5
Membrana circular com massa específica e espessura variável

No estudo de membranas, quando se fala da variação da sua inércia, logo se recai na variação da sua massa específica ou da sua espessura. Na literatura encontram-se diversos estudos tratando da variação da massa específica de membranas circulares, principalmente na direção radial (Jabareen e Eisenberger, 2001; Bala Subrahmanyam e Sujith, 2001; Willatzen, 2002; Buchanan,2005). Todos estes resultados são restritos à análise das vibrações lineares usando a teoria elástica de membranas.

Por isso, inicialmente, estuda-se o caso da membrana circular de espessura constante, porém com variação da massa específica na direção radial e comparam-se os resultados com os encontrados na literatura.

Posteriormente, estuda-se o problema da membrana circular com variação da espessura.

5.1.
Variação da massa específica na direção radial da membrana circular

Neste problema considera-se que a massa específica da membrana varia na direção radial da seguinte maneira (Jabareen e Eisenberger, 2001; Bala Subrahmanyam e Sujith, 2001; Willatzen, 2002):

$$\Gamma(\rho) = \Gamma_o (1 + \kappa \rho^2) \tag{5.1}$$

onde Γ_o é um valor constante e κ é um valor constante conhecido que descreve a variação da massa específica ao longo do raio indeformado. Tem-se que a massa específica cresce do centro para o bordo quando $\kappa > 0$ e decresce quando $\kappa < 0$, como pode ser observado na Figura 5.1 .

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

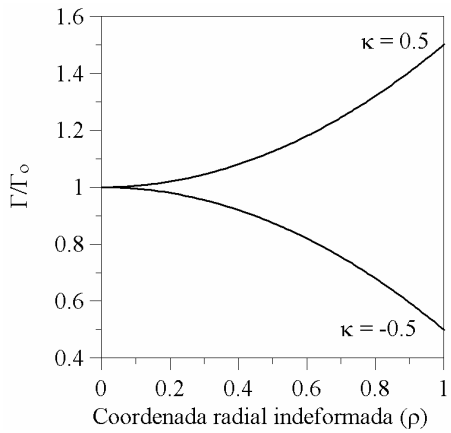


Figura 5.1 – Variação da massa específica normalizada ao longo da direção radial da membrana (Equação (5.1)).

A resposta estática neste caso é a igual à apresentada no item 4.1.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

5.1.1.
Análise linear da vibração livre

Para a análise linear das vibrações livres parte-se da equação de movimento na direção transversal da membrana (3.48) na qual é substituído o raio da membrana tracionada (4.1), obtendo-se a seguinte equação de movimento:

$$\frac{2C_1}{\Gamma_o(1+\kappa\rho^2)}\left(1-\frac{1}{\delta^6}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{5.2}$$

O deslocamento transversal w é obtido através da transformação da equação de movimento linear (5.2) em uma equação diferencial que possue solução analítica. Empregando a separação das variáveis ρ, θ e t, tem-se que a solução da equação (5.2) pode ser escrita em função dessas variáveis da seguinte maneira:

$$w(\rho,\theta,t)=A_{mn}\,G(\rho)\cos(n\theta)\,\cos(\omega_{mn}\,t) \tag{5.3}$$

onde A_{mn} corresponde à amplitude modal; G(ρ), à função em ρ do deslocamento transversal; m, ao número de semi-ondas radiais; n, ao número de ondas circunferenciais e ω_{mn}, à freqüência natural de vibração.

Substituindo (5.3) em (5.2), obtém-se a seguinte equação de movimento linear em função da direção radial:

$$\frac{d^2G(\rho)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dG(\rho)}{d\rho}+\left(\frac{\Gamma_o(1+\kappa\rho^2)\delta^6\omega_{mn}^2}{2C_1(\delta^6-1)}-\frac{n^2}{\rho^2}\right)G(\rho)=0 \tag{5.4}$$

A equação (5.4) é similar as equação diferencial Whittaker (Abramowitz e Stegun, 1972). Utilizando a solução da equação diferencial de Whittaker (Abramowitz e Stegun, 1972) juntamente com as condições de contorno do problema, obtém-se a seguinte solução analítica para o deslocamento transversal da membrana circular:

$$w(\rho,\theta,t) = A_{mn}\, M_n\left(\frac{-I}{4}\sqrt{\frac{K}{\kappa}};\frac{n}{2};\sqrt{K\kappa}\rho^2 I\right)\frac{1}{\rho}\cos(n\theta)\,\cos(\omega_{mn}\, t) \tag{5.5}$$

sendo:

$$K = \frac{\Gamma_o\, k_{mn}\, \delta^6}{2C_1(\delta^6 - 1)} \tag{5.6}$$

onde M_n é a função hipergeométrica confluente Whittaker do tipo M; k_{mn} é o m-ésimo valor positivo onde a função Whittaker com $\rho = R_o$ é nula.

A função hipergeométrica confluente Whittaker é uma forma alterada da função hipergeométrica, sendo uma forma alternativa de solução linearmente independente para as equações hipergeométricas confluentes dadas por (Wolfram mathworld, 2008):

$$M_n(\alpha;\beta;x) = x^{0.5+\beta} e^{-x/2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(0.5+\beta-\alpha)_i}{(1+2\beta)_i}\frac{x^i}{i!} \tag{5.7}$$

onde $(\ )_i$ é o símbolo Pochhammer dado por $(x)_i = x(x+1)\cdots(x+j+1)$ para $j \geq 0$ (Wolfram mathworld, 2008).

Substituindo o deslocamento transversal (5.5) na equação de movimento (5.2) obtém-se a freqüência natural da membrana circular com massa específica variável como:

$$\omega_{mn} = \sqrt{k_{mn}} \tag{5.8}$$

Os deslocamentos radial u e circunferencial v são desprezíveis em relação ao deslocamento transversal w, sendo suas contribuições em termos de inércia e rigidez desprezadas na análise das vibrações transversais da membrana.

As freqüências e os modos de vibração lineares foram calculados através da formulação analítica e comparados com os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos.

Para a solução via método dos elementos finitos, utiliza-se uma malha com 2880 elementos de membrana M3D4R e M3D3 que gera um sistema com 8643

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

equações. A malha é discretizada com 40 elementos na direção radial e 72 na direção circunferencial, divididos em 40 conjuntos axissimétricos com 72 elementos cada. Para a variação da massa específica, cada conjunto de elementos recebe o valor dado na equação (5.1) onde ρ é a distância do centro da membrana até centro do elemento na direção radial.

Os resultados analíticos (AN) e obtidos por elementos finitos (MEF) para diferentes valores de κ em (5.1) são comparados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Freqüências de vibração lineares (rad/s) para a membrana circular com massa específica variável na direção radial.

$\kappa = -0.5$							
m	n	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	20.859	20.925	31.989	30.283	33.230	31.458
1	1	34.324	34.411	49.676	49.801	51.603	51.734
1	2	42.773	42.581	61.903	68.141	64.305	70.786
$\kappa = 0.5$							
m	n	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	18.721	18.710	27.094	27.078	28.145	28.129
1	1	28.873	29.029	41.786	42.012	43.408	43.642
1	2	38.328	38.219	55.470	55.312	57.623	57.459
$\kappa = 0.595$							
m	n	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	18.543	18.529	26.837	26.816	27.878	27.856
1	1	28.648	28.625	41.461	41.427	43.069	43.035
1	2	37.705	37.591	54.568	54.404	56.685	56.515

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

Observa-se que os valores das freqüências obtidos pelos dois métodos são concordantes, tendo uma menor variação nos primeiros modos de vibração. Verifica-se também que as freqüências decrescem à medida que κ cresce, ou seja, aumenta a densidade no bordo da membrana.

Os modos de vibração possuem a mesma forma que os apresentados na Figura 4.5.

Os valores para o parâmetro de freqüência, $\overline{\omega} = \omega_{mn}\sqrt{\dfrac{\Gamma_o\,\delta^6}{2C_1(\delta^6-1)}}$, obtidos com os resultados deste trabalho são favoravelmente comparados com os resultados apresentados por Bala Subrahmanyam e Sujith (2001) na Tabela 5.2. Os autores calculam esse parâmetro de freqüência analiticamente para membranas circulares completas e anulares com diversos coeficientes de heterogeneidade κ. Porém, os autores utilizam como resposta da equação diferencial uma função hipergeométrica de Kummer (Abramowitz e Stegun, 1972).

