhecer algo como análogo a outro algo’, pode ficar mais clara. Dividindo-se um hexágono em seis triângulos, colocamos o hexágono em uma rede de relações conceituais, a partir do que podemos usá-lo de maneira diversa, isto é, podemos relacioná-lo internamente com conceitos anteriormente independentes.

A rectangle can be made of two parallelograms and two triangles. Proof:



(...)

I can imagine the child, after having put the two parallelograms together in this way, not believing his eyes when he sees that they fit like that. ‘They don’t look as if they fitted together like that.’ And I could imagine its being said: It’s only through some hocus-pocus that it looks to us as if they yielded the rectangle – in reality they have changed their nature, they aren’t the parallelograms any more. (*RFM*, I, 50)

How does one teach a child (say in arithmetic) "Now take *these* things together!" or "Now *these* go together"? Clearly "taking together" and "going together" must originally have had another meaning for him than that of *seeing* in this way or that. — And this is a remark about concepts, not about teaching methods. (*PI*, II, XI)

O que Wittgenstein pretende ressaltar com casos como este é em que medida uma prova matemática pode fazer algo assim, daí a relação das suas observações sobre demonstrações matemáticas com suas considerações sobre ‘visões de aspectos’. Provas matemáticas introduziriam mudanças de aspectos exatamente no sentido pelo qual introduziriam um novo conceito sob o pano de fundo de outras conexões, de tal modo que a proposição provada possa adquirir um novo sentido, e possamos passar a utilizá-la em outros contextos nos quais ela não era antes utilizada. “But the change produces a surprise not produced by the recognition. If you search in a figure (i) for another figure (2), and then find it, you see (i) in a new way.” (*PI*, II, XI)

A perspicuidade (*surveyability*) então exigida por Wittgenstein para as demonstrações é também a perspicuidade de uma figura, deveríamos ser capazes de tomar a prova toda ‘de uma vez’ como um modelo formal, e ao mesmo tempo como instância de um caso geral (*RFM*, III, 41). Daí também o fato de cada passo da prova seguir-se com necessidade não significar que a relação entre o primeiro passo e o último já estivesse dada. Quando as conexões são estabelecidas, não há mais espaço para

passos intermediários, isso faz com que a proposição introduzida dessa maneira deixe de ser um objeto de julgamento e passe a ser aquilo pelo que julgamos algo, que é o que significa atribuir um caráter normativo à proposição, ou, nos termos de Wittgenstein, tratá-la mais como uma figura do que como uma proposição. “We do not judge the pictures, we judge by means of the pictures. We do not investigate them, we use them to investigate something else.”(RFM, IV, 12)

A *mudança* operada pela prova ressalta justamente a capacidade de, na prova, por figuras, tomarmos um signo com caráter ao mesmo tempo *factual* e *em princípio*, o que seria fundamental para o funcionamento do âmbito normativo como tal. As demonstrações por figuras só funcionariam na medida em que não são entendidas como meras instâncias particulares das noções em questão porque, de outra forma, elas apenas pressuporiam o que pretendem concluir, por outro lado, se elas não são apenas exemplos das demonstrações formalizadas, mas as próprias demonstrações, isso significa que elas precisam ser ao mesmo tempo gerais e casos, ou ‘gerais já nos casos’, e só assim elas poderiam funcionar como demonstrações.

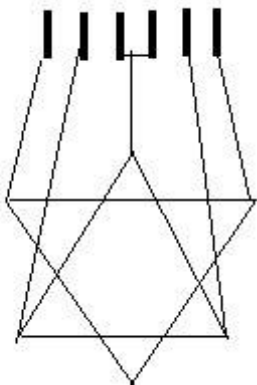
Just think, how can the Picture (or procedure) that you shew me now oblige always to judge in such-and-such way? If what we have here is an experiment, the surely one is too little to bind me to any judgment. (RFM, I, 55)

Nestas duas passagens, das *RFM*, a questão, que aqui pretendemos chamar a atenção, do colapso entre o âmbito factual e o em princípio, na matemática, fica particularmente evidente por meio da abordagem das provas por figuras:

What do I convince anyone of, if he has followed the film projection of the experiment with the hundred marbles? One might say, I convince him the *it happened* like that? – But this would not be a mathematical conviction. – But can’t I say: *I impress a procedure on him*? This procedure is the regrouping of 100 things in 10 rows of 10. And this procedure can *as matter of fact* always be carried out again. And he can rightly be convinced of that. (RFM, I, 39)

And this is how the proof impresses a procedure on us by drawing projection-lines: the procedure of one-one correlation of the H and P. – “But doesn’t it also convince me of the fact that this [nota marginal: Is ‘this correlation’ here the correlation of the patterns in the proof itself? A thing cannot be at the same time the measure and the thing measured.] correlation is *possible*?” – If that is supposed to mean: you can always carry it out –, then that doesn’t have to be true at all. But the drawing of the projections-lines convinces us that there are as many lines above as angles below; and it supplies us with a model to use in correlating such patterns. – “But surely what the model shews in this way is that it does work, not that it did work this time? In the sense in which it wouldn’t have worked if the

top figure had been I I I I I instead of I I I I I'. – How is that? Doesn't it work then? Like this e.g.:



This figure too could be used to prove something. It could be used to shew that group of these forms cannot be given a I-I correlation. 'A I-I correlation is impossible here' means, e.g., "these figures and I-I correlation don't fit together."

"I didn't means it like that!" – Then shew me how you mean it, and I'll do it.

But can't I say that the figures shews *how* such a correlation is possible and mustn't it for that reason also shew *that* it is possible? (*RFM*, I, 40)

Estas passagens são interessantes porque nelas Wittgenstein parece, a partir de um diálogo imaginário, mostrar oscilações entre uma abordagem em termos factuais e em termos de possibilidades das provas por meio de figuras. Essas oscilações pretendem deixar claro como a manutenção de apenas um dos aspectos não funciona.¹¹ Elas foram marcadas em itálico pelo próprio Wittgenstein nas passagens. Ainda na 39, a primeira resposta ao que ocorre mediante um suposto experimento com bolas de gude diz respeito a um aspecto completamente factual e temporal 'alguém é convencido de que

¹¹ É interessante notar que há uma oscilação constante entre uma compreensão das figuras nas demonstrações matemáticas, ora como particulares (instâncias), ora como gerais (conceitos) ou como representativas de gerais. Esta própria oscilação pode ser entendida como apontando para a necessidade de reunirmos, de alguma forma, ambos os aspectos. A alternância entre as duas abordagens e, particularmente, a tentativa de combinar ambas, é primordialmente recorrente nos tratamentos de universais determinados por semelhança, nos quais os diferentes casos de um geral não são determinados como tais por partilharem uma mesma propriedade (essência) comum, mas por similitudes entre particulares. Sendo assim, a própria idéia de universal por semelhança parece conduzir à idéia de um universal instanciado, pois um universal determinado por semelhança é necessariamente um universal já dado no instanciado. Parece certamente estranho que algo seja ao mesmo tempo uma instância e um conceito (tanto quanto, e pela mesma razão, parece estranho uma função que seja seu próprio argumento). O que, de fato, pretendemos ressaltar nesta abordagem é que a requisição de universais dados já nos casos é a mesma requisição envolvida na necessidade da *impredicatividade*. Claramente, não negamos que esta abordagem pareça um caso no qual se tenta ao mesmo tempo "guardar e comer um pedaço de bolo", mas, de qualquer forma, importa-nos mais constatar a necessidade de manter em alguma medida um âmbito com este caráter, i.e., ao mesmo tempo conceitual e instanciado (regra e caso), ou universal dado já nos casos, tanto quanto seria necessário a manutenção de alguma forma de *impredicatividade* no funcionamento do âmbito normativo.

isso aconteceu’. Obviamente, simplesmente isso não poderia ser uma convicção matemática, necessária, protesta o interlocutor, e a resposta faz já menção a algo com um estatuto geral: aparece a noção de um ‘procedimento’ que poderia, como uma questão de fato, ser sempre executado novamente. Esta última resposta, que apela a uma possibilidade que seria apenas factual, é também descartada logo sem seguida como insuficiente, pois não seria sempre verdadeiro que podemos factualmente executar o procedimento. Nesta intervenção, aparece ainda uma nota muito importante posta na margem por Wittgenstein, questionando o carácter particular dos padrões nas provas por figuras: ‘essa correlação’ não diria respeito simplesmente à correlação na prova em questão, pois algo não pode ser ao mesmo tempo o padrão de medida e a coisa mensurada, ou seja, se fosse um padrão completamente particular, ele suporia a medida (ou as relações) que deveria representar. Sendo assim, chegamos à idéia pela qual a figura nos fornece um modelo para ser usado em relação com outros padrões semelhantes. Mas o interlocutor deseja ainda ressaltar o carácter não factual desse modelo, pois ele deve mostrar o que *podemos* fazer e não apenas o que fizemos esta vez, desde que, justamente, não poderíamos fazer uma correlação impossível. É aqui, portanto, já quase no final da 40, que o aspecto relativo aos supostos procedimentos absurdos vem em socorro para mostrar o ponto em questão: a figura também poderia mostrar a impossibilidade, e claramente não porque supõe a possibilidade *em princípio* do desenho da relação impossível, mas porque por meio dela seguimos fazendo determinadas correlações e não outras, ou desistimos de colocar determinados padrões juntos e não outros. Sendo assim, é o caso que o particular tem um uso geral, e não que ele supõe ou representa modelos independentes. Pelo que se conclui na passagem seguinte:

(...) I should like to say that it is not merely these individual figures that are correlated in the proof, but the shapes themselves. But this surely only means that these shapes are well impressed on my mind; are impressed as paradigms. (...) (RFM, I, 41)

É nesta medida que regras são expressas instanciadas em figuras particulares: na medida em que são *impredicativas*, não são dadas independentemente e não podem ser descritas, tal como a noção de ‘operação’ no *Tractatus* pretendeu expressar a generalidade como uma determinação interna:

We would like to say: ‘Negation has the property that when it is doubled it yields an affirmation’, but the rule doesn’t give a further description of negation, it constitutes

negation. (...) Geometry no more speaks about cubes than logic does about negation. Geometry defines the form of a cube but does not describe it. If the description of a cube says that it is red and hard, then 'a description of the cube' is a sentence like 'This box has the form of a cube'. But if I describe how to make a cubical box, doesn't this contain a description of the form of a cube? A description only insofar as this thing is said to be cubical, and for the rest an analysis of the concept of cube. (...) It also looks as if the essence of negation had a double expression in language: the one whose meaning I grasp when I understand the expression of negation in a sentence, and the sentence, and the consequences of this meaning on the grammar. (*PG*, I, II, 14-15)

(...) But suppose we see such a cube: are we immediately presented with the rules for the possible combinations, i.e., the geometry of the cube? Can I read of the geometry of the cube form a cube? Thus the cube is a notation for the rule. And if we had discovered such a rule, we really wouldn't be able to find anything better than the drawing of a cube to use as a notation for it. (...) (*PG*, I, II, 16)

Podemos falar de 'signos' aqui, em relação às figuras, mas exatamente na medida em que os signos constituem as operações no *TLP*, isto é, não por designarem nada externo dado independentemente, mas por expressarem o que não pode ser descrito. Esta é de fato a noção de 'signo' neste período no pensamento de Wittgenstein.

