

4

Membrana hiperelástica circular de espessura constante

Membranas possuem uma resposta estrutural única devido à sua espessura extremamente fina e sua rigidez a flexão nula. Além disso, as características geométricas da membrana, tais como curvatura e axissimetria, e os diversos tipos específicos de materiais influenciam nessa resposta.

Neste capítulo é realizada uma particularização da formulação apresentada para uma membrana hiperelástica circular completa. Para isso, se considera na formulação apresentada anteriormente que o raio indeformado interno $\rho_o = 0$. Além disso, adota-se a simplificação da espessura considerando-a constante e avaliam-se a resposta estática e as vibrações linear e não linear.

Os resultados da formulação analítica são comparados com os resultados obtidos através do método dos elementos finitos.

4.1. Análise estática

A solução analítica da equação de equilíbrio (3.34), satisfazendo a condição de contorno $r_o(R_o) = R_f$ para uma membrana sob deslocamento radial uniforme é:

$$r_o(\rho) = \delta \rho \quad (4.1)$$

onde:

$$\delta = \frac{R_f}{R_o} \quad (4.2)$$

As tensões principais são obtidas substituindo a coordenada radial estática (4.1) nas expressões das tensões principais (3.30) e (3.31). Assim, para uma membrana circular de espessura constante, as tensões principais são dadas por:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{2C_1(\delta^6 - 1)}{\delta^4} \quad (4.3)$$

Da mesma forma, partindo das equações (3.20) a (3.22), obtêm-se as extensões principais da membrana estudada como:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \delta \quad (4.4)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\delta^2} \quad (4.5)$$

Utilizando a relação física da extensão principal na direção transversal (3.8) e a equação (4.5), chega-se à seguinte relação entre as espessuras da membrana circular indeformada (h) e tracionada (H):

$$H = \frac{h}{\delta^2} \quad (4.6)$$

Os resultados numéricos apresentados posteriormente neste trabalho são para uma membrana de raio externo indeformado $R_o = 1 \text{ m}$ e espessura indeformada $h = 0.001 \text{ m}$. O material da membrana é considerado do tipo neo-Hookeano, isotrópico e incompressível com uma constante do material $C_1 = 0.17 \text{ MPa}$ (Selvadurai, 2006) e massa específica $\Gamma = 2200 \text{ Kg/m}^3$ (Pinto, 2006).

Todos os resultados numéricos dimensionais apresentados posteriormente neste trabalho possuem as seguintes unidades: tensões em N/m^2 , deslocamentos e amplitudes em metros, frequências em rad/s e tempo em segundos.

Para a solução via método dos elementos finitos, utilizou-se, no programa comercial Abaqus®, elementos de membrana M3D4R e M3D3. Após a análise de convergência em termos das tensões principais discretizou-se a membrana circular com uma malha de 9789 elementos de comprimento $L_{ele} < 0.028 R_o$.

Dessa forma, obteve-se a configuração tracionada da membrana circular para diferentes valores da coeficiente de tração radial (δ). Na Figura 4.1 apresenta-se a variação da coordenada radial $r_o(\rho)$ obtida pela resposta analítica (AN) e pelo método dos elementos finitos (MEF), para três valores de δ .

As membranas circulares apresentadas na Figura 4.1 possuem a seguinte distribuição radial:

$$\delta = 1.1 \quad r_o(\rho) = 1.1 \rho \quad (4.7)$$

$$\delta = 1.5 \quad r_o(\rho) = 1.5 \rho \quad (4.8)$$

$$\delta = 2.0 \quad r_o(\rho) = 2.0 \rho \quad (4.9)$$

Os valores das tensões principais σ_1 e σ_2 obtidos para a membrana circular, através das duas metodologias, são apresentados na Tabela 4.1.

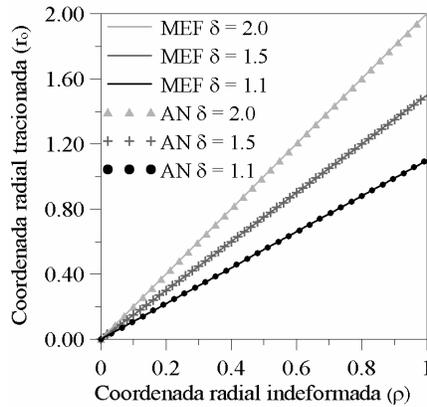


Figura 4.1 – Variação do comprimento radial tracionado (r_o) da membrana circular.