Tabela 5.2 – Parâmetro da freqüência de vibração $\overline{\omega}$ para a membrana circular com massa específica variável na direção radial.

$\overline{\omega} = \omega_{mn}\sqrt{\dfrac{\Gamma_o\,\delta^6}{2C_1(\delta^6-1)}}$			
κ	Bala *et al* (2001)	AN	MEF
0.5	2.2819	2.2819	2.2806
1.0	2.1736	2.1736	2.1702
1.5	2.0778	2.0778	2.0728

Na Figura 5.2 apresenta-se uma relação entre a freqüência de vibração e o coeficiente de tração radial (δ) da membrana para diferentes distribuições da massa específica. Observa-se um grande aumento na freqüência natural para pequenos valores de δ e que a curva tende a um valor constante quando $\delta \to \infty$, tal como no caso da membrana com densidade constante.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

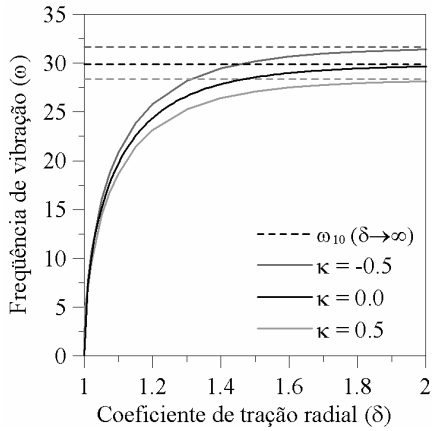


Figura 5.2 - Freqüência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de tração radial δ para diferentes variações da massa específica da membrana circular.

Na Figura 5.3 apresenta-se uma relação entre a freqüência de vibração e o coeficiente de variação da massa específica (κ) da membrana para diferentes valores de δ. Observa-se uma diminuição na freqüência natural com o aumento do valor do coeficiente de variação da massa específica e que, para valores de δ maior que dois a curva já é bem próxima da curva com $\delta \to \infty$ que define o limite superior da freqüência.

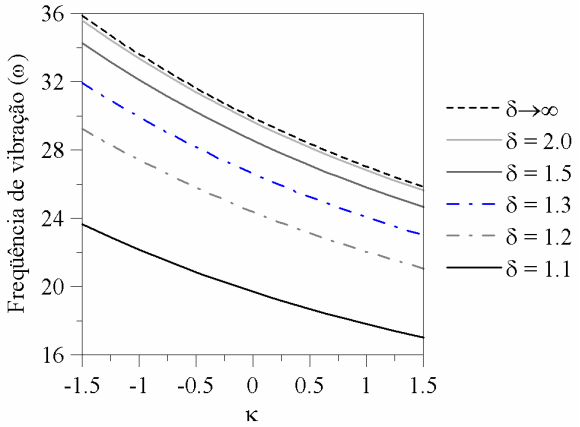


Figura 5.3 - Freqüência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de variação da massa específica (κ).

5.1.2.
Análise não linear da vibração livre

Na análise das vibrações não lineares da membrana circular os deslocamentos *u* e *v* são desprezados e a equação de movimento não linear na

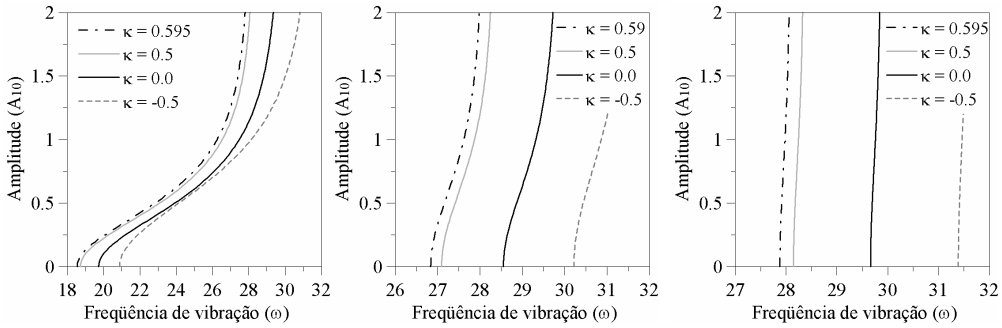
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

direção transversal da membrana circular com massa específica variável é dada por:

$$\left[\frac{-4\rho^6 w_{,\rho}{}^2+\rho^4\left(\delta^2\rho^2+w_{,\theta}{}^2+\rho^2 w_{,\rho}{}^2\right)}{\delta^2\left(\delta^2\rho^2+w_{,\theta}{}^2+\rho^2 w_{,\rho}{}^2\right)^3}-1\right]2C_1\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+$$
$$\left[\begin{array}{c}\dfrac{-4\rho^5\delta^2-8\rho^4 w_{,\theta}w_{,\theta\rho}-4\rho^5 w_{,\rho}{}^2}{\delta^2\left(\delta^2\rho^2+w_{,\theta}{}^2+\rho^2 w_{,\rho}{}^2\right)^3}+\\ \dfrac{5\rho^3}{\delta^2\left(\delta^2\rho^2+w_{,\theta}{}^2+\rho^2 w_{,\rho}{}^2\right)^2}-\dfrac{1}{\rho}\end{array}\right]2C_1\frac{\partial w}{\partial\rho}+ \tag{5.9}$$
$$\left[\frac{-4\rho^2 w_{,\theta}{}^2+\rho^2\left(\delta^2\rho^2+w_{,\theta}{}^2+\rho^2 w_{,\rho}{}^2\right)}{\delta^2\left(\delta^2\rho^2+w_{,\theta}{}^2+\rho^2 w_{,\rho}{}^2\right)^3}-\frac{1}{\rho^2}\right]2C_1\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Gamma_o(1+\kappa\rho^2)=0$$

Para a análise não linear, aproxima-se o campo de deslocamentos transversais w pela Equação (5.5) e utiliza-se o método de Galerkin para se obter as equações diferenciais ordinárias não lineares no domínio do tempo.

Estuda-se as vibrações associadas à menor freqüência natural ($m = 1$ e $n = 0$), resolvendo-se a equação de movimento não linear (5.9). Obtém-se assim a relação freqüência de vibração-amplitude que é apresentada na Figura 5.4 para diferentes valores do coeficiente de variação da massa específica κ.



$\delta = 1.1$ $\delta = 1.5$ $\delta = 2.0$

Figura 5.4 - Relação freqüência (rad/s)-amplitude (m) para vibração livre da membrana circular com diferentes valores de κ.

Na Figura 5.5 ilustra-se a relação freqüência de vibração - amplitude modal para diferentes valores da coeficiente de tração radial para $\kappa = 0.5$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

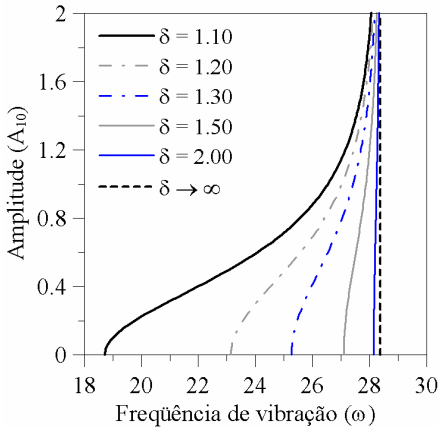


Figura 5.5 - Relação freqüência (rad/s) – amplitude (*m*) para vibração livre da membrana circular com diferentes valores de δ ($\kappa = 0.5$).

Observa-se nas Figura 5.4 e 5.5 o mesmo comportamento *hardening*, maior para as menores amplitudes de vibração e tendendo a um valor constante nas grandes amplitudes de vibração, em todos os casos apresentados. Esse valor constante da freqüência de vibração refere-se ao valor da freqüência quando a coeficiente de tração radial tende a infinito.

Verifica-se, também, que a membrana menos tracionada exibe uma resposta altamente não linear e que essa não linearidade diminui com o aumento do coeficiente de tração radial e a resposta fica praticamente linear para um raio tracionado igual a duas vezes o raio indeformado, como já foi observado no capítulo 4.

Além disso, observa-se que a variação da massa específica não influencia no tipo do comportamento não-linear da membrana circular. Para uma variação com aumento da massa específica, ao longo da direção radial ($\kappa > 0$), os valores das freqüências de vibração diminuem deslocando a curva para a esquerda. Enquanto que, para uma variação com diminuição da massa específica na direção radial ($\kappa < 0$) os valores das freqüências de vibração aumentam deslocando a curva para a direita.