'Of course the grammatical possibilities of the negation sign reveal themselves bit by bit in the use of the signs, but I think negation all at once. The sign 'not' is only a pointer to the thought 'not'; it is only a stimulus to produce the right thought, only a signal.' (If I were asked what I mean by the word 'and' in the sentence "pass me the bread and butter" I would answer by a gesture of gathering together; and that gesture would illustrate what I mean, in the same way as a green pattern illustrates the meaning of 'green' and the T-F notation illustrates the meaning of 'not', 'and', etc.) For instance, this sign for negation:

P	
T	F
F	T

is worth no more and no less than any other negation sign; it is a complex of lines just like the expression 'not-p' and it is only made into a sign for negation by the way it works – I mean, the way it is used in the game. (The same goes for the T-F schemata for tautology and contradiction). (*PG*, I, II, 17)

E as figuras são então privilegiadas exatamente para deixar claro este caráter do signo que Wittgenstein pretende ressaltar neste momento:

Here it can easily seem as if the sign contained the whole of the grammar; as if the grammar were contained in the sign like a string of pearls in a box and he only to pull it out. (But this kind of picture is just what is misleading us). As if understanding were an instantaneous grasping of something from which later we only draw consequences which already exist in an ideal sense before they are drawn. As if the cube already contained the geometry of the cube, and I had only to unpack it. But which cube? Or is there an ideal geometrical cube? – Often we have in mind the process of deriving geometrical

propositions from a drawing, a representation (or a model). But what is the role of the model in such a case? It has the role of a sign, a sign employed in a particular game. – And it is an interesting and remarkable thing how this sign is employed, how we perhaps use the drawing if a cube again and again in different contexts. – And it is this sign, (which has the identity proper to a sign) that we take to be the cube in which the geometrical laws are already laid up. (...) (PG, I, II, 18)

O signo expressa este caráter instância e caso (factual com caráter *em princípio*), que não representa nada externo, não remete a um sentido ou uma referência, mas determina o sentido por colapsar o atual e o possível:

Procuramos convulsivamente após uma significação (bedeutung), após um sentido (sinn), e não encontramos nada, de tal modo que consideramos que isso que procuramos é uma essência etérea. Novamente, o substantivo nos leva a crer em uma substância. A questão ‘o que é a regra já que ela não é o signo?’ é traçada a partir de um plano gramatical falso, pois pelo ‘o que é’, nós representamos um ‘isso’ ou esperamos em resposta um ‘isso’. Então, a questão é parecida com a questão ‘o que é o tempo?’ (WVC, p.240)

É interessante notar que um bom argumento contra a posição de acordo com a qual as figuras poderiam constituir, elas mesmas, demonstrações faz apelo justamente ao caso da redução por absurdo, afinal nenhuma figura contraditória poderia ser desenhada. Certamente que não podemos desenhar um exemplo de figura contraditória, mas se estamos dizendo que as figuras expressam justamente este caráter geral, sem suporem com isso nenhuma possibilidade *em princípio* correspondente, o que estamos dizendo é que a figura pode expressar exatamente o que a tentativa do desenho em questão falha, da mesma maneira que a expressão da contradição não significa a possibilidade do impossível, porque não há tal possibilidade, mas expressa um limite para o cálculo. Ou seja, não é preciso desenhar esta impossibilidade, de mesmo modo que não poderíamos figurá-la, mas apenas expressar o mesmo limite. É justamente este ponto o que pretende chamar a atenção Wittgenstein quando pensa as provas matemáticas em geral como figuras: não podemos figurar contradições apenas no mesmo sentido em que não podemos supor a possibilidade do impossível discursivamente, por outro lado, podemos sim usá-las da mesma maneira que ‘A & ~A’ pode expressar uma contradição em um cálculo, pois se ele o faz, não o faz supondo a possibilidade do impossível.

Sendo assim, quando a prova institui uma necessidade, ela não o faz por exclusão ou suposição de um âmbito ‘em princípio’, mas apenas porque colapsa caso e regra na figura, a prova não é jamais a instância exemplar de um *em princípio* dado, mas sempre

a expressão da própria necessidade. E este é, como veremos, também mesmo caráter é atribuído pelo autor à indução matemática.

What is in common between the purpose of a Euclidean construction, say the bisection of a line, and the purpose of deriving a rule from rules by means of logical inferences? The common thing seems to be that by the construction of a sign I compel the acceptance of a sing. (*RFM*, III, 29)

A relação entre as provas por figuras e o caso das inferências na dedução de instâncias particulares a partir de uma proposição geral é então estabelecida por Wittgenstein da seguinte forma:

‘It (the proof) is the model for what is called such-and-such.’ But what is the transition from ‘ $(x)fx$ ’ to ‘ fa ’ supposed to be a model for? At most for how inferences can be drawn from signs like ‘ $(x)fx$ ’. I thought of the model as a justification, but here it is not a justification. The pattern $(x)fx \therefore Fa$ does not justify the conclusion. If we want to talk about a justification of the conclusion, it lies outside this schema of signs. And yet there is something in saying that a mathematical proof creates a new concept. – Every proofs is a it were an avowal of a particular employment of signs. But what is it an avowal of? Only of *this* employment of the rules of transition from formula to formula? Or is it also an avowal in some sense, of the ‘axioms’? Could I say: I avow $p \rightarrow p$ as a tautology? I accept ‘ $p \rightarrow p$ ’ as a maxim, e.g. of inference. The idea that proof creates a new concept might also be roughly put as follows: a proof is not its foundations plus the rules of inference, but a new building – although it is an example of such and such a style. A proof is a new paradigm. (...) The proof creates a new concept by creating or being a new sign. Or–by giving the proposition which is its result a new place. (For the proof is not a movement but a route.) (*RFM*, III, 41)

O caráter necessário das demonstrações se relaciona diretamente com a capacidade de se tomar um particular (atual) como tendo caráter geral, isto é, como um paradigma, *em princípio*, sem que isso precise significar jamais supor a determinação (ou justificação) adicional do caso particular por um âmbito *em princípio* independente.

A aparentemente estranha expressão ‘ver algo como’ associada às provas por Wittgenstein ressalta então não um caráter sensível essencial inerente às demonstrações, mas justamente este aspecto fundamental ao qual Wittgenstein pretende chamar a atenção, pois ‘ver’ realmente pareceria dizer respeito a uma experiência física, do próprio ‘objeto’ (interpretado/facutal), mas que é então entendida como não sendo separável da maneira ‘como o objeto é visto’. O ‘como’ ressaltaria, portanto, o caráter ‘conceitual’, ou aquilo que o ‘ver algo como’ tem em comum com uma interpretação (em princípio). Mas o ‘ver algo como...’ operado na prova se diferencia tanto de uma interpretação quanto de uma mera visão, e não poderia jamais ser entendido dessa

maneira, justamente porque não há a identificação do que interpreta independentemente do que está sendo interpretado e, portanto, *o colapso entre o pensar e o ver* do qual Wittgenstein nos fala diz respeito justamente ao colapso entre o signo e significante, ou entre *o factual* e o *em princípio*, no âmbito normativo.

But since it is the description of a perception, it can also be called the expression of thought.—If you are looking at the object, you need not think of it; but if you are having the visual experience expressed by the exclamation, you are also *thinking* of what you see. Hence the flashing of an aspect on us seems half visual experience, half thought. (...) (PI, II, XI)

The colour of the visual impression corresponds to the colour of the object (this blotting paper looks pink to me, and is pink)—the shape of the visual impression to the shape of the object (it looks rectangular to me, and is rectangular)—but what I perceive in the dawning of an aspect is not a property of the object, but an internal relation between it and other objects. It is almost as if 'seeing the sign in this context' were an echo of a thought. (PI, II, XI)

O estatuto da *mudança de aspectos* no pensamento de Wittgenstein é que ela parece situar-se entre o físico e o abstrato, que é o que precisaríamos para dar conta da passagem de um enunciado ao âmbito normativo, o que suporia necessariamente um colapso entre a verdade e a semântica do enunciado. As figuras aparecem então como privilegiadas para expressar este colapso, e entender o que uma prova matemática é capaz de fazer como o que uma figura faz significa também atestar este caráter. É exatamente para expressar o mencionado colapso entre verdade e semântica que Wittgenstein compara as provas matemáticas com figuras, ressaltando a capacidade dessas últimas ‘mostrar’ algo que não pode ser descrito independentemente, e que é uma configuração factual, mas, ao mesmo tempo, carrega a força normativa de um modelo, isto é, o papel atribuído a uma determinação em princípio.

‘I had never seen the pentagram in the pentagon.’ It is a new experience to me. But is it the experience teaching me that the pentagram fits the pentagon? We feel that there are two «visual» individualities which we see in the third: we see p combined and that we see that they are capable of this particular combination. The fact is that the combination strongly strikes us. ‘The visual image [Plp] fits the visual image P.’ The importance of this prop lies in that it seems a prop. of experience and that on the other hand it also is used as a prop. of geometry i.e. of grammar. (Wittgenstein, 2000, item 148 15r)

Desse modo, podemos entender como Wittgenstein aborda a mudança e permanência que parece ocorrer em uma demonstração matemática: as noções mudam, porque fazemos algo diverso com elas, mas, ao mesmo tempo, a força normativa dessa

mudança consiste em ela parecer remeter-se ao que de fato seria sua natureza, daí o próprio sentido de estabelecer uma relação interna.

Our visual impression changes. But can't 'mustn't' we say that the new experience would have been impossible if the old one hadn't been what it was? Such that we seem bound to say the new exp. was already performed in the old one. Or that I found something new which was already in the essence of the first picture. We seem to have demonstrated an internal property of the old picture. (Wittgenstein, 2000, item 148 15v)

Demonstrating that this is contained in this 'It is in the nature of this to contain this.' If you do this and this etc you get 55 (...) The whole question is really: 'can it strike you what a thing is?' (Wittgenstein, 2000, item 148 17r)

Esta colocação da abordagem das demonstrações matemáticas nos termos da 'visão de aspectos' nos levaria a abandonar toda idéia de uma determinação em princípio relativa às noções envolvidas, pois algo novo seria introduzido, mas, ao mesmo tempo, tratar-se-ia de uma determinação necessária. Pelo que parece que, na instituição da necessidade, precisamos de algo ao mesmo tempo com caráter factual, em princípio e, assim, situado entre os dois.