Tabela 4.1 – Tensões principais (σ_1 e σ_2) para a membrana circular tracionada.

δ	$\sigma_1; \sigma_2 (N/m^2)$	
	Analítico	MEF
1.1	179175	179175
1.5	697840	697840
2.0	1338750	1338750

Ressalta-se que, tanto pelos resultados numéricos quanto pela solução analítica, se observou que as tensões principais para a membrana circular tracionada (σ_1 e σ_2) e a coordenada radial tracionada (r_o) independem da espessura da membrana indeformada.

Na Tabela 4.2 apresenta-se os valores da espessura da membrana tracionada obtidos analiticamente e através do método dos elementos finitos e, observa-se em todos os casos apresentados uma boa conformidade entre os resultados.

Tabela 4.2 – Espessura da membrana circular tracionada (H).

δ	$H(m)$	
	Analítico	MEF
1.1	0.000826	0.000826
1.5	0.000444	0.000444
2.0	0.000250	0.000250

4.2. Análise linear da vibração livre

Ao linearizar as equações de movimento, a equação na direção transversal fica desacoplada das duas equações relativas aos deslocamentos no plano da membrana. Para a análise das vibrações lineares transversais, parte-se da equação de movimento na direção transversal da membrana (3.48) na qual é substituído o raio da membrana tracionada (4.1), obtendo-se a seguinte equação linear de movimento:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{2C_1}{\Gamma} \left(1 - \frac{1}{\delta^6}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.10)$$

A equação (4.10) é similar à equação clássica de ondas onde a^2 é: (Kreyszig, 2006)

$$a^2 = \frac{2C_1}{\Gamma} \left(1 - \frac{1}{\delta^6}\right) \quad (4.11)$$

O deslocamento transversal $w(\rho, \theta, t)$ pode ser obtido resolvendo-se a equação (4.10), juntamente com as condições de contorno. Assim, a solução analítica do deslocamento transversal da membrana circular, obtida utilizando separação de variáveis, é:

$$w(\rho, \theta, t) = A_{mn} J_n \left(\alpha_{mn} \frac{\rho}{R_o} \right) \cos(n\theta) \cos(\omega_{mn} t) \quad (4.12)$$

onde A_{mn} corresponde a amplitude modal; J_n é a função Bessel de primeiro tipo de ordem n ; m o número de semi-ondas radiais; n o número de ondas circunferenciais; α_{mn} é m -ésimo valor positivo onde $J_n(\alpha)$ é nula; R_o é o raio da membrana indeformada; t é o tempo e ω_{mn} é a frequência de vibração.

Substituindo o deslocamento transversal (4.12) na equação de movimento (4.10), obtém-se a seguinte equação para as frequências naturais da membrana circular:

$$\omega_{mn} = \alpha_{mn} \sqrt{\frac{2C_1}{R_o^2 \Gamma} \left(1 - \frac{1}{\delta^6}\right)} \quad (4.13)$$

Considerando o limite de $\delta \rightarrow \infty$ conclui-se que, quando o raio tracionado aumenta, as frequências convergem para:

$$\omega_{mn}(\delta \rightarrow \infty) = \alpha_{mn} \sqrt{\frac{2 C_1}{R_o^2 \Gamma}} \quad (4.14)$$

A Figura 4.2 ilustra os espectros de frequência, calculados analiticamente, da membrana circular com diferentes níveis de tração e permite observar que, para cada valor de n , a variação das frequências de vibração em relação ao número de semi-ondas radiais é linear e que a menor frequência de vibração ocorre para uma combinação de ondas $m = 1$ e $n = 0$.