Na Figura 5.6 mostra-se a relação normalizada freqüência-deslocamento da membrana para um ponto de coordenadas (0; 0.5) da membrana indeformada. A freqüência de vibração foi normalizada com relação à freqüência natural de cada caso. Novamente observa-se que quanto mais tracionada a membrana menor o grau de não-linearidade da resposta.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

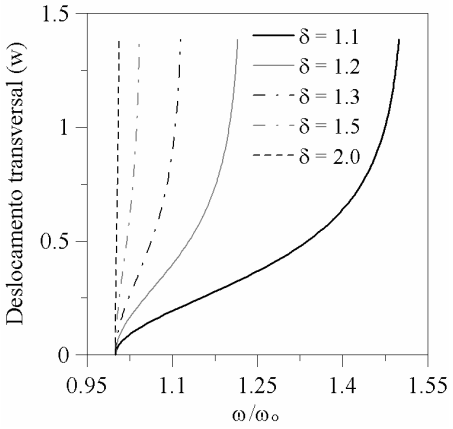


Figura 5.6 - Relação normalizada freqüência (rad/s) - deslocamento transversal (*m*) da membrana circular ($\kappa = 0.5$).

A relação freqüência – deslocamento também é obtida a partir da resposta no tempo, encontrada por elementos finitos, e utilizando a metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee (2005). Essa relação é favoravelmente comparada com a relação obtida analiticamente para um ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada, para duas variações da massa específica. Esses resultados são apresentados na Figura 5.7.

Para a solução por elementos finitos é utilizado um modelo com uma malha com 2880 elementos de casca S4R e S3 que gera um sistema com 8643 equações.

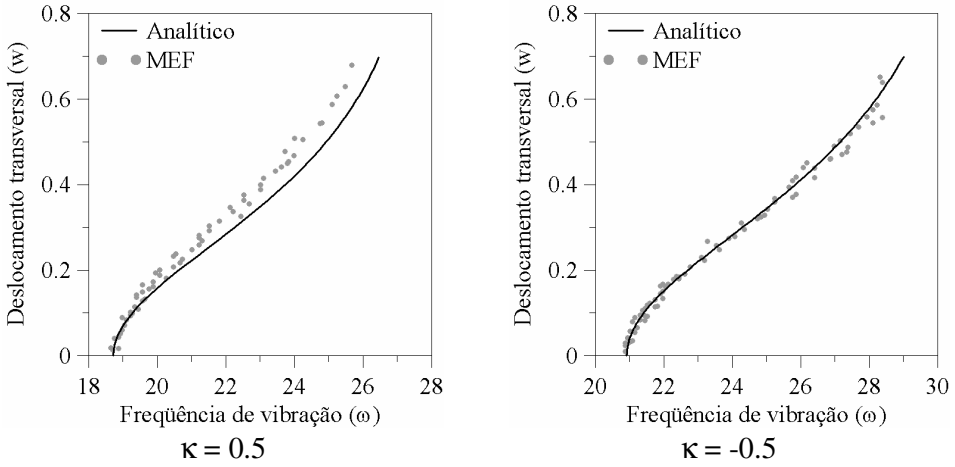


Figura 5.7 - Relação freqüência de vibração (rad/s)-deslocamento transversal (*m*) ($\delta = 1.1$).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

5.2.
Variação da espessura na direção radial da membrana circular

Para a membrana com espessura variável considera-se uma variação na direção radial da configuração indeformada da seguinte maneira:

$$h(\rho) = h_o e^{\eta\rho^2} \tag{5.10}$$

onde h_o é um valor de referência e η é uma constante que descreve a variação da espessura ao longo do raio indeformado. Quando $\eta > 0$ tem-se que a espessura cresce do centro para o bordo e decresce quando $\eta < 0$, como pode ser observado na Figura 5.8.

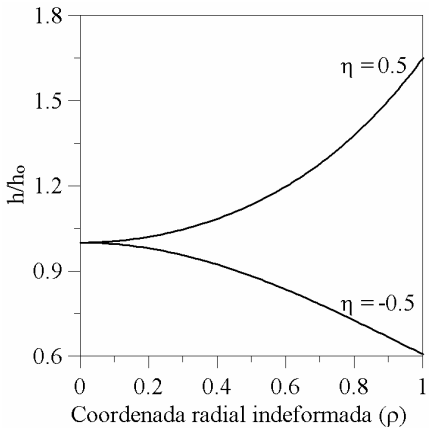


Figura 5.8 – Variação da espessura normalizada ao longo da direção radial da membrana (Equação (5.10)).

5.2.1.
Análise estática

Neste caso não há solução exata para a equação não-linear de equilíbrio. A solução estática da membrana com espessura variável sob deslocamento radial uniforme é obtida de forma aproximada através da integração numérica das equações (3.36) e (3.37), atendendo as condições de contorno (3.38) e (3.39).

As componentes de deslocamento estático circunferencial e transversal, β_0 e z_o respectivamente, são nulas.

Para a solução via método dos elementos finitos, utiliza-se, no programa comercial Abaqus®, 1440 elementos sólidos tri-dimensionais C3D8RH e C3DH que gera um sistema com 10086 equações. Ressalta-se que os resultados obtidos com os elementos sólidos foram comparados com resultados utilizando elementos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

de membrana apresentando bons resultados. Optou-se pelo uso dos elementos sólidos para melhor representar a variação da espessura ao longo do raio da membrana.

Dessa forma, obtém-se a configuração tracionada da membrana circular para diferentes valores do coeficiente de tração radial (δ). Na Figura 5.9 apresenta-se a variação do comprimento radial tracionado obtido pela integração numérica (IN) e pelo método dos elementos finitos (MEF), para membranas circulares com três valores de δ e coeficiente de variação da espessura $\eta = 0.5$.

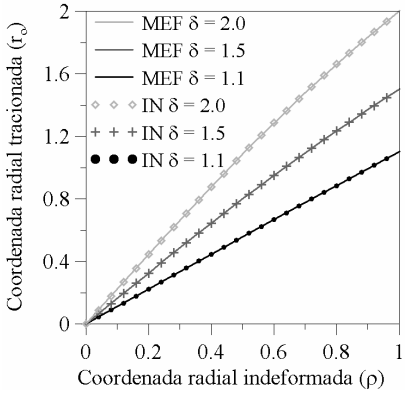
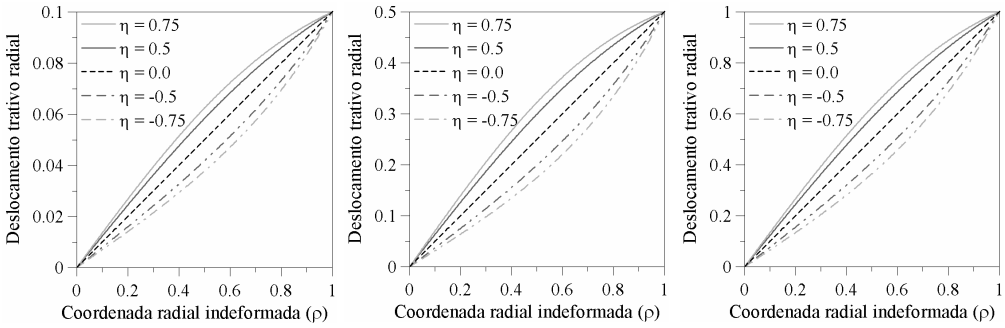


Figura 5.9 – Variação do comprimento radial tracionado da membrana circular com espessura variável ($\eta = 0.5$).

Para visualizar a influência da variação radial da espessura no raio tracionado (r_o), apresenta-se na Figura 5.10 a variação do deslocamento radial após a aplicação da tração radial na membrana circular para diferentes valores do coeficiente de variação da espessura. Os valores apresentados são os obtidos pela integração numérica.



$\delta = 1.1$ $\delta = 1.5$ $\delta = 2.0$

Figura 5.10 – Variação do deslocamento radial (m) da membrana circular com espessura variável para diferentes valores de η.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

Observa-se que a variação de $r_o(\rho)$ é levemente parabólica. A função que representa a variação da coordenada radial tracionada é então determinada através do método dos mínimos quadrados, sendo dada por:

$$r_o(\rho) = a_1\,\rho^4 + a_2\,\rho^3 + a_3\,\rho^2 + a_4\rho \tag{5.11}$$

onde a_i são constantes que dependem da configuração tracionada da membrana.