It seems I make you see something about its essence. You get a new experience; but this experience, it seems, teaches you something about the essence, the internal nature of the formula. It seems to teach you a mathematical (or logical) truth and this does not seem to be a rule of grammar but a truth about the nature of things. If I made an experiment with a certain figure we can imagine this or that result. But if I draw your attention to a feature it consists of ... appears to have 1) a grammatical meaning 2) a physical meaning & 3) a meaning lying between these two. (Wittgenstein, 2000, item 148 18r)

3.7. O que pode ser dissolvido por comparação ao tratamento do infinito matemático

Em relação à determinação necessária das proposições matemáticas, que viemos tratando, certamente a comparação com o caso do infinito pode ser esclarecedora. A abordagem do infinito por Wittgenstein é também um caso particular da impossibilidade de determinação independente das instâncias de um conceito no âmbito normativo da matemática. Wittgenstein não deseja recusar o uso que se faz do infinito, mas negar a imagem extensional de sua determinação. Entretanto, com isso, é importante ainda negar também a idéia segundo a qual sua determinação é uma determinação *em princípio*, pois, justamente, esta parece significar novamente que existe alguma forma de realidade infinita esperando para ser atualizada, na medida mesma em que se

introduz a idéia de uma possibilidade sobre-humana de enumeração, por oposição a uma possibilidade meramente factual. Como já notamos, essas observações ganham uma importância particular no período intermediário de sua Filosofia.

(...) you can even say that the arrow points to infinity; but does that mean that there is something – infinity – at which it points, as at a thing? – It's as though the arrow designates the possibility of a position in its direction. But the word 'possibility' is misleading, since someone will say: let what is possible now become actual. And in thinking this we always think of a temporal process, and infer from the fact that mathematics has nothing to do with time, that in its case possibility is already actuality. (*PG*, II, VII, 40)

Ao se opor também ao tratamento 'em princípio' do infinito, Wittgenstein não deseja negar a determinação de nossas séries infinitas por meio de regras, mas evitar a famosa abjeção de Cantor segundo a qual a própria idéia de uma potencialidade infinita já suporia a existência de alguma atualidade, que a determina e justifica. Para Cantor, se podemos efetuar divisões ou adições ao infinito indefinidamente é apenas porque existe a *infinitude*, ainda que esta não possa ser diretamente experimentada, enquanto uma condição de possibilidade de tais operações:

Não existe dúvida de que não podemos proceder sem quantidades variáveis, no sentido do infinito potencial: e disso pode ser demonstrado a necessidade do infinito atual. Para existir uma quantidade variável, o domínio de sua variabilidade deve ser estritamente conhecido antes através de uma definição. Como quer que seja, **esse domínio não pode ser ele mesmo variável** (...). Cada infinito potencial rigorosamente aplicado matematicamente supõe um infinito atual. (Cantor, *In*: Rotman, 1993, p.44, grifo nosso)

Aqui é como se Wittgenstein respondesse: 'então precisamos nos desfazer das duas idéias', pelo menos na medida em que a primeira supõe a segunda e, assim, elas não deixam claro o caráter normativo da matemática, pois ainda supõem a possibilidade de um 'domínio de determinação independentemente dado', mesmo no âmbito normativo. Mais genericamente, o infinito potencial não pode supor uma determinação que pareça ainda dever ser justificada independentemente, pois um construtivista jamais poderia ser construtivista para os próprios objetos que determinam as regras de construção e, sendo assim, a aceitação de alguma forma de realismo torna-se inevitável. A idéia de 'determinações em princípio' deve ser recusada, tanto no caso do infinito, quanto no caso das próprias demonstrações matemáticas, se introduz novamente a idéia de uma justificação adicional. Pois, assim, falha em ressaltar a impossibilidade com a qual nos

deparamos no âmbito matemático, e que deve ficar clara para podermos evitar as confusões filosóficas do âmbito empírico com o âmbito normativo.

Wittgenstein precisa ao mesmo tempo recusar a explicação em prosa do infinito matemático, para afastar a imagem enganosa de uma totalidade empírica, mas não pode fornecer ele mesmo uma nova explicação de nosso uso matemático do infinito, que não deseja recusar, nem tampouco negar, por esta ausência, aquilo que se pretende explicar, isto é, a nossa prática de cálculo. Portanto, não lhe é permitido nem negar nem afirmar a existência do que quer que seja. “Finitismo e behaviorismo são tendências enganosas completamente similares. Ambos dizem, mais corretamente, tudo que temos aqui é... Ambos negam a existência de alguma coisa, ambos tendo em vista escapar de uma confusão.” (*RFM*, II, 61) Não é porque não podemos escrever a série infinita inteira que ela deve ser tomada como determinada *em princípio*, simplesmente a série não é independentemente dada como uma totalidade ordinária. Da mesma maneira, como avaliamos, é pela impossibilidade de determinação independente do objeto matemático que o próprio realismo matemático é recusado. A noção de ‘em princípio’, nos dois casos, na medida em que re-introduz esta determinação independente, continua sendo enganosa. O que a noção de ‘em princípio’ desejaria expressar seria já dado pelo funcionamento da prática normativa, sem que fosse preciso supor uma separação entre a verdade e a semântica das proposições matemáticas. O ponto é, portanto, e novamente, muito mais que não podemos explicar o funcionamento normativo da generalidade matemática do que negar a sua determinação.

Deve-se evitar a palavra ‘infinito’ na matemática?

Sim; lá onde esta parece conferir um significado para o cálculo, ao invés de antes recebê-lo dele.

O modo de dizer: mas se se olha o cálculo, não há nada infinito lá – naturalmente um modo de dizer inadequado – mas significa:

É realmente necessário aqui evocar a figura infinita (a figura de uma grande medida)?

E qual sua conexão com o cálculo?

Pois esta conexão é diferente daquelas de outras figuras com o cálculo.

Então dizer assim, como se se estivesse desapontado, por não ter encontrado nada infinito no cálculo é (certamente) estranho; pergunte: qual a aplicação ordinária da palavra ‘infinito’, que nos fornece seu significado, e qual é agora sua aplicação com esses cálculos matemáticos? (*RFM*, II, 58)

A comparação com o behaviorismo citada acima é, também, esclarecedora. Como se sabe, a psicologia e a matemática são dois temas de interesse central para a Filosofia do segundo Wittgenstein. Isso não é por acaso, tratam-se de dois âmbitos nos quais lidamos com proposições necessárias, e dois âmbitos nos quais a dúvida não parece

fazer sentido. Ora, Wittgenstein considera que a necessidade, dada com a determinação semântica, nos faz supor teses metafísicas: é a consideração da necessidade que nos conduz à confusão filosófica.

O que é típico no fenômeno que estou tratando é que um *mistério* sobre algum conceito matemático não é imediatamente interpretado como uma concepção errônea, como uma confusão de idéias; mas antes como alguma coisa que de qualquer modo não pode ser menosprezada, e talvez deva mesmo ser respeitada. (*RFM*, V, 16)

Ficamos impressionados com a necessidade matemática, tentamos explicá-la adicionalmente, supomos então uma determinação não-lingüística. Dessa forma, é correto dizer que o behaviorismo, na Psicologia, está para o Finitismo, na Matemática, assim como o mentalismo, na Psicologia, está para o Platonismo, na Matemática. Mentalismo e Platonismo visam explicar a determinação da necessidade relativa ao significado supondo alguma forma de realidade privilegiada, uma explicação adicional, onde todo ‘em princípio’, e, portanto, o infinito, é já atual. Já Finitismo e Behaviorismo, diante da falência de tal explicação, parecem recusar a própria determinação necessária relativa ao âmbito do significado. Fazendo isso, todas as tendências em questão tratam, para Wittgenstein, o necessário como contingente, seja por supor que ele pode ser ulteriormente determinado, como são determinadas as proposições contingentes, pelas regras de significado; seja por tomá-lo como não mais necessário, dado que a ulterior determinação seja impossível. Mas Wittgenstein afirma: não é ulteriormente determinado justamente porque é necessário, portanto, que não seja ulteriormente determinado não anula sua necessidade, ao contrário, a expressa.

Dizemos: se realmente seguimos a regra da multiplicação, devemos todos encontrar este mesmo resultado. Agora, se este é apenas algo como um modo histérico de colocar as coisas, que encontramos na fala universitária, isso não nos interessa demais. É, como quer que seja, a expressão de uma atitude no que diz respeito à técnica de cálculo, que aparece em qualquer lugar de nossas vidas. A ênfase no *deve*, corresponde à inexorabilidade dessa atitude tanto em relação às técnicas de cálculo, quanto em relação às demais técnicas relacionadas. O *deve* matemático é apenas outra forma de dizer que a matemática forma conceitos. (*RFM*, IV, 67)

Se, como vimos, é a necessidade que condiciona a impossibilidade de justificação adicional, a leitura cética parece *não significar nada de todo* porque consiste em aceitar que a impossibilidade de justificação ou garantia adicional significa contingência, quando é precisamente o contrário. Se isso é correto, em relação ao Behaviorismo, o

que Wittgenstein gostaria de dizer é: negar a explicação mentalista não pode significar dizer que toda prática humana reduz-se a uma descrição comportamental, negando com isso o próprio âmbito normativo do significado. E podemos, portanto, entender também que, em relação ao Finitismo, o que Wittgenstein gostaria de dizer é: negar a explicação platônica da determinação matemática por recurso a uma atualidade infinita não pode significar negar novamente a própria determinação normativa do significado. A idéia, tal como entendemos, é que a característica da normatividade é ser justamente uma prática atual com status ‘em princípio’, por assim dizer, um colapso entre atualidade e possibilidade, que constitui o uso normativo da linguagem, e permite a própria separação entre atualidade e possibilidade no âmbito contingente desta. Como Wittgenstein afirma: “As peças de um jogo de xadrez não são nem simples peças de madeira, nem signos de realidades independentes, mas são ‘animadas’ pelo uso que se faz delas.” (WVC, p. 105).

In the rules for the variable *a* a variable *b* may occur and so may particular numbers; but not any totality of numbers. But now it seems as if this involved *denying the existence* of something in logic: perhaps generality itself, or what the dots indicate; whatever is incomplete (loose, capable of further extension) in the number series. And of course we may not and cannot deny the existence of anything. (PG, II, II, 10)

Our difficulty really already begins with the infinite straight line; although we learn even as children that a straight line has no end, and I do not know that this idea has given anyone any difficulty. Suppose a finitist were to try to replace this concept by that of a straight segment of definite length?! But the straight line is a law for producing further. (RFM, V, 36)

Schmitz comenta o que está envolvido em negar a distinção entre *factual* e *em princípio* na matemática, para Wittgenstein:

Si on peut attribuer à la philosophie de Wittgenstein un ‘actualisme’ systématique et, réciproquement, une méfiance constance à l’égard de toute idée d’une réalité ‘potentielle’, il reste que ce n’est pas un actualisme au sens aristotélicien du terme ‘acte’, car celui-ci reste prisonnier de l’idée que le possible n’est qu’un réel en attente. Attribuer une ‘réalité’ quelconque à ce que nous disons possible (empiriquement) n’a aucun sens pour Wittgenstein, mais cela ne signifie pas que l’on doive tomber dans ce qu’il évoque comme étant un ‘postivisme que mériterait un nom spécial’ et qui consisterait justement à ne s’en tenir qu’à ce qui est actuellement donné au sens aristotélicien. De fait, une des lignes directrices la plus apparente de la réflexion wittgensteinienne est la tentative réitérée, du *Tractatus* aux *Investigations philosophiques*, de penser le ‘possible’ en dehors de l’opposition aristotélicienne de l’acte et de la puissance. (Schmitz, 1988, p. 106)

Do ponto de vista da Filosofia de Wittgenstein, podemos dizer que, quando uma proposição é provada, ela se torna matemática, e isso significa, ela se torna normativa e

atemporal, daí Prawitz precisar dizer que ela já era verdadeira antes. Mas, por que isso parece tão irrazoável? Por que gera tantos problemas? Porque justamente significa uma modificação no sentido da proposição em questão. Mas o que queremos dizer quando mantemos, por outro lado, que uma proposição necessária ‘já deve ser sempre verdadeira’? Ora, se seu sentido não muda, tampouco deve mudar sua verdade, afinal, ela é necessária, e não poderia tornar-se necessária, sem mudar de sentido, se não fosse também já determinadamente verdadeira. Isso significa, para Wittgenstein, que o que queremos de fato dizer aqui é ‘a proposição necessária, por ser necessária, não tem tempo’. Mas, então, o que significaria dizer, ‘agora ela foi, *de fato*, provada’. Isso deveria significar: ‘só agora, ela não tem tempo’. E, se é assim, trata-se necessariamente de outra proposição, pois não apenas o seu valor de verdade mudou, mas também sua semântica e seu uso. Faz parte do funcionamento dos padrões normativos que estes sejam tomados como atemporais, sem que isso precise significar que eles eram antes, desde sempre, determinadamente verdadeiros *em princípio*. Dessa forma, não precisamos dizer que deveria existir, desde sempre, algo (provas em abstrato) para justificar a verdade desta proposição, pois a idéia é que trata-se apenas de uma proposição matemática se é atemporal. Ou seja, a proposição matemática é completamente diferente de uma proposição empírica verificada, em relação a qual as condições de verdade permanecem as mesmas. De fato, no caso da proposição matemática, sua falsidade deveria tornar-se impossível, então, não se trata de dizer aqui que não exista relação entre a conjectura e a proposição provada (até porque a noção de sistema de proposições não é jamais completamente abandonada na Filosofia da Matemática de Wittgenstein), mas de ressaltar que essa relação é completamente distinta da relação entre uma proposição empírica não verificada, e esta mesma proposição após verificada, pois, no caso da proposição matemática, não é apenas sua verdade ou falsidade que é descoberta, mantendo-se ainda o outro valor como uma possibilidade *em princípio*, mas, e isso não é um detalhe sem maiores consequências, toda possibilidade é já uma necessidade quando a sentença é uma norma.

Sendo assim, a leitura que Dummett faz de Wittgenstein está correta na medida em que, realmente, a distinção forte proposta por Wittgenstein entre normativo e empírico, o impede de aceitar qualquer separação entre um âmbito *em princípio* e um âmbito *factual* no que diz respeito ao contexto normativo da matemática. Entretanto, fazer isso não significa negar a determinação da necessidade ou do significado. “It is one of the most deep rooted mistakes of philosophy to see possibility as a shadow of

reality. But on the other hand it can't be an error; not even if one calls the proposition such a shadow.” (*PG*, II, II, 10) O suposto ‘em princípio’ é já a maneira como a linguagem funciona. Assim, as conclusões irrazoáveis que Dummett atribui a Wittgenstein podem ser enfraquecidas se entendermos que 1) aceitar a distinção entre *factual* e *em princípio* na matemática conduz fatalmente a alguma forma de realismo (o que abordamos no item anterior); 2) negar a distinção não pode significar negar a necessidade do âmbito normativo, ao contrário, posto que significa precisamente ser coerente com esta. Portanto, não se trata de abandonar a necessidade da determinação do âmbito necessário, mas apenas manter que esta não possui, e não pode possuir, garantia adicional.

Wittgenstein afirma, comentando o que significa dizer que o ‘dever’ matemático é uma decisão espontânea: “Você diz ‘você deve’; mas não pode dizer o que o obriga” (*RFM*, VII, 24). Esta talvez possa ser tomada como a característica central da normatividade em Wittgenstein: um agir necessário e sem, por isso mesmo, razões adicionais que fundem a própria necessidade. Pois, quando se segue uma regra “o procedimento fundamentado pela regra é a prova da regra” (*RFM*, VI, 16). Isto nos fornece a base para a compreensão do que vem a ser uma demonstração matemática para Wittgenstein. Aquilo em relação ao que não podemos nos enganar é simplesmente já suposto, o que significa dizer: não existe independentemente de qualquer justificação, e, como não há justificação legítima que suponha o que quer justificar, então o que impossibilita a justificação (a necessidade em questão), parece requerê-la; mas, se fosse preciso justificar, não seria necessário, e, assim, a justificação seria possível. Logo, o que deveria corroborar a necessidade de justificação, a refuta. Se existissem verdade e semântica determinadas independentemente no que se refere às regras, necessariamente poderíamos nos enganar, porque poderíamos acessar as regras (*em princípio*), digamos assim, independentemente da verdade (*factual*) do conteúdo em questão. Mas é a mesma razão pela qual não existe uma tal independência que nos obriga a manter que as regras são convenções. Obviamente, e por isso mesmo, isso não significa que as regras sejam convencionadas expressamente por alguém, uma vez que isso jamais seria suficiente para determinar o significado sem já, novamente, supô-lo implicitamente.

‘Tenho um conceito particular de regra. Se nesse sentido, alguém a segue, então desse número pode-se somente chegar àquele.’ Isso é uma decisão espontânea. Mas então por que digo ‘eu devo’, se é minha decisão? Bem, pode não ser isso o que devo decidir? Ser uma decisão espontânea meramente significa: é assim que ajo; não peço nenhuma razão.

(...) Naturalmente, quando eu digo ‘eu decido espontaneamente’, isso não significa: considero que número seria realmente o melhor aqui e então opino. (*RFM*, VI, 24)

É, portanto, em um sentido análogo ao que se diz, em uma Filosofia teísta, ‘Deus é livre’, posto que não externamente determinado, mas ainda assim necessário, em seus atos como Deus, que podemos dizer que as demonstrações matemáticas não são contingentes, mas também a elas não se aplica qualquer a noção de ‘justificação externa’ (e entenda-se isso aqui como um pleonismo posto que toda justificação é externa). Não se trata de traçar aqui uma analogia anacrônica com uma suposição metafísica, mas apenas ressaltar o papel conceitual normativo que a própria noção de ‘Deus’ pode cumprir no contexto em questão, mesmo quando não há mais metafísica que gramática. Entender o funcionamento do âmbito normativo da linguagem, é entender o que nos faz supor as explicações metafísicas da necessidade, pois, para tudo aquilo que cumpre um papel normativo, este aparentemente estranho caráter, certamente aberto às confusões conceituais e paradoxos, se impõe: ser determinado sem determinação exterior. Mas nós não precisamos dizer por isso que então não sabemos mesmo o que provamos, desde que saibamos que esta é apenas a maneira que nosso discurso normativo funciona. Não precisamos tomar este caráter como correspondendo a entidades metafísicas, não precisamos tornar extensivo o necessário, nem tomar a impossibilidade de sua ostensão como uma aporia, ela apenas mostra a impossibilidade de avançarmos em uma explicação adicional da normatividade, mas isso não anula nem o caráter necessário pelo qual chegamos mesmo à formulação do problema, nem nos permite voltar atrás quanto à impossibilidade de justificação para um modelo de determinação externa da própria necessidade, que é o que suas premissas excluem. Já nas *RP*, comentando como uma proposição matemática poderia ter sentido antes de ser provada, Wittgenstein afirma:

Is it like this: I need a new insight at each step in a proof? This is connected with the question of the individuality of each number. Something of the following sort: supposing there to be a certain general rule (therefore one containing a variable), I must recognize each time afresh that this rule may be applied here. No act for foresight can absolve me from this act of insight [later marginal note: act of decision, not insight.]. (*PR*, XIII, 149)

Aqui ele diz que seria preciso uma ‘intuição’ e coloca uma nota corrigindo: “ato de decisão, não de intuição”. O uso inicial do primeiro termo certamente nos indica uma influência do intuicionismo de Brouwer, mas sabemos que a substituição da ‘intuição’ pela ‘decisão’, se introduz uma maior liberdade, certamente é muito mais aquela que

significa ‘autonomia’ do que a que significa ‘contingência’, pois é o mesmo autor que afirma tratar aqui do mesmo sentido pelo qual a regra geral está já no seu casos, no âmbito matemático.

As I’ve already said, it seems clear to me that I can assert a general proposition as much or as little as the equation $3 \times 3 = 9$ or $3 \times 3 = 11$. (...) What makes understanding difficult is the misconception of the general method of solution as only an – incidental – expedient for deriving numbers satisfying the equation. Whereas it is in itself a clarification of the essence (nature) of the equation. Again, it isn’t an incidental device for discovering an extension; it’s an end in itself. (PR, XIII, 150)

E é justamente isso o que impede o uso da noção da ‘justificação’ e de determinações ‘em princípio’, nos conduzindo à idéia de autonomia aqui, pois o justificado deveria possuir a mesma multiplicidade, isto é, não seria independente, do que deveria justificá-lo (o supostamente *em princípio*).

Wouldn’t the idea of an hierarchy mean that merely posing a problem would have to be already preceded by a proof, i.e. a proof that the question makes sense? But then I would say that a proof of sense must be a radically different sort of proof from one of a proposition’s truth, or else it would in its turn presuppose yet another and we’d get into an infinite regress. (PR, XIII, 149)

Vemos assim que se Wittgenstein pode ao mesmo tempo não recusar o infinito como usado na prática matemática, mas negar as duas explicações teóricas deste, seja por correspondência extensional, seja por possibilidade *em princípio*, é apenas pela sua maneira anti-revisionista de fazer Filosofia. Isso nos permite ainda esvaziar, parcialmente pelo menos, as aporias que se colocam para suas considerações sobre as demonstrações matemáticas.