As membranas circulares apresentadas na Figura 5.10 possuem as seguintes distribuições radiais:

$$\delta = 1.1 \quad \begin{cases} \eta = 0.75 & r_o(\rho) = 0.010\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 - 0.035\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.002\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 1.123\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \\ \eta = 0.50 & r_o(\rho) = 0.010\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 - 0.035\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.002\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 1.123\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \\ \eta = -0.50 & r_o(\rho) = 0.012\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 - 0.004\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.005\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 1.078\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \\ \eta = -0.75 & r_o(\rho) = 0.028\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 - 0.009\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.013\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 1.067\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \end{cases} \tag{5.12}$$

$$\delta = 1.5 \quad \begin{cases} \eta = 0.75 & r_o(\rho) = 0.134\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 - 0.369\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.029\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 1.705\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \\ \eta = 0.50 & r_o(\rho) = 0.064\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 - 0.218\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.017\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 1.637\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \\ \eta = -0.50 & r_o(\rho) = 0.080\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 - 0.021\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.032\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 1.367\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \\ \eta = -0.75 & r_o(\rho) = 0.186\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 - 0.071\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.081\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 1.303\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \end{cases} \tag{5.13}$$

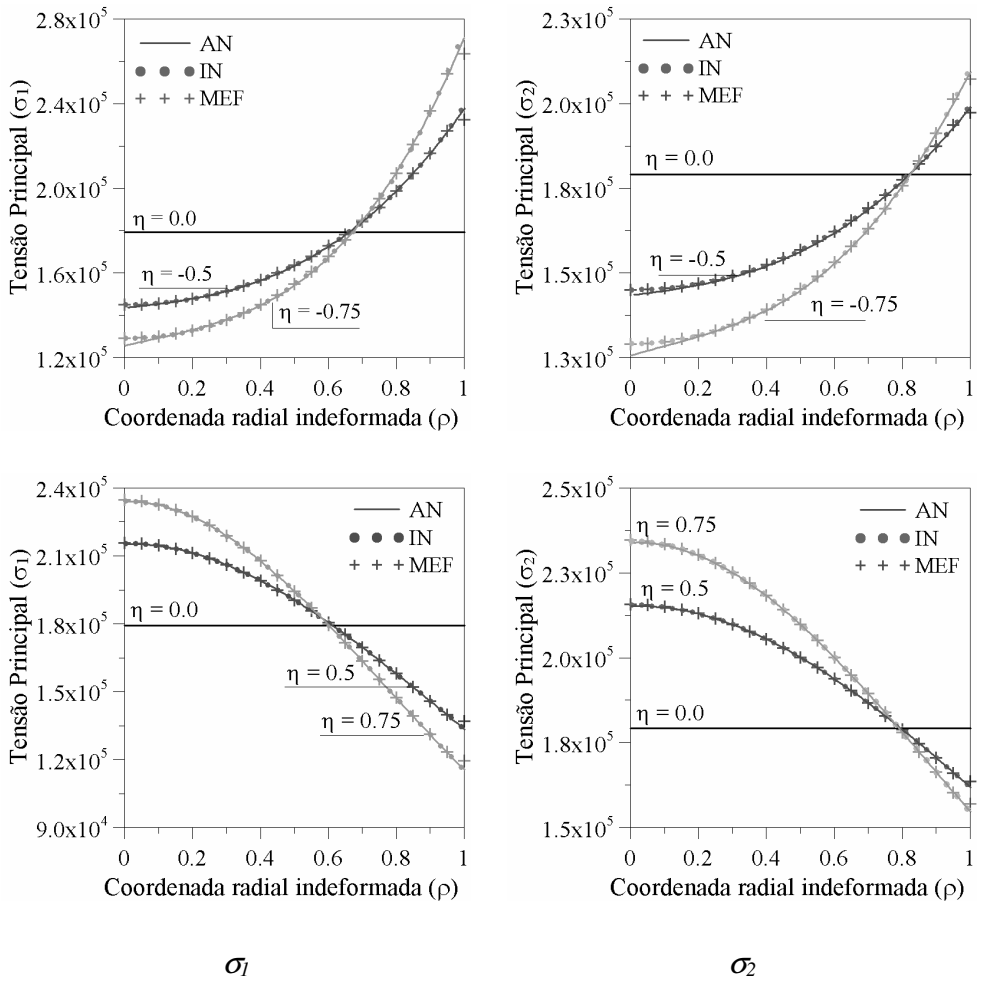
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

$$\delta = 2.0 \qquad \begin{aligned}
&\eta = 0.75 \quad r_o(\rho) = 0.171 - \left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 - 0.564\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.046\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 2.347\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \\
&\eta = 0.50 \quad r_o(\rho) = 0.080 - \left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 - 0.336\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.023\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 2.233\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \\
&\eta = -0.50 \quad r_o(\rho) = 0.096 - \left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 + 0.104\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.036\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 1.764\left(\frac{\rho}{R_o}\right) \\
&\eta = -0.75 \quad r_o(\rho) = 0.225 - \left(\frac{\rho}{R_o}\right)^4 + 0.039\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^3 + 0.087\left(\frac{\rho}{R_o}\right)^2 + 1.647\left(\frac{\rho}{R_o}\right)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Substituindo a equação de $r_o(\rho)$, dada em (5.11), nas equações das tensões principais σ_1 e σ_2, dadas em (3.30) e (3.31), obtém-se uma expressão analítica aproximada (AN) para as tensões. Essa expressão, juntamente com as soluções obtidas pela integração numérica (IN) e por elementos finitos (MEF) são favoravelmente comparadas na Figura 5.11 para uma membrana circular com $\delta = 1.10$ e diferentes valores do coeficiente de variação da espessura.

Observa-se na Figura 5.11 que as tensões principais variam de forma parabólica e que, para uma variação com aumento da espessura, ao longo da direção radial ($\eta > 0$), os valores das tensões principais diminuem. Enquanto que, para uma variação com diminuição da espessura na direção radial ($\eta < 0$) os valores das tensões principais aumentam. Finalmente observa-se que, quanto maior é a variação de η, maior é a variação das tensões ao longo da direção radial.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA



σ_1 σ_2

Figura 5.11 – Tensões principais (N/m^2) da membrana circular tracionada com espessura variável para diferentes valores de η. (δ = 1.10).

Na Figura 5.12 apresentam-se os valores da espessura da membrana circular tracionada obtidos por integração numérica e por elementos finitos considerando diferentes valores do coeficiente de variação da espessura e δ = 1.10. Apresenta-se também uma expressão analítica aproximada para a espessura obtida a partir da substituição da aproximação de $r_o(\rho)$ (5.11) em $H = h\rho/(r_o r_{o,\rho})$, obtida através de (3.22) e (3.8) .

Observa-se em todos os casos apresentados uma boa conformidade entre os resultados obtidos. Assim, a aproximação analítica é usada para a dedução das equações de movimento.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

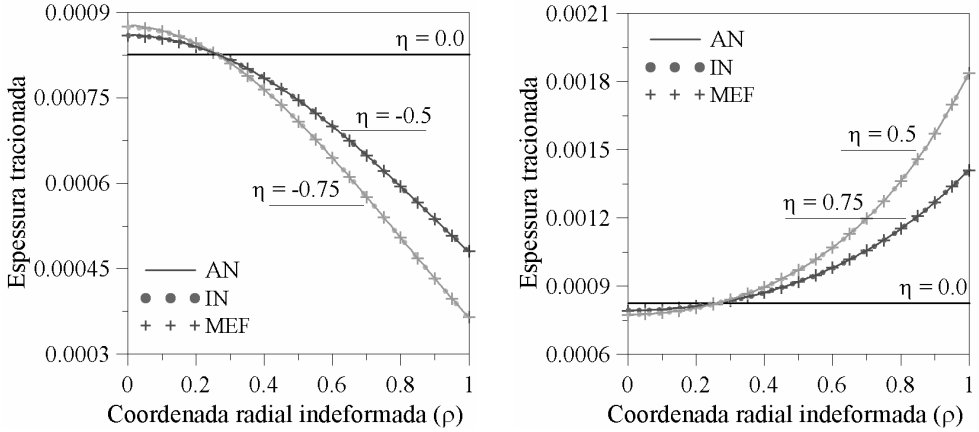


Figura 5.12 – Espessura (*m*) da membrana circular tracionada com espessura variável para diferentes valores de η. (δ = 1.10)