Um dos exemplos mais interessantes dessa maneira anti-revisionista de fazer filosofia da matemática consiste nas suas observações sobre a não-enumerabilidade dos Reais por meio do argumento diagonal. Como se sabe, este expediente tem por objetivo mostrar que a cardinalidade dos Reais é superior a dos inteiros por meio da impossibilidade de enumeração dos primeiros. Qualquer tentativa de estabelecer uma relação biunívoca entre reais e inteiros originaria imediatamente um novo real, crescendo a totalidade em questão. A ilustração diagonal do procedimento consiste em supor, para gerar uma contradição, uma lista de números com decimais infinitos e mostrar que podemos sempre construir um diferente, que necessariamente não estaria nessa lista, por tomarmos, na diagonal, o primeiro decimal como diferente do primeiro

decimal do primeiro número, o segundo decimal como diferente do segundo decimal do segundo número, e assim por diante...Tal procedimento demonstraria a impossibilidade de fazermos uma lista de todos os reais, de tal modo que poderíamos concluir por serem os Reais maiores que os inteiros, ou, mais forte ainda, ser a continuidade não enumerável. Para Wittgenstein, o argumento ilustrado pelo procedimento demonstra uma incongruência gramatical não apenas porque não há de fato tal listagem infinita de números infinitos produzindo um novo número na diagonal, mas, sobretudo, porque a própria imagem relativa à tentativa de enumerar os reais para mostrar que nenhuma numeração será aceitável, por sempre podermos construir um número novo diferente dos outros, não corresponde a um experimento, isto é, não haveria mesmo sentido tentar levar a cabo tal procedimento com os reais. A ilusão em questão, a qual o procedimento diagonal deveria colocar fim e provar a impossibilidade, é a que interditaria a própria imagem do procedimento: a enumeração não é aplicada aos reais porque as regras que se aplicam a estes são distintas das regras aplicadas aos cardinais, e apenas a interpretação extensional nos permite supor o contrário, e nos permite mesmo imaginar a possibilidade de um tal procedimento. O ponto de Wittgenstein então é: a operação de enumeração não se aplica a um conjunto previamente dado de realidades, os números inteiros, podendo então se aplicar a outro conjunto análogo, o conjunto dos reais, mas a operação de enumeração é responsável mesmo pela formação da série dos cardinais, ela é a expressão da operação de sucessor. Por outro lado, se aplicamos a abstração relativa à regra de formação a um outro domínio, e supomos que se trata de uma descoberta a sua impossibilidade de aplicação, falhamos em notar que o estranho aqui seria a própria figura extensional, e que a diferença entre reais e inteiros não seria uma diferença de tamanho, mas de regras. Concluindo, do que seria uma expressão da falta de sentido em tratar os reais como inteiros, mantemos não apenas a legitimidade disto, mas, adicionalmente, concluímos a favor de uma propriedade extraordinária então atribuída aos primeiros. Supondo-se primeiro, extensionalmente, que a enumeração pode aplicar-se aos reais, conclui-se em seguida que tal enumeração não pode existir, embora tenha sentido ainda falar em ‘uma extensão decimal diferente de todas as outras’. Ora, para Wittgenstein, o que ocorreria aqui seria a expressão da falta de sentido do próprio procedimento. O problema não é o uso de uma demonstração indireta, por absurdo, mas o risco que se corre aqui com isso, a saber: o de se tomar uma definição como o resultado de uma descoberta. Antes de descobrir pelo procedimento diagonal que os reais não são enumeráveis, deveríamos dizer que chamamos não-enumeráveis números

que incluem diagonalizações. O problema da inversão presente na figura extensional seria o obscurecimento o caráter normativo da matemática.

Outro ponto importante de ser clarificado no que diz respeito às análises matemática de Wittgenstein diz respeito aos seus exemplos. À exceção dos resultados que carregam pretensões filosóficas já em suas formulações, Wittgenstein restringe suas análises à investigação de exemplos excessivamente simples e primários da matemática. Esta opção foi diversas vezes criticada como expressando um certo desconhecimento dos assuntos matemáticos por parte de Wittgenstein. Entretanto, tanto mais simples são os exemplos, mais eles permitem ver o tipo de estratégia para a qual Wittgenstein deseja chamar nossa atenção. Não é estranha sua fixação pelas noções iniciais, pelos procedimentos mais primários, pois é já com elas que nascem as ilusões conceituais mais enraizadas, e, portanto, mais difíceis de serem abandonadas, às quais dificilmente consegue-se ver em exemplos mais complexos, nos quais muito já é pressuposto. Esses expedientes simples são justamente os mesmos que são repetidos nos resultados então supostos com conclusão filosófica.¹² O que interessa a Wittgenstein é chamar a atenção para a repetição de uma mesma confusão conceitual, a qual fica já evidente no âmbito de empregos mais primitivos. Acusar Wittgenstein de não conhecer matemática suficiente por isolar estes exemplos seria tão cego quanto questionar sua competência lingüística pela análise dos jogos de linguagem isolados, que ele propõe nas Investigações Filosóficas, por exemplo. O objetivo em ambos os casos é o mesmo: lançar luz sobre conexões conceituais que a bruma de nossas construções mais complexas não permite ver.

E o ponto central envolvido nestas análises conceituais de Wittgenstein consiste em evitar, por caminhos diversos, a confusão entre o que seria o âmbito empírico (contingente) da linguagem e sua função normativa (necessária). “O que eu faço parece sempre ser: enfatizar uma distinção entre a determinação de um sentido e o emprego de um sentido.” (*RFM*, III, 37). O risco aqui é sempre o mesmo: tomar estas observações elas mesmas como teorias explicativas de nosso emprego da necessidade. Tomar as observações de Wittgenstein nesse sentido é conduzir-lhe mesmo à auto-contradição. É preciso mostrar que o discurso matemático está do lado das regras que nos permitem falar sobre as coisas, mas não se pode fazer isso por tomar o próprio discurso

¹² Poincaré e Wittgenstein estão também de acordo quanto a este ponto: “(...) dans le parties les plus élevées de la théorie des nombres, les notions mathématiques primitives ont déjà subi une élaboration si profonde, qu’il devient difficile de les analyser. » (Poincaré, 1968, p. 34)

matemático como o objeto de uma teoria filosófica, desde que esta teria também pretensão à necessidade, e, nesse sentido, seria uma meta-matemática, o que Wittgenstein recusa justamente pelo próprio caráter normativo da matemática. Então, se ao invés de uma análise conceitual, o discurso de Wittgenstein fosse uma teoria sobre os fundamentos da matemática, sua tarefa mesma já tomaria a matemática como não normativa, porque pareceria explicar o que justamente ele pretende esvaziar como passível de justificação adicional. Desta feita, a aparente carência de uma resposta para problemas erguidos pelas próprias análises de Wittgenstein, ainda que possa levá-las à acusação de insuficientes, é totalmente proposital. Importa-nos antes de tudo clarificar em que as explicações tradicionais se enganam, mostrando as analogias conceituais mal feitas, sem, com isso, erguer mais uma explicação do âmbito normativo. O que Wittgenstein deseja mostrar não é apenas que as demais explicações incorrem em anacronismos conceituais, mas que determinadas explicações não podem ser dadas, que ele não as fornece simplesmente porque elas não podem ser fornecidas, e que qualquer tentativa neste sentido incorrerá fatalmente em uma confusão do empírico com o normativo, porque tomará como objeto independente o que só pode funcionar como regra. Nesse sentido, a má-compreensão de Dummett acerca de Wittgenstein consiste em tomar que recusar as explicações teóricas do fato da determinação de nossas práticas dedutivas com regras acarrete negar o próprio fato que consiste na determinação destas práticas. Essa implicação não é válida: negar a teoria que explica um fato não implica negar o próprio fato, a implicação apenas parece proceder mediante a confusão anterior entre teoria e fato, isto é, entre prosa e prática, confusão pela qual a negação da primeira aparece imediatamente como também uma negação da segunda. Quando Wittgenstein afirma que não há nada, nem no mundo, nem em nossa mente, que determine cada passo da aplicação de uma regra, ele está colocando um problema para nossas teorias do significado. Todavia, Wittgenstein não subscreve com isso que deveria haver um padrão de correção em algum lugar para que nossas regras fossem determinadas, e que, portanto, se não há um tal padrão, somos livres para decidir, a cada passo, como aplicar uma regra. Ao contrário, Wittgenstein está tentando deixar claro em que sentido não pode haver nada que justifique nossa prática dedutiva. Não há nada contendo todos os passos das regras em algum lugar, mas isso não significa que não aplicamos as regras corretamente. O método de Wittgenstein consiste em fazer notar por vários caminhos distintos que há uma *relação interna* onde quer que haja relações necessárias, e é por isso que não seria correto falar em justificações nesses casos, desde que justificações

consistem sempre em relações externas. Isso significa que Wittgenstein recusaria a posição de Dummett, e dos construtivistas contemporâneos em geral, segundo a qual regras poderiam ser justificadas por outras regras. “This is always a case of the mistake sees general concepts and particular cases in mathematics.” (*PG*, II, VII, 40) Em matemática, os conceitos gerais são já internos aos casos particulares. Isso também significa que Wittgenstein tem que criticar, pela mesma razão, a possibilidade de que aplicações de regras possam envolver decisões no sentido de serem contingentes. Se fosse possível decidir seguir ou não uma demonstração, teríamos que ter uma relação externa entre os vários passos da prova, isto é, o oposto teria que ser possível, e tal consequência é a mesma envolvida na imagem de uma regra justificando a outra, e é a razão pela qual Wittgenstein deseja recusá-la. Negar que regras possam ser justificadas implica também negar que poderíamos escolher ou não segui-las, e é nesse sentido que Wittgenstein se afasta tanto da posição dos construtivistas contemporâneos, quanto da posição a ele atribuída por estes.

3.8. Poincaré e Wittgenstein sobre a indução matemática

Como se sabe, o princípio de indução matemático é o que permite que as demonstrações matemáticas possam, a partir do finito, atingir o infinito. Por ele, podemos mostrar que, para uma classe definida indutivamente, se uma propriedade é verdadeira dos indivíduos introduzidos pelas regras de base, e se mantém pelas regras produtoras, ela vale para todos os infinitos indivíduos pertencentes à classe em questão. Isto é, ele nos permite provar que, para todo $x \in C$, sendo C uma classe indutivamente definida, $P(x)$. Para Poincaré, o raciocínio indutivo seria o raciocínio matemático por excelência, isto é, fazer matemática seria proceder por indução.

On établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers. (...) C'est donc bien là le raisonnement mathématique par excellence et il nous faut l'examiner de plus près. (Poincaré, 1968, p. 38)

Entretanto, a indução matemática procede por uma generalização e, sendo assim, conclui Poincaré, ela adiciona conteúdo ao que é demonstrado, não sendo jamais analítica.

La contradiction nous frappera davantage si nous ouvrons un livre quelconque de mathématique ; à chaque page l'auteur annoncera l'intention de généraliser une proposition déjà connue. Est-ce donc que la méthode mathématique procède du particulier au général et comment alors peut-on l'appeler déductive ? (...) (Poincaré, 1968, p. 32)

Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes. Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade. Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques. Le théorème est vrai du nombre 1. Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2. Donc il est vrai de 2. Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3. Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite. On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant. De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique. Si le théorème est vrai de $n - 1$, il l'est de n . On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures. Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes. Il est facile maintenant de comprendre pourquoi toute conséquence particulière d'un théorème peut, comme je l'ai expliqué plus haut, être vérifiée par des procédés purement analytiques. Si au lieu de montrer que notre théorème est vrai de tous les nombres, nous voulons seulement faire voir qu'il est vrai du nombre 6 par exemple, il nous suffira d'établir les 5 premiers syllogismes de notre cascade ; il nous en faudrait 9 si nous voulions démontrer le théorème pour le nombre 10 ; il nous en faudrait davantage encore pour un nombre plus grand ; mais quelque grand que soit ce nombre nous finirions toujours par l'atteindre, et la vérification analytique serait possible. Et cependant, quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler. Je demandais au début pourquoi on ne saurait concevoir un esprit assez puissant pour apercevoir d'un seul coup d'oeil l'ensemble des vérités mathématiques. La réponse est aisée maintenant ; un joueur d'échecs peut combiner quatre coups, cinq coups d'avance, mais, si extraordinaire qu'on le suppose, il n'en préparera jamais qu'un nombre fini ; s'il applique ses facultés à l'arithmétique, il ne pourra en apercevoir les vérités générales d'une seule intuition directe ; pour parvenir au plus petit théorème, il ne pourra s'affranchir de l'aide du raisonnement par récurrence parce que c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini. (...) (Poincaré, 1968, pp. 39-40)

Le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence peut être mis sous d'autres formes ; on peut dire par exemple que dans une collection infinie de nombres entiers différents, il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres. On pourra passer facilement d'un énoncé à l'autre et se donner ainsi l'illusion qu'on a démontré la légitimité du raisonnement par récurrence. Mais on sera toujours arrêté, on arrivera toujours à un axiome indémontrable **qui ne sera au fond que la proposition à démontrer traduite dans un autre langage**. On ne peut donc se soustraire à cette conclusion que la règle du raisonnement par récurrence est irréductible au principe de contradiction. Cette règle ne peut non plus nous venir de l'expérience ; ce que l'expérience pourrait nous apprendre, c'est que la règle est vraie pour les dix, pour les cent premiers nombres par exemple, elle ne peut atteindre la suite indéfinie des nombres, mais seulement une portion plus ou moins longue mais toujours limitée de cette suite. (...) Cette règle, inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique *a priori*. (Poincaré, 1968, p.41, grifo nosso)

Lidar com o infinito como uma atualidade seria já, para Poincaré, encontrar ao mesmo tempo falsas totalidades impredicativas, e já por isso a indução não poderá jamais ser referida a uma totalidade extensional completamente dada, mas deverá sempre ser compreendida como necessariamente não analítica, ainda que necessária, e, por isso mesmo, recorrente, instituindo uma *potencialidade infinita* que será por ele chamada *sintética*, ainda que *a priori*. Além disso, uma classe indutiva jamais poderia ter sua legitimidade comprovada porque, para tanto, de acordo com Poincaré, seria necessário mostrar que a definição não implica contradições, isto é, que ela determina de fato uma classe, desde que uma definição contraditória não determinaria nada (Poincaré, 1956, p.107). Mas não seria possível fazer isso, nem, de fato, provar o que quer que seja sobre a classe em questão sem supor-se já o *princípio de indução*, pelo qual procede a definição e, assim, já a validade da definição em questão.

M. Couturat considère ces axiomes comme des définitions déguisées ; ils constituent la définition par postulats de zéro, du « suivant », et du nombre entier. Mais nous avons vu que pour qu'une définition par postulats puisse être acceptée, il faut que l'on puisse établir qu'elle n'implique pas contradiction. Est-ce le cas ici ? Pas le moins du monde. La démonstration ne peut se faire *par l'exemple*. On ne peut choisir une partie des nombres entiers, par exemple les trois premiers, et démontrer qu'ils satisfont à la définition. Si je prends la série 0, 1, 2, je vois bien qu'elle satisfait aux axiomes 1, 2, 4 et 5 ; mais, pour qu'elle satisfasse à l'axiome 3, il faut encore que 3 soit un entier, et par conséquent que la série 0, 1, 2, 3 satisfasse aux axiomes ; on vérifierait qu'elle satisfait aux axiomes 1, 2, 4, 5, mais l'axiome 3 exige en outre que soit un entier et que la série 0, 1, 2, 3, 4 satisfasse aux axiomes, et ainsi de suite. Il est donc impossible de démontrer les axiomes pour quelques nombres entiers sans les démontrer pour tous, il faut renoncer à la démonstration par l'exemple. Il faut alors prendre toutes les conséquences de nos axiomes et voir si elles ne contiennent pas de contradiction. Si ces conséquences étaient en nombre fini, cela serait facile ; mais elles sont en nombre infini, c'est toutes les mathématiques, ou au moins toute l'arithmétique. Alors que faire ? Peut-être à la rigueur pourrait-on trouver un moyen de montrer qu'un raisonnement nouveau ne pourra pas introduire de contradiction, pourvu que l'on suppose que, dans la suite des raisonnements antérieurs, nous n'en ayons pas rencontré jusqu'ici. S'il en était ainsi, nous serions certains que nous n'aurions jamais à craindre de contradiction. Mais *cela c'est faire de l'induction complète*, et c'est précisément le principe d'induction complète qu'il s'agirait de justifier. (Poincaré, 1905, XVI)

O ponto central da argumentação de Poincaré consiste em notar que toda prova por indução procede mediante o *princípio de indução*, e supõe uma definição indutiva que também supõe o princípio de indução. Ao seguir a definição, a prova por indução apenas prova algo para o domínio indutivamente definido por supor o princípio indutivo que a definição também supõe. Tal princípio não poderia ser, portanto, ele mesmo comprovado ou justificado, porque constituiria nossas próprias definições, sendo sempre já suposto. Ao mesmo tempo, e por isso mesmo, também a validade da

definição não poderia ser comprovada, pois o que quer que fosse provado para o domínio suporia já o princípio em questão. A partir disso, Poincaré conclui que o princípio indutivo, segundo ele, a base de todo raciocínio matemático, seria 1. não-analítico e, ao mesmo tempo, 2. não justificável empiricamente. Essas características seriam então transferidas para as provas por indução, que também não seriam analíticas, mas não poderiam ser justificadas externamente, pois suporiam sempre o princípio de indução. Daí Poincaré concluir que a indução matemática seria *sintética a priori*¹³, ou seja, adicionaria necessariamente conteúdo, mas não se justificaria por procedimentos independentes. As demonstrações por indução suporiam já o princípio suposto na definição do domínio sobre o qual se pretende provar algo e isso, de acordo com Poincaré, nos permitiria provar apenas uma generalidade que é já suposta na própria definição do domínio e que não pode ser, ela mesma, jamais comprovada.

Estas observações de Poincaré são interessantes para compreender algumas observações particularmente obscuras de Wittgenstein sobre o tema. Em 1930, Wittgenstein afirmou existirem dois tipos de provas matemáticas: i. provas diretas, pelas quais por meio de transformações procedemos de uma proposição particular à outra e ii. provas por indução, responsáveis por proposições gerais e, portanto, pelo sistema de proposições no qual as primeiras demonstrações se inseririam. “Existem dois tipos completamente diferentes de provas na matemática. O primeiro procede por certas regras de substituição (axiomas) de uma equação a outra. O segundo é a prova por indução matemática.” (AWL, A, XI) As passagens de proposições particulares a outras proposições particulares procederiam supondo o sistema de proposições formalmente similares, introduzido mediante as demonstrações por indução, responsáveis pelas proposições genéricas. Esta distinção corresponde bem à diferenciação feita também por Poincaré entre *verificação* e *demonstração*: enquanto as primeiras seriam *analíticas*, as segundas necessariamente adicionariam conteúdo, provando proposições genéricas e,

¹³ Chamar de *sintética a priori* a necessidade matemática em questão não é o central nas observações de Poincaré, o importante é compreender o que ele mesmo entende por esta classificação enquanto remetendo a uma necessidade que ao mesmo tempo não é analítica (adiciona conteúdo), mas ainda assim não pode ser justificada empiricamente. Este é também o problema enfrentado pela necessidade normativa de Wittgenstein, já diante do problema das cores, ele encontra uma necessidade que não é meramente lógica, e passa, portanto, a ter que dar conta dessa mesma característica, a partir do que desenvolve, como vimos, a sua noção de gramática. Como Poincaré afirmou: “Si on juge qu'on ne peut les réduire au principe de contradiction, si on ne veut pas non plus y voir des faits expérimentaux qui ne pourraient participer à la nécessité mathématique, on a encore la ressource de les classer parmi les jugements synthétiques à priori. Ce n'est pas résoudre la difficulté, c'est seulement la baptiser (...)” (Poincaré, 1968, p.31)

similarmente ao que propõe Wittgenstein, as primeiras apenas procederiam supondo esta generalidade indutiva.

La *vérification* diffère précisément de la véritable démonstration, parce qu'elle est purement analytique et parce qu'elle est stérile. Elle est stérile parce que la conclusion n'est que la traduction des prémisses dans un autre langage. La démonstration véritable est féconde au contraire parce que la conclusion y est en un sens plus générale que les prémisses. L'égalité $2 + 2 = 4$ n'a été ainsi susceptible d'une vérification que parce qu'elle est particulière. Tout énoncé particulier en mathématiques pourra toujours être vérifié de la sorte. Mais si la mathématique devait se réduire à une suite de pareilles vérifications, elle ne serait pas une science. Ainsi un joueur d'échecs, par exemple, ne crée pas une science en gagnant une partie. Il n'y a de science que du général. (Poincaré, 1968, p.33-34)

Podemos então dizer que tanto em um caso quanto no outro, a verificação direta supõe a indução, injustificável externamente e fundamental. Vejamos o que encontramos sobre a prova por indução da lei da associatividade nas *Lectures*:

Temos – Símbolos – números 1, $(1) + 1$, $((1) + 1) + 1$ - - -
ou usamos $[1, \xi, \xi + 1]$

Definição – $a + (b+1) = (a+b) + 1$ Df.

A lei da associatividade $a + (b+c) = (a+b) + c$ pode ser provada por meio destes.

Nós então escrevemos –

$a + (b+(c+1)) = a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c) + 1) = ((a + b) + c) + 1 = (a+b) + (c+1)$

As duas primeiras equações se seguem em virtude da definição, então também se segue a quarta. Mas a terceira $(a + (b + c) + 1) = ((a + b) + c) + 1$ **parece usar a lei da associatividade que é o que é provado.**

$(b+c)$ na segunda equação não é uma número como b é na definição. Mas podemos substituir 1 por c , o que coloca isso correto.

E se podemos substituir 1, podemos substituir também 2, e assim por diante para todos os números.

Assim, a prova se funda na série de tais cadeias de equações (substituir 1,2,3 e assim por diante), ou antes **na lei pela qual podemos formular esta cadeia.** Cada cadeia é uma prova no sentido 1 acima [isto é, uma prova direta de uma proposição particular]. E a prova [por indução] pode ser simbolizada por uma espiral. O que importa é a lei pela qual podemos construir tais cadeias de equações. Em que sentido isso é uma prova? A prova mostra que a lei da associatividade é aplicável a números – i.e. que as variáveis ' $a + (b+c) = (a+b) + c$ ' podem ser números.

Da lei da associatividade se seguem outras leis por prova estrita $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$. A é provada por sua espiral, B por sua espiral e assim por diante.

Existe uma relação interna entre espirais correspondendo à relação interna entre A e B .