5.2.2.
Análise linear da vibração livre

Para a análise linear da vibração livre, parte-se da equação de movimento linear na direção transversal da membrana dada em (3.45) que, para a membrana circular com a variação da espessura, é dada pela seguinte equação diferencial parcial com coeficientes variáveis:

$$
\begin{aligned}
&2C_1\left[\left(-1+\frac{\rho^2}{r_o'^4 r_o^2}\right)\underline{\underline{\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial\rho^2}}}+\left(-\frac{1}{\rho^2}+\frac{\rho^2}{r_o'^2 r_o^4}\right)\underline{\underline{\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial\theta^2}}}+\right.\\
&\left.+\left(-\frac{1}{\rho}-\frac{4\rho^2 r_o''}{r_o'^5 r_o^2}+\frac{3\rho}{r_o'^4 r_o^2}-\frac{2\rho^2}{r_o'^3 r_o^3}+\frac{2\rho^3\eta}{r_o'^4 r_o^2}-2\rho\eta\right)\underline{\underline{\frac{\partial w(\rho,\theta,t)}{\partial\rho}}}\right]+\\
&+\Gamma\left(\underline{\underline{\frac{\partial^2 w(\rho,\theta,t)}{\partial t^2}}}\right)=0
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

onde $r_o(\rho)$ é dado por (5.11).

Como apresentado para vibração livre da membrana com variação da massa específica, a solução da equação de movimento linear (5.15) é obtida resolvendo a equação diferencial parcial pelo método de separação das variáveis ρ, θ e t na equação (5.15) e tem-se que o deslocamento transversal *w* escrito em função dessas variáveis como apresentado em (5.3).

Substituindo (5.3) em (5.15) obtém-se a seguinte equação de movimento linear, em função da direção radial, similar a equação diferencial Whittaker (Abramowitz e Stegun, 1972):

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

$$\left(-1+\frac{\rho^2}{r_o'^4 r_o^2}\right)\frac{d^2G(\rho)}{d\rho^2}+\left(-\frac{1}{\rho}-\frac{4\rho^2 r_o''}{r_o'^5 r_o^2}+\frac{3\rho}{r_o'^4 r_o^2}-\frac{2\rho^2}{r_o'^3 r_o^3}+\frac{2\rho^3\eta}{r_o'^4 r_o^2}-2\rho\eta\right)\frac{dG(\rho)}{d\rho}$$
$$+\left(\frac{\Gamma\omega_{mn}^2}{2C_1}-\frac{n^2\rho^2}{r_o'^2 r_o^4}+\frac{n^2}{\rho^2}\right)G(\rho)=0 \tag{5.16}$$

Utilizando a solução da equação diferencial de Whittaker (Abramowitz e Stegun, 1972) juntamente com as condições de contorno do problema obtém-se a seguinte expressão para o deslocamento transversal da membrana circular:

$$w(\rho,\theta,t)=A_{mn}\,M_n\left(\frac{-1}{2}+\frac{\Gamma b_{mn}}{4B\eta};\frac{n}{2};\eta\rho^2\right)\cos(n\theta)\,\cos(\omega_{mn}\,t) \tag{5.17}$$

sendo:

$$B=\frac{R_f^{\,3}\left(r_o'(R_o)\right)^3}{2C_1R_o\left(R_f^{\,2}\left(r_o'(R_o)\right)^4-R_o^{\,2}\right)} \tag{5.18}$$

onde A_{mn} corresponde à amplitude modal; M_n, à função hipergeométrica confluente Whittaker M apresentada em (5.7); m, ao número de semi-ondas radiais; n, ao número de ondas circunferenciais; b_{mn}, ao m-ésimo valor positivo onde a função Whittaker com $\rho=R_o$ é nula; ω_{mn} à freqüência de vibração e $r_o'(R_o)=\dfrac{dr_o}{d\rho}(R_o)$.

Substitui-se o deslocamento transversal (5.17) na equação de movimento (5.15), aplica-se o método de Galerkin e pela solução de um problema de auto-valor obtém-se as freqüências naturais da membrana circular com espessura variável.

Como dito anteriormente, os deslocamentos radial u e circunferencial v são desprezíveis em relação ao deslocamento transversal w, sendo suas contribuições em termos de inércia e rigidez desprezadas na análise das vibrações transversais da membrana.

Para a solução via método dos elementos finitos, utiliza-se a mesma malha empregada na análise estática, com elementos sólidos tri-dimensionais C3D8RH e C3DH. Os resultados analíticos (AN) e obtidos por elementos finitos (MEF) são comparados na Tabela 5.3

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

Tabela 5.3 – Freqüências de vibração lineares (rad/s) para a membrana circular com espessura variável na direção radial.

$\eta = -0.75$							
m	n	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	17,448	17,691	25,400	25,025	25,987	25,914
1	1	29,763	29,472	42,314	42,738	44,096	44,866
1	2	40,722	40,217	58,421	58,464	61,023	61,349
$\eta = -0.5$							
m	n	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	18,743	18,416	26,253	26,234	27,166	27,163
1	1	30,434	30,225	43,434	43,743	45,080	45,650
1	2	41,349	40,959	59,376	59,360	61,739	61,955
$\eta = 0.5$							
m	n	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	21,056	20,860	30,787	30,711	32,190	32,166
1	1	31,986	32,141	47,242	46,760	49,712	48,806
1	2	42,331	42,381	62,125	61,605	65,172	64,259
$\eta = 0.75$							
m	n	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	21,193	21,345	32,800	32,662	33,565	33,429
1	1	32,109	32,358	47,962	47,763	50,995	49,681
1	2	42,244	42,389	62,503	62,086	65,388	64,974

Apresenta-se na Figura 5.13 a variação da freqüência de vibração ω_{10} com o coeficiente de tração radial (δ) da membrana para três diferentes leis de variação da espessura. Como nos casos anteriores, observa-se um grande aumento na freqüência natural para pequenos valores de δ e que a curva tende ao valor constante da quando $\delta \to \infty$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

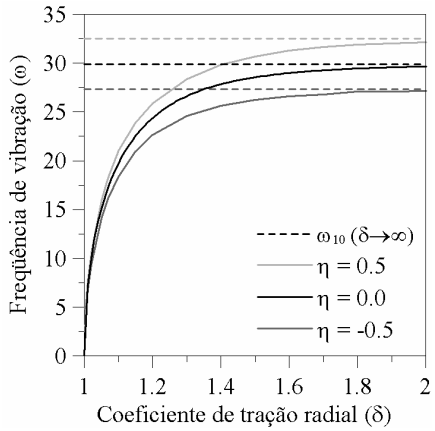


Figura 5.13 – Variação da freqüência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de tração radial δ para diferentes leis de variação da espessura da membrana circular.

Na Figura 5.14 apresenta-se a influência do coeficiente de variação espessura (η) nas freqüências de vibração. Observa-se um aumento na freqüência natural com o aumento do valor do coeficiente de variação da espessura η. Isso ocorre devido ao aumento da espessura para valores crescentes de η e, conseqüentemente, da rigidez da membrana, o que proporciona um aumento da freqüência de vibração. Além disso, verifica-se também que, para valores de δ maiores que dois, a curva já é bem próxima da curva limite superior com $\delta \to \infty$.

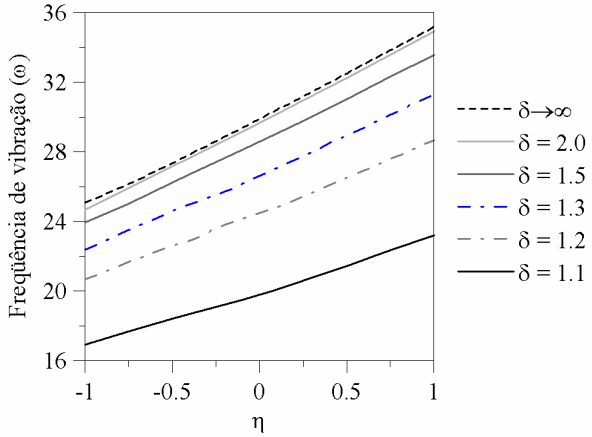


Figura 5.14 – Variação da freqüência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de variação da espessura, η.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

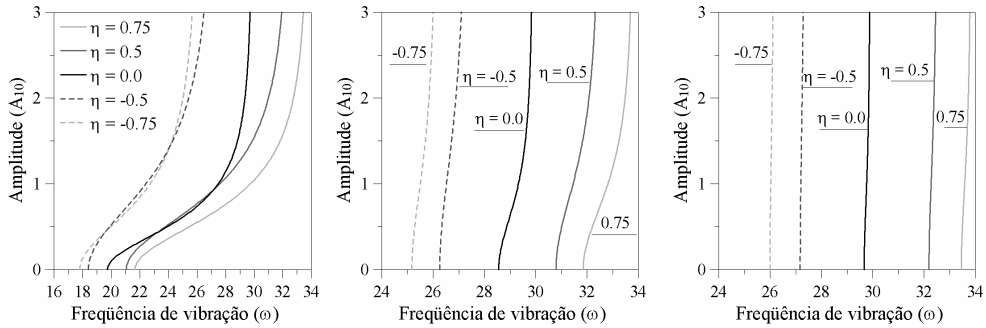
5.2.3.
Análise não linear da vibração livre

Como nos casos anteriores, com base nos resultados obtidos por elementos finitos, na análise das vibrações não lineares da membrana circular os deslocamentos u e v são desprezados e a equação de movimento não linear na direção transversal da membrana circular com espessura variável se reduz a:

$$-2\eta\,\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\theta}}\right)+\rho\,\Gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (5.19)$$

Para a análise não linear aproxima-se a resposta não linear pela expressão (5.17) e utiliza-se o método de Galerkin-Urabe para se obter a relação freqüência de vibração-amplitude associada à menor freqüência natural (m = 1 e n = 0).

Essa relação é apresentada na Figura 5.15 para diferentes valores do coeficiente de variação da espessura η. Observa-se que para valores crescentes de η as freqüências de vibração aumentam deslocando a curva para a direita.



$\delta = 1.1$ $\delta = 1.5$ $\delta = 2.0$

Figura 5.15 - Relação freqüência (rad/s) – amplitude (m) para vibração livre da membrana circular com diferentes valores de η.

Na Figura 5.16 ilustra-se a relação freqüência de vibração - amplitude modal para diferentes valores de δ com η = 0.5.

Observa-se nas Figura 5.15 e 5.16 que a variação da espessura não influencia no tipo do comportamento da membrana circular, apresentando o mesmo comportamento *hardening*, maior para as menores amplitudes de vibração e tendendo a um valor constante nas grandes amplitudes de vibração. Esse valor constante da freqüência de vibração refere-se ao valor da freqüência quando a δ tende ao infinito. Além disso, observa-se que a não linearidade diminui com o

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

aumento do coeficiente de tração radial e que a resposta fica praticamente linear para um raio tracionado igual a duas vezes o raio indeformado ($\delta = 2.0$).

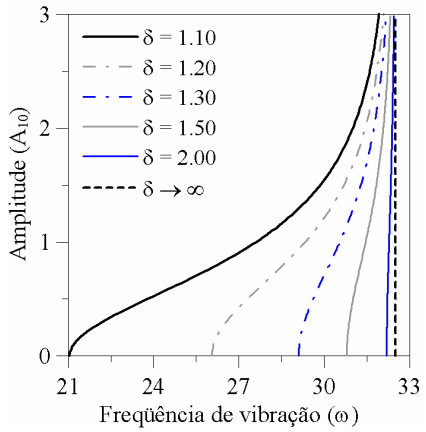


Figura 5.16 - Relação freqüência (rad/s)-amplitude (*m*) para vibração livre da membrana circular com diferentes valores de δ ($\eta = 0.5$).

Na Figura 5.17 mostra-se a relação normalizada freqüência-deslocamento da membrana para um ponto de coordenadas (0; 0.5) da membrana indeformada. A freqüência de vibração foi normalizada com relação à freqüência natural de cada caso. Novamente observa-se que, quanto mais tracionada a membrana, menor o grau de não-linearidade da resposta.

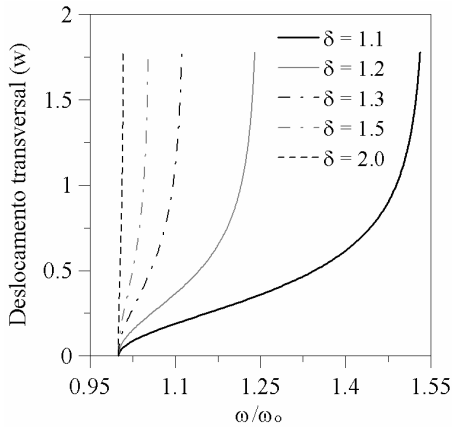


Figura 5.17 - Relação normalizada freqüência-deslocamento transversal (*m*) da membrana circular ($\eta = 0.5$).

A relação normalizada freqüência – deslocamento transversal da membrana para diferentes valores de η e com $\delta = 1.1$ é apresentada na Figura 5.18. Observa-se que para pequenos deslocamentos as curvas com diferentes valores de η se

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

sobrepõe e que para grandes deslocamentos a não linearidade aumenta levemente para valores crescentes de η.

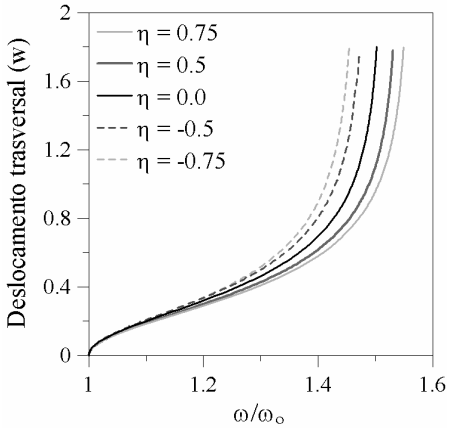


Figura 5.18 - Relação normalizada freqüência (rad/s) – deslocamento transversal da membrana circular (δ = 1.1).

A relação freqüência-deslocamento também é encontrada a partir da resposta no tempo obtida por elementos finitos juntamente com o metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee (2005) e é favoravelmente comparada com a relação obtida analiticamente, para um ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada, para duas variações da massa específica (η = ±0.5). Esses resultados são apresentados na Figura 5.19.

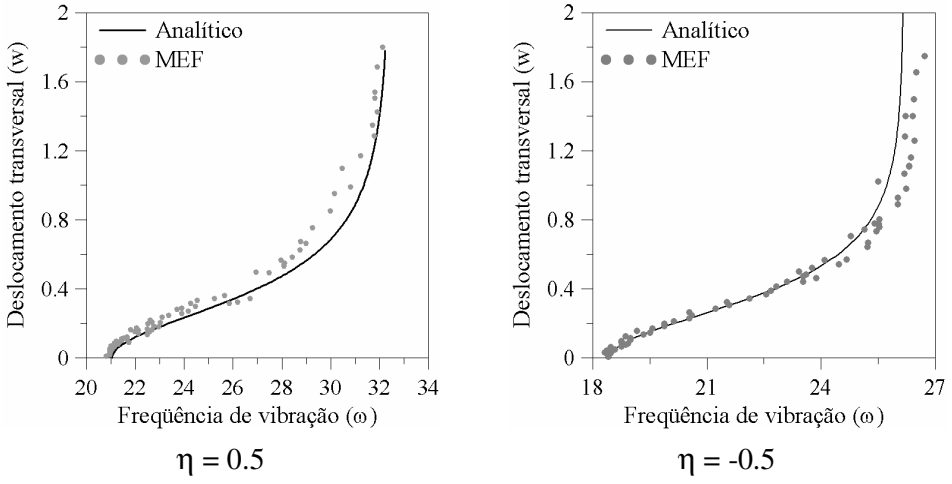


Figura 5.19 - Relação freqüência de vibração (rad/s) - deslocamento transversal (*m*) para dois valores de η (δ=1.10).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

Como a membrana circular com coeficiente de variação da espessura $\eta = 0.5$ possui a mesma massa total que a membrana circular com coeficiente de variação de massa específica $\kappa = 0.595$, comparam-se as suas relações normalizadas freqüência-deslocamento na Figura 5.20. A freqüência de vibração foi normalizada com relação à freqüência natural de cada caso e o deslocamento apresentado é no ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada.