A relação entre A e sua espiral não é uma prova estrita. A não pode ser questionada e não podemos perguntar se ela é verdadeira ou falsa; e a indução (a espiral) não pode ser questionada. (AWL, A XI, grifo nosso)

Wittgenstein parece claramente aqui concordar com a posição mantida por Poincaré, pela qual a prova se funda no princípio da indução, que é suposto na definição, e apenas mediante o qual a generalização em questão seria possível. Que a prova por indução

apenas funcione mediante a suposição do princípio indutivo suposto pela definição indutiva parece ser também a razão para a ilustração da indução por uma espiral (retomaremos esta ilustração adiante). Mas talvez a mais clara relação com a posição já sustentada por Poincaré apareça na declaração final da impossibilidade de se provar estritamente a própria relação necessária entre a lei geral provada por indução e os casos particulares que caem sob a lei (os quais Wittgenstein associará às diversas voltas da espiral) que, tal como o próprio caráter fundamental da indução, seria equivalente ao princípio indutivo.

De fato, o papel que a noção de ‘operação’ desempenhava no *Tractatus* permanece central em toda a filosofia da matemática de Wittgenstein no que diz respeito ao caráter recorrente da indução, que possibilita a interação continuada. Cumpre lembrar que as operações permitiam, como vimos, o estabelecimento da *generalidade formal*¹⁴, na medida em que expressavam as relações internas presentes em uma série formal. No período intermediário, esta generalidade passa a ser introduzida por indução, estabelecendo justamente um sistema de proposições formalmente similares. Sendo assim, o mecanismo presente no procedimento indutivo forneceria o sistema de proposições formais no qual as proposições particulares se enquadrariam, fornecendo seu sentido mesmo sem a prova particular (verificação) destas proposições.¹⁵ O símbolo da espiral então atribuído à indução diz respeito à recorrência da iteração continuada (a regra aplicar-se ao resultado da aplicação da regra), que, como vimos, a noção de ‘operação’ dava conta no *Tractatus*. O que a operação fazia cabe, portanto, agora à indução fazer.

The true nature of the real numbers must to be the induction. What I must look at in the real number, its sign, is the induction. – The ‘So’ of which we may say ‘and so on’. If the law, the winding of the spiral, is a number, then it must be comparable with all the others through its position (on the number scale). I certainly do not define that position by means of anything but the law. (*PR*, XVII, 189)

¹⁴ “Escrevo, por isso, o termo geral de uma série formal $a, O' a, O'O'a, \dots$ assim: “[$a, x, O'x$]. Essa expressão entre colchetes é uma variável. O primeiro termo da expressão é o início da série formal, o segundo é a forma de um termo qualquer x da série, e o terceiro é a forma do termo da série que se segue imediatamente de x .” (*TLP*, 5.2522). “O conceito de ‘assim por diante’ é equivalente ao conceito de operação. Depois do sinal de operação segue-se “...”, que significa que o resultado da operação pode ser tomado novamente como base da mesma operação “e assim por diante”. O conceito de operação é, de modo completamente geral, aquele de acordo com o qual se pode formar sinais de acordo com uma regra. Em que a possibilidade da operação está baseada? No conceito geral de similaridade estrutural.” (*NB*, pp. 89-90)

¹⁵ Ainda sobre este ponto, conferir as observações sobre o suposto sentido do último teorema de Fermat antes de ser provado e sua relação com a possibilidade infinita introduzida por indução: *PR*, XVII, 189

Com estas observações, como pano de fundo, podemos analisar o que aparece na *Philosophical Grammar*, ainda sobre a lei da associatividade e o princípio de indução:

If a proof by induction is a proof of $a + (b + c) = (a + b) + c$, we must be able to say: *the calculation gives the result* that $a + (b + C) = (a + b) + c$ (and no other result). In that case the general method of calculating it must already be known, and we must be able to work out $a + (b + c)$ straight off in the way we can work out 25×16 . So first there is a general rule taught for working out all such problems, and later the particular cases are worked out. - But what is the general method of working out here? It must be based on general rules for signs (- say, the associative law -). (PG, II, VI, 29)

Teríamos aqui, segundo Wittgenstein:

1. **Um método de cálculo conhecido.**
2. Este método **deveria ser o mesmo para a proposição geral** usada na formulação provada por indução.
3. Este método **supõe as regras gerais** para os signos que se pretende provar por indução.

Sendo assim, jamais poderíamos falar de uma prova direta do que é provado indutivamente como a verificação de uma proposição particular, tal como já havia também concluído Poincaré (Cf.: 1968, p.41), pois estas verificações sempre supõem justamente as generalizações que são provadas indutivamente.

If I call the induction "the proof of a general proposition", I can't ask whether that proposition is correct (any more than whether the form of the cardinal numbers is correct). Because the things I call inductive proofs give me no method of *checking* whether the general proposition is correct or incorrect; instead, the method has to show me how to work out (check) whether or not an induction can be constructed for a particular case within a system of propositions. (PG, II, VI, 31)

E aqui Wittgenstein defende expressamente a necessária pressuposição do princípio indutivo:

Is the recursive proof of ' $a + (b + c) = (a + b) + c \dots A$ ' an answer to a question? If so, what question? Is it a proof that an assertion is true and its contradictory false? What Skolem calls a recursive proof of A can be written thus;

$$\left. \begin{array}{l} a + (b + 1) = (a + b) + 1 \\ a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1 \\ (a + b) + (c + 1) = ((a + b) + c) + 1 \end{array} \right\} B$$

In this proof the proposition proved obviously doesn't occur at all. -What we have to do is to make a general stipulation permitting the step to it. This stipulation could be expressed thus:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \quad \varphi(1) = \psi(1) \\ \beta \quad \varphi(c+1) = F(\varphi(c)) \\ \gamma \quad \psi(c+1) = F(\psi(c)) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \Delta \\ \varphi(c) = \psi(c) \end{array}$$

If three equations of the form α, β, γ , are proved, we say "the equation Δ is proved for all cardinal numbers". This is a definition of this latter form of expression in terms of the first. It shows that we aren't using the word "prove" in the second case in the same way as in the first. In any case it is misleading to say that we have proved the equation Δ or A. Perhaps it is better to say that we have proved its generality, though that too is misleading in other respects. Now has the proof B answered a question, or proved an assertion true? And which is the proof B? Is it the group of three equations of the form α, β, γ or the class of proofs of these equations? These equations do *assert* something (they don't prove anything in the sense in which *they* are proved). (...) (PG, II, VI, 30)

Vemos, dessa forma, que as análises de Wittgenstein conduzem a conclusões bastante análogas às posições sustentadas por Poincaré: a regra geral é apenas provada pelo princípio indutivo suposto já na definição do domínio em questão. Entretanto, de nada adiantaria formular o próprio princípio da indução completa como um axioma ou regra adicional explicita. O que Wittgenstein deseja sustentar é a equivalência entre o princípio e a aplicação ilimitada de uma operação (PG, II, VI, 33-34). O que também observou Frascolla:

Wittgenstein's point of view would be rather akin to the usual approach to the problem. According to the latter, the introduction, among the axioms of arithmetic, of some general form of the Principle of Complete Induction, or, alternatively, the employment of the Principle as a primitive rule of inference (as in Skolem's work) testifies, on one hand, that logical rules alone are not sufficient, as obvious, for the transition from the inductive premises to the universal conclusion; on the other hand, the decision to adopt such an axiom or such a rule of inference may be seen precisely as the decision to make a stipulation which contributes to the determination of the sense of any universal generalization over the domain of natural numbers. (Frascolla, 1994, p. 80)

The core of Wittgenstein's view is expressed in thesis (iii), i.e., his firm belief about the absolute mathematical irrelevance of any formulation of the Principle of Complete Induction, either in axiomatic form or as a rule of inference or even in the form of a general stipulation such as R. (Frascolla, 1994, p.83)

Pelo princípio de indução, poderíamos provar a propriedade em questão para termos arbitrários do domínio, e universalizar a propriedade, mas isso é apenas possível porque a definição recursiva de uma operação é constitutiva da definição do próprio

domínio e a possibilidade de universalização é já suposta na compreensão dos casos particulares, embora jamais reduzida a eles. Daí Wittgenstein dizer:

To check $25 \times 25 = 625$, I work out 25×25 until I get the right hand side; - can I work out $a + (b + c) = (a + b) + c$, and get the result $(a + b) + c$? Whether it is provable or not depends on whether we treat it as calculable or not. For if the proposition is a rule, a paradigm, which every calculation has to follow, then it makes no more sense to talk of working out the equation, than to talk of working out a definition. (...) I might also say very roughly (see other remarks): ' $25 \times 64 = 160$, $64 \times 25 = 160$ '; that proves that $a \times b = b \times a$ ' (this way of speaking need not be absurd or incorrect; you only have to interpret it correctly). (...) And I want to say: It is *only* in the sense in which you can call working out such an example a proof of the algebraic proposition that the proof by induction is a proof of the proposition. (PG, II, VI, 29)

A generalidade estaria na definição das noções gerais, instanciada nos particulares pela suposição por estes do *princípio indutivo*. Isso significa também entender em que medida um caso particular pode ser usado como uma demonstração geral: exatamente na medida em que ele supõe já o princípio indutivo na sua definição, e pode ser, portanto, tomado como geral. É interessante notar que, quando Poincaré, nesta mesma direção, toma o raciocínio indutivo como o raciocínio matemático por excelência, recusando que a matemática seja fundamentalmente dedutiva, ele está não apenas ressaltando o caráter pelo qual a matemática é capaz de construir conteúdos, e não somente retirar o que já está suposto nos axiomas e regras, mas também, com isso, chamando a atenção para outra característica da matemática muito cara a Wittgenstein: o raciocínio matemático (normativo) é aquele que nos permite tomar um particular como 'em princípio' (geral), na medida em que é aquele que nos permite dizer 'se vale para A, vale para todos os As', pois há uma arbitrariedade e regularidade (generalidade) suposta na maneira como este âmbito funciona, sem que qualquer realidade (infinita) correspondente tenha que, ou mesmo possa, ser suposta para tanto.¹⁶ Esta generalidade seria a generalidade suposta na definição dos casos particulares, que não poderia ser ela mesma justificada adicionalmente. A indução não é a aplicação de um método geral de provas, mas fornece um método geral, por isso não se poderia procurar provar a própria