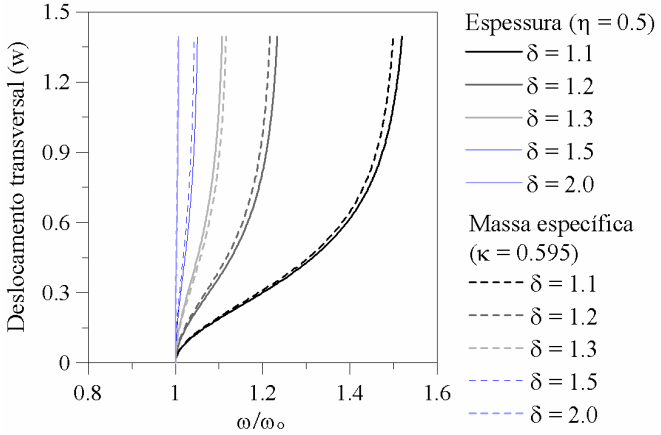


Figura 5.20 - Relação normalizada freqüência – deslocamento transversal (*m*) da membrana circular com variação de espessura e massa específica.

Observa-se que, apesar da massa da membrana ser a mesma, os resultados não se sobrepõem, mas apresentam valores bem próximos e o mesmo comportamento global.

5.2.4.
Análise não linear da vibração forçada

Na análise das vibrações forçadas considera-se a vibração transversal axissimétrica provocada por uma pressão excitadora uniforme dependente do tempo *P(t)*. Além disso, da mesma forma que na vibração livre não linear, os campos de deslocamentos radial *u* e circunferencial *v* são desprezíveis em relação ao campo de deslocamento transversal *w*.

Dessa maneira, a equação de movimento não linear da membrana circular com espessura variável na direção transversal sob vibração forçada axissimétrica é dada por:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

$$-2\eta\,\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\rho}}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho\frac{\partial W}{\partial z_{,\theta}}\right)+\rho\,\Gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\zeta\,C_c\frac{\partial w}{\partial t}-P(t)r_o\frac{dr_o}{d\rho}=0 \quad (5.20)$$

onde a pressão excitadora é $P(t)=P_o\cos(\Omega t)$.

Como a vibração axissimétrica transversal é associada ao primeiro modo axissimétrico (n = 0 e m = 1), utiliza-se o deslocamento transversal (5.17).

Para obtenção dos resultados numéricos, consideram-se a força com amplitude de excitação P_o = 1 N/m^2. A relação freqüência de vibração – amplitude é apresentada na Figura 5.21 para diferentes valores do coeficiente de variação da espessura η.

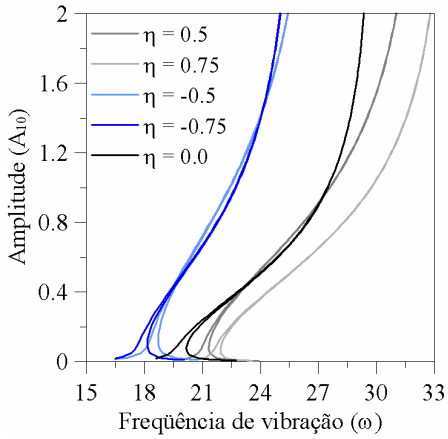
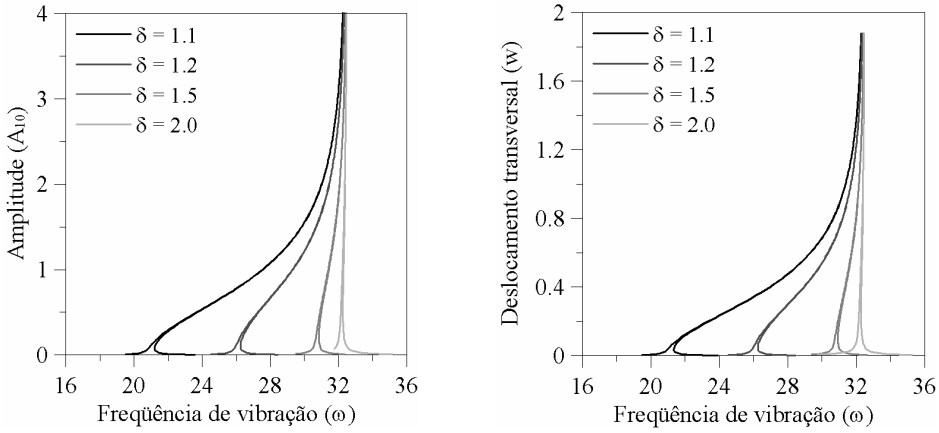


Figura 5.21 - Relação freqüência (rad/s) – amplitude (m) para vibração forçada da membrana circular com diferentes valores de η (δ = 1.1).

As curvas de ressonância para diferentes valores de δ são apresentadas na Figura 5.22 para uma variação da espessura com η = 0.5. Observa-se que, para um dado valor de η, as curvas tendem a um mesmo valor constante para grandes amplitudes de vibração.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA



(a) Amplitude (b) Deslocamento transversal

Figura 5.22 – Curva de ressonância para a vibração forçada da membrana circular com espessura variável com diferentes δ. (η = 0.5)

O método de continuação é utilizado para o cálculo dos diagramas de bifurcação do mapa de Poincaré da membrana circular tracionada que são apresentadas na Figura 5.23, para uma membrana com coeficiente de tração radial δ = 1.1, amplitude da excitação $P_o = 1\ N/m^2$ e três diferentes valores de η.

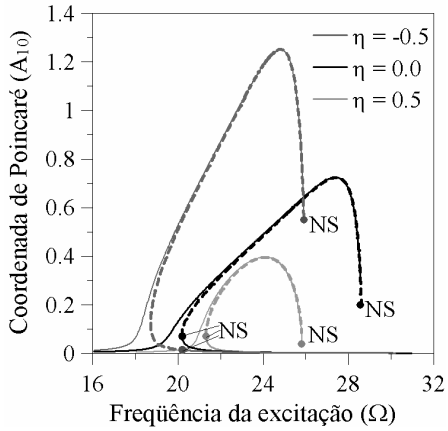


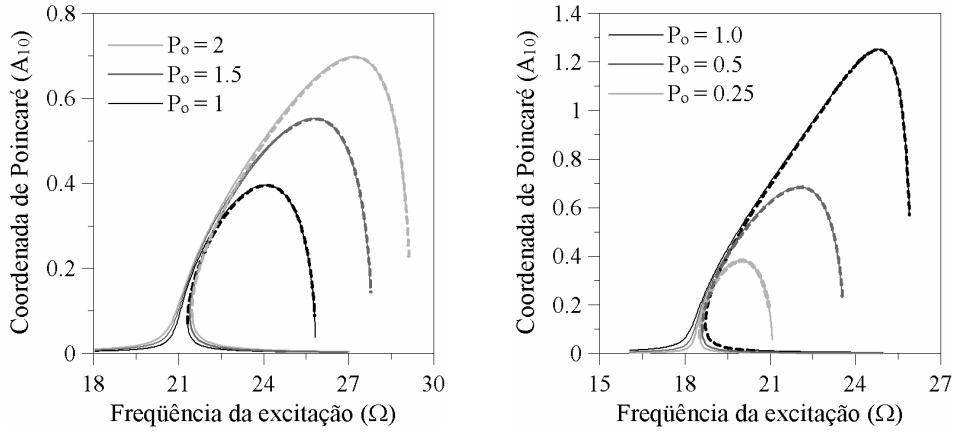
Figura 5.23 – Diagrama de bifurcação do mapa de Poincaré. Coordenada de Poincaré A_{10} (*m*) como função da freqüência de excitação Ω (rad/s) (P_o = 1 N/m^2; ζ = 0.05; δ = 1.1).

Observa-se que dependendo do valor de P_o e Ω, a membrana pode exibir uma ou três respostas e que os ramos estáveis e instáveis estão conectados por bifurcações do tipo nó-sela (NS nas figuras).

Na Figura 5.24 apresentam-se os diagramas de bifurcação do mapa de Poincaré para valores crescentes de P_o. Observa-se que, para valores crescentes da

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

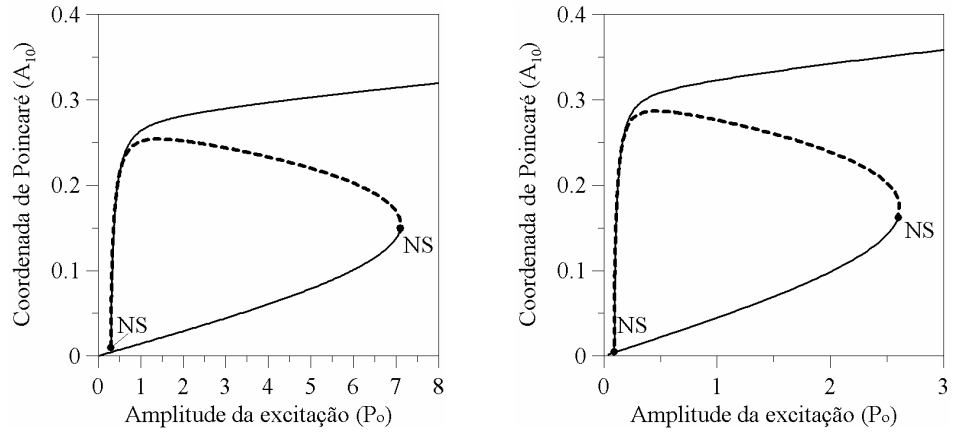
magnitude da carga, a não-linearidade da solução aumenta e que todos os casos apresentam o mesmo tipo de comportamento *hardening*.



(a) $\eta = 0.5$ (b) $\eta = -0.5$

Figura 5.24 – Diagrama de bifurcação. Amplitude de vibração A_{10} (*m*) como função da freqüência de excitação Ω (rad/s) ($\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$)

Na Figura 5.25 apresenta-se o diagrama de bifurcação em função da amplitude da excitação P_o para valores selecionados de Ω na região principal de ressonância e dois valores de η. Observam-se em cada caso duas bifurcações do tipo nó-sela e que, para o caso onde $\eta = -0.5$, a não-linearidade da resposta é menor, levando a uma menor faixa de P_o onde se observa multiplicidade de soluções.

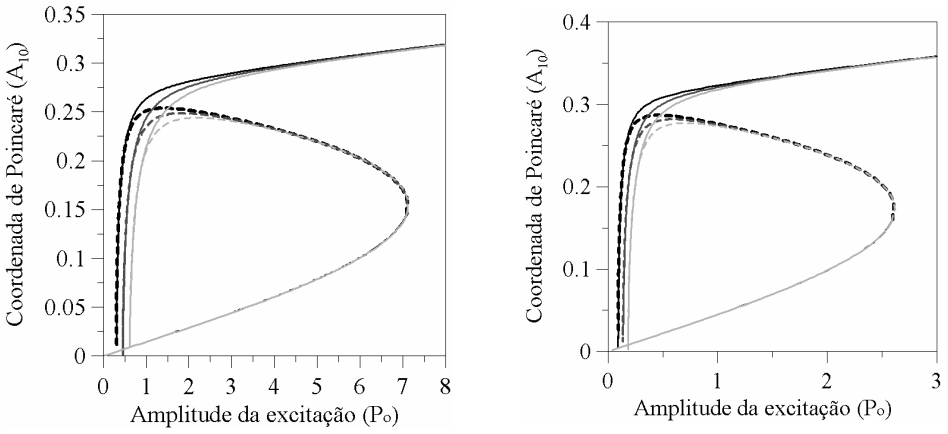


(a) $\Omega = 22$ rad/s; $\eta = 0.5$ (b) $\Omega = 19$ rad/s; $\eta = -0.5$

Figura 5.25 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da freqüência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} (*m*) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2) ($\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

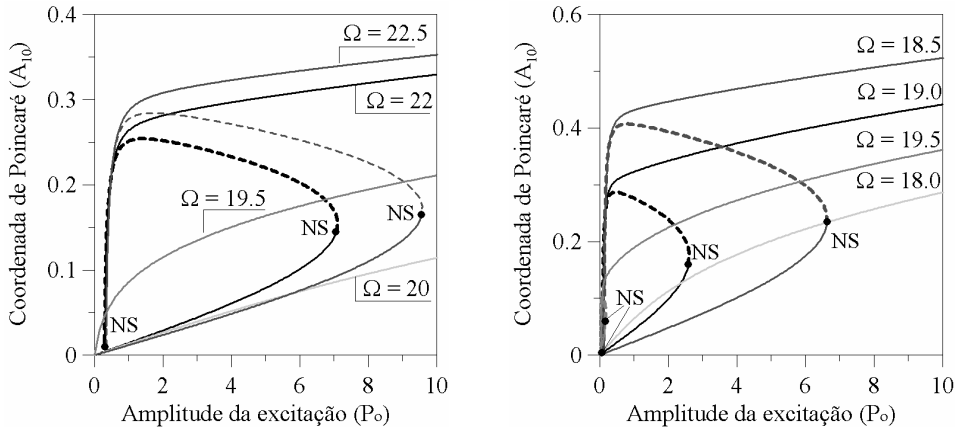
Na Figura 5.26 apresentam-se diagramas de bifurcação em função da amplitude da excitação, para diferentes valores de amortecimento. Observa-se que o amortecimento influencia na multiplicidade das soluções e nos saltos entre as soluções estáveis co-existentes diminuindo, com o aumento do amortecimento as regiões onde isso pode ocorrer.



(a) Ω = 22 rad/s; η = 0.5 (b) Ω = 19 rad/s; η = -0.5

Figura 5.26 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2) (δ = 1.1)

Na Figura 5.27 apresenta-se diagramas de bifurcação em função da amplitude da excitação para diferentes valores da freqüência da excitação para a membrana com δ = 1.1 e dois valores de η ($\pm$0.5).



(a) η = 0.5 (b) η = -0.5

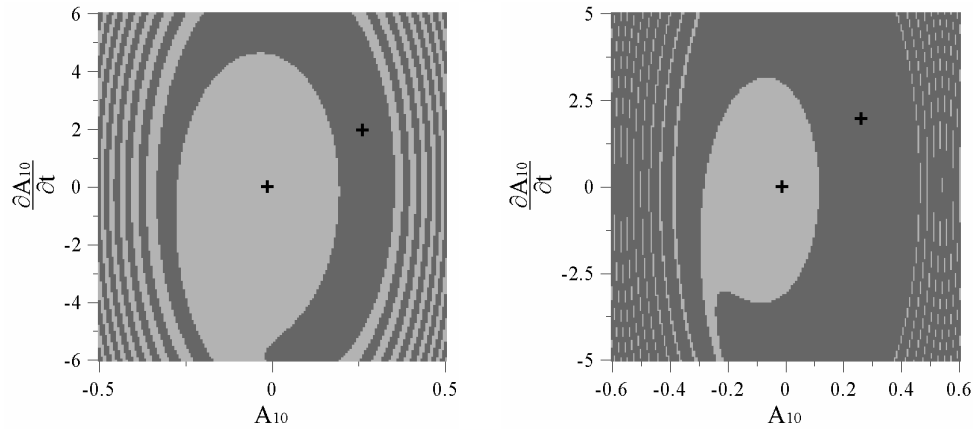
Figura 5.27 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da freqüência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} em função da amplitude da excitação P_o. (δ = 1.1; ζ = 0.05)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA

Observa-se na Figura 5.27 que para os valores das freqüências de excitação na região principal de ressonância há duas soluções estáveis e uma instável para uma grande faixa de P_o. Para valores da freqüência de excitação distantes da região de ressonância só é observada uma resposta (estável).

A Figura 5.28 ilustra as das bacias de atração para valores de parâmetros escolhidos de tal modo que a resposta permaneça na região principal de ressonância onde ocorrem três soluções. A Figura 5.28 corresponde à projeção da bacia de atração no plano fase A_{10} x $\dot{A}_{10}$ e as cores diferentes correspondem aos atratores distintos realçados nas bacias de atração pela cruz negra.

A cor cinza escuro corresponde à bacia de atração da oscilação de grande amplitude e a cor cinza claro corresponde à oscilação de pequena amplitude. Nota-se que na região principal de ressonância para a membrana com η = -0.5 a maioria das condições iniciais conduz a soluções que convergem ao atrator de grande amplitude, o que não ocorre para a membrana com η = 0.5.



(a) Ω = 22 rad/s; η = 0.5 (b) Ω = 19 rad/s; η = -0.5

Figura 5.28 – Bacia de atração no plano fase das condições iniciais A_{10} x $\dot{A}_{10}$ (P_o = 1 N/m^2; ζ = 0.05; δ = 1.1).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510772/CA