¹⁶ Poincaré atribui a necessidade dessa regularidade suposta no âmbito matemático e expressa pelo princípio de indução a uma propriedade do funcionamento do intelecto humano. Wittgenstein, diferentemente, a localiza no funcionamento da linguagem, e este é certamente o ponto central da divergência entre os autores, a qual não será aqui abordada. De qualquer forma, o argumento usado para tais conclusões e a característica remarcada na própria necessidade em questão são certamente próximos. E este é o ponto que pretendemos aqui ressaltar. «L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.» (Poincaré, 1968, p. 42)

indução (Cf.: *PG*, II, VI, 31). “If they hold on to their extensional viewpoint, the induction does produce a decision because in the case of each extension of the quotient [na divisão de 1 por 3] it shows that it consists of nothing but threes. But if they drop their extensional viewpoint the induction decides nothing (...).” (*PG*, II, VI, 31) Não se trata, portanto, de um veículo que nos conduz pelo infinito já dado descobrindo suas propriedades, pois: “(...) the sign ‘etc.’ refers to an internal property of the bit of the series, that precedes it, and not to its extension.” (*PG*, II, VI, 31) É apenas o próprio princípio responsável pela construção da série que permite a recorrência, e é a expressão dessa normatividade. A partir disso, tal recorrência injustificável pode ser entendida ao mesmo tempo como não-analítica e necessária. Se entendemos que isso significa que o princípio indutivo é suposto na definição do domínio, vemos que não se trata de dizer que se uma propriedade é verdadeira dos indivíduos introduzidos pela base e mantidas pelas regras produtoras, podemos retirar o infinito pois tal propriedade é verdadeira de todos os indivíduos do domínio, mas que dizer isso mesmo só pode significar que a propriedade é verdadeira dos indivíduos introduzidos pelas regras de base e mantida pelas regras produtoras. Para qualquer propriedade, saber que ela se aplica a um domínio indutivamente definido é equivalente a saber se a base e o passo indutivo a mantém. “We are not saying that when $f(1)$ holds and when $f(c+1)$ follows from $f(c)$, the proposition $f(x)$ is therefore true for all cardinal numbers; but ‘the proposition $f(x)$ holds for all cardinal numbers’ means it holds for $x=1$, and $f(c+1)$ follows from $f(c)$.” (*PG*, II, VI, 32) É também este caráter não-analítico e necessário das demonstrações que é metaforicamente expresso por Wittgenstein como permitido por *uma maneira de ver* o particular como geral, que consiste, tal como avaliamos, justamente na pressuposição do princípio de indução. Por exemplo, na parte em que Wittgenstein esta falando desta pressuposição da generalidade pela pressuposição do princípio indutivo, ele comenta o exemplo da dízima periódica na qual incorre a divisão de 1 por 3, comparando-o com a demonstração por indução acima comentada:

What does ‘ $1:3=0,3$ ’ mean? Does it mean the same as

$$\frac{1}{3} = 0,3 \text{ ?}$$

- Or is that division the proof of the first proposition? That is, does it have the same relationship to it as a calculation has to what is proved ?

‘ $1:3=0,3$ ’ is not the same kind of thing as

‘ $1:2=0,5$ ’

What '1:2=0,5' corresponds to is

$$\begin{array}{r} 1:3=0,3 \\ \underline{1} \end{array}$$

not

$$\begin{array}{r} 1:3=0,3 \\ \underline{1} \end{array}$$

Instead of the notation '1:4=0,25' I will adopt for this occasion the following

$$\begin{array}{r} 1:4=0,25 \\ \underline{0} \end{array}$$

So, for example,

$$\begin{array}{r} 3:8=0,375 \\ \underline{0} \end{array}$$

Then I can say, what corresponds to this proposition is not 1:3=0,3, but e.g.:

$$\begin{array}{r} 1:3=0,333 \\ \underline{1} \end{array}$$

0,3 is not a result of division (quotient) in the same sense as 0,375. For we are acquainted with the numeral '0,375' before the division 3/8, but what does 0,3 mean when detached from the periodic division? – The assertion that the division a:b gives 0,c as quotient is the same as the assertion that the first place of the quotient is c and the first remainder is the same as the dividend.

The relation of B to the assertion that A holds for all cardinal numbers is the same as that of

$$\begin{array}{r} 1:3=0,3 \\ \underline{1} \end{array}$$

to 1:3=0,3. (...) (PG, II, VI, 30)

O que a marcação do 1 na segunda proposição demonstraria seria a recorrência do resto ao infinito. Mas a proposição que marca a recorrência do resto ao infinito se relacionaria com um caso da recorrência tal como a afirmação que a lei da associatividade vale para todos os números se relaciona com um caso no qual ela vale, isto é, o princípio de indução é pressuposto já pelo caso particular. E é pressupondo a cláusula de generalização que a marcação da recorrência pode ser tomada com este valor geral, funcionando como prova da primeira proposição.

The construction of the induction is not a proof, but a certain arrangement of proofs (a pattern in the sense of an ornament). (...) We can also say: we have a rule for constructing, in a certain game, decimal fractions consisting only of 3's; but if you regard *this rule* as a kind of number, it can't be the result of a division; the only result would be what we may call periodic division which has the form:

$$\frac{a}{d}=c$$

(PG, II, VI, 30)

É nessa medida que o ‘ver um particular como geral’ expressaria ‘o tomar um signo com valor geral’. Aqui Wittgenstein mesmo confirma a relação que traçamos com o *sintético a priori*, ao afirmar:

The discovery of the periodicity is really the construction of a new symbol and a new calculus. For it is misleading to say that it consists in our having *realised* that the first remainder is the same as the dividend. For if we had asked someone unacquainted with periodic division whether the first remainder in this division was the same as the dividend, of course he would have answered "yes"; and so he did realise. But that doesn't mean he must have realized the periodicity; that is, it wouldn't mean he had discovered the calculus with the sign

$$\frac{a}{d}=c$$

Isn't what I am saying what Kant meant, by saying that $5 + 7 = 12$ is not analytic but synthetic *a priori*?
(PG, II, VI, 31)

Interessantemente, também Poincaré caracteriza esta capacidade de generalização como a maneira pela qual a construção matemática seria capaz de adicionar conteúdo ao que é demonstrado.

Pour qu'une construction puisse être utile, pour qu'elle ne soit pas une vaine fatigue pour l'esprit, pour que elle puisse servir de marchepied à qui veut s'élever plus haut, il faut d'abord qu'elle possède une sorte d'unité, qui permette d'y voir autre chose que le juxtaposition de ses éléments. On plus exactement, il faut qu'on trouve quelque avantage à considérer la construction plutôt que ses éléments eux-mêmes. Quel peut être cet avantage? Pourquoi raisonner sur un polygone par exemple, qui est toujours décomposable en triangles, et non sur les triangles elementaires? C'est qu'il y a des propriétés que l'on peut démontrer pour les polygones d'un nombre quelconque de côtes et qu'on peut ensuite appliquer immédiatement à un polygone particulier quelconque. (...) Une construction ne devient donc intéressante que quando on peut la ranger à côté d'autres constructions analogues, formant les espèces d'un même genre. Si le quadrilatère est autre chose que la juxtaposition de deux triangles, c'est qu'il appartient au genre polygone. (Poincaré, 1968, p. 44)

Assim, acreditamos conseguir juntar as observações de Wittgenstein sobre o caráter construtivo das demonstrações matemáticas por indução, enquanto generalizações que introduziriam um sistema formal, já suposto nos casos particulares pela pressuposição do princípio de indução por este, com o que permite mesmo que figuras possam

funcionar como provas, a partir justamente do caráter *impredicativo* da generalidade, que encontraria sua expressão máxima no funcionamento do âmbito normativo da matemática, no qual o particular tem já valor geral.

3.9. Sumário de conclusões obtidas no capítulo III

1. A partir do problema das cores, Wittgenstein passa a considerar que os enunciados de grau se relacionam internamente, introduzindo a noção de ‘sistema de proposições’ e tomando as próprias relações internas (ao invés de objetos independentes) como o final das análises.
2. A própria *impredicatividade* do âmbito normativo acaba excluindo a ontologia *tractatiana* de objetos simples, compreendidos como dados independentemente. Pois, qualquer determinação de objetos suporia já determinações semânticas. Wittgenstein conclui, portanto, que o que não pode funcionar predicativamente também não pode ser uma nomeação: o que não pode ser independentemente identificado, se não pode ser descrito, também não pode ser referido.
3. Isso se segue da *impredicatividade* porque a identificação de objetos independentes (extensão) na base cumpriria o papel justamente de um domínio de argumentos dados independentemente da função (intensão).
4. Temos, a partir de então, no pensamento de Wittgenstein, uma inversão do primado da referência (no âmbito necessário) pelo primado do sentido.
5. A crítica ao extensionalismo matemático, que acompanhará então Wittgenstein, segue-se também desta consideração pela qual, no âmbito normativo, a independência entre entidades/indivíduos e regras (intensão) não pode ser obtida. Isso acarretará a posição segundo a qual as regras não podem corresponder ao que quer que seja (dado independentemente), condicionando também assim a crítica ao realismo.

6. As regras/normas são então entendidas como possuindo um domínio de aplicação intrínseco, internamente determinadas, não podendo ser justificadas por qualquer padrão externo. E o problema central do realismo matemático consiste em tratar tais normas pelo modelo de determinações contingentes (empíricas), às quais faz sentido atribuir verdade ou falsidade independentemente da semântica, tomando os opostos destas normas como também possíveis.

7. Na *assimetria relativa ao funcionamento da negação*, no que diz respeito às proposições necessárias, identificamos ao mesmo tempo a impossibilidade de justificação independente destas proposições e a recusa ao realismo em Wittgenstein.

8. A *recusa à distinção entre factual e em princípio* no contexto normativo procede também pelo mesmo argumento: uma prova não procederia de acordo com um significado já dado *em princípio* porque não poderia ser entendida como sendo justificada com base em conceitos independentes desta (sua verdade não é determinada por uma falsidade também possível). A introdução desta distinção, no projeto semântico construtivo, acabou possibilitando a re-introdução de uma noção de ‘verdade’ sem critério de avaliação e, por meio desta, dos próprios problemas que os construtivistas contemporâneos identificaram no realismo. Estabelece-se, assim, a coerência interna da radical posição de Wittgenstein.

9. Mesmo quando a idéia de um *sistema matemático* permite, no caso dos decidíveis, um sentido anterior à verdade, não pode autorizar a analogia entre uma proposição matemática e uma proposição empírica.

10. Encontra-se também por este caminho, no âmbito necessário, o que se pode chamar um *colapso de modalidades*: necessidade, possibilidade e realidade tornam-se equivalentes. (Tal colapso é também um colapso entre verdade e semântica.)

11. O que há de nocivo na noção de ‘em princípio’ aplicada ao âmbito normativo é a suposição, por meio desta noção, de algo que funcione como uma justificativa externa ao funcionamento deste âmbito. Por isso, a idéia de uma *determinação em*

princípio precisa ser recusada tanto no caso do infinito, quanto no tratamento das demonstrações matemáticas se introduz a idéia de um domínio de casos independentemente dado ou de justificação adicional.

12. Entretanto, isso não pode significar negar a necessidade do âmbito normativo, posto que signifique justamente ser coerente com esta. É o método de análise conceitual de Wittgenstein o que está envolvido em não negar necessidade em questão, recusando ao mesmo tempo as suas explicações tradicionais, tendo em vista deixar clara a distinção entre o normativo e o empírico.

13. Já o tratamento das demonstrações como figuras é importante justamente na medida em que ressalta o caráter *impredicativo* envolvido na introdução da necessidade por meio das provas. Isso se explica na medida em que a demonstração por figuras funciona por colapsar caso e regra na figura, o que ressalta a exigência recorrente na introdução da necessidade de algo que funcione como um “*factual em princípio*” (instâncias com estatutos gerais), que não pode supor a possibilidade anterior do que exclui.

14. Finalmente, esta mesma característica do raciocínio matemático que nos permite tomar o particular como geral aparece expressa mediante a suposição do *princípio de indução*. O papel que a noção de ‘operação’ desempenhava no *TLP* permanece então central no que diz respeito ao caráter recorrente da indução matemática, aproximando as observações de Wittgenstein das posições sustentadas por Poincaré sobre o tema.