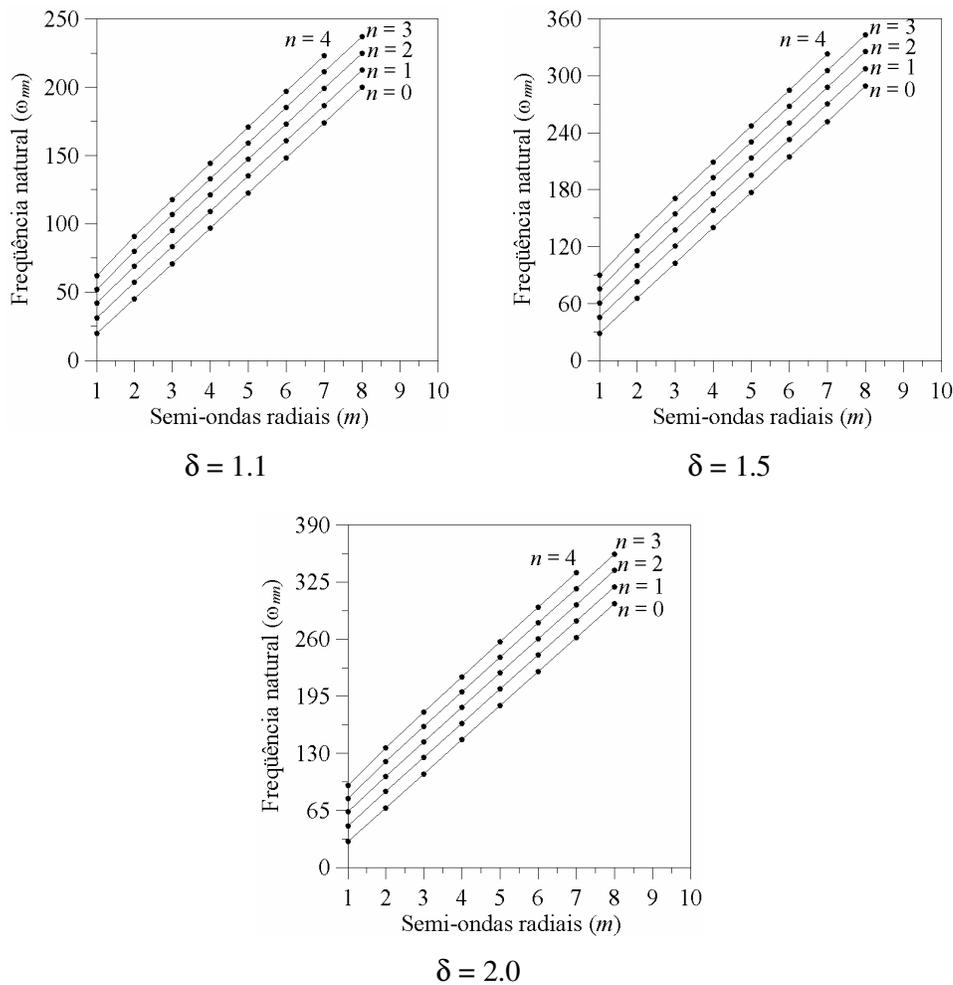


Figura 4.2 - Espectro das frequências de vibração (rad/s) da membrana circular.

Para a solução via método dos elementos finitos, utiliza-se novamente uma malha com 9789 elementos de membrana M3D4R e M3D3. Os resultados analíticos (AN) e obtidos por elementos finitos (MEF) são comparados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Freqüências de vibração lineares (rad/s)

m	n	$\delta = 1.1$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$	
		AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
1	0	19.7298	19.7273	28.5533	28.5502	29.6617	29.6579
1	1	31.4360	31.4429	45.4953	45.5053	47.2709	47.2709
1	2	42.1331	42.1413	60.9770	60.9902	63.3433	63.3596

Na Figura 4.3 apresenta-se a relação entre a freqüência de vibração e o coeficiente de tração radial (δ) da membrana para três modos de vibração. Observa-se que, para pequenos valores de δ , ocorre um grande aumento na freqüência natural e que a curva apresenta uma convergência monotônica. Os valores das freqüências tendem a um valor constante à medida que δ aumenta. Esse comportamento é observado para todos os modos de vibração.

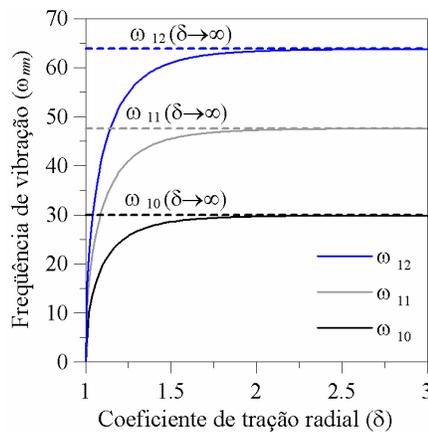


Figura 4.3 – Variação da freqüência de vibração (rad/s) em função do parâmetro de alongamento radial δ .

A relação entre a freqüência de vibração e o raio inicial indeformado (R_o) é apresentada na Figura 4.4. Verifica-se que para valores pequenos do raio indeformado ocorre uma rápida diminuição da freqüência de vibração e que a curva tende a valores constantes à medida que R_o cresce. Esse comportamento é observado para diferentes valores da razão δ e modos de vibração com diferentes combinações de ondas (m e n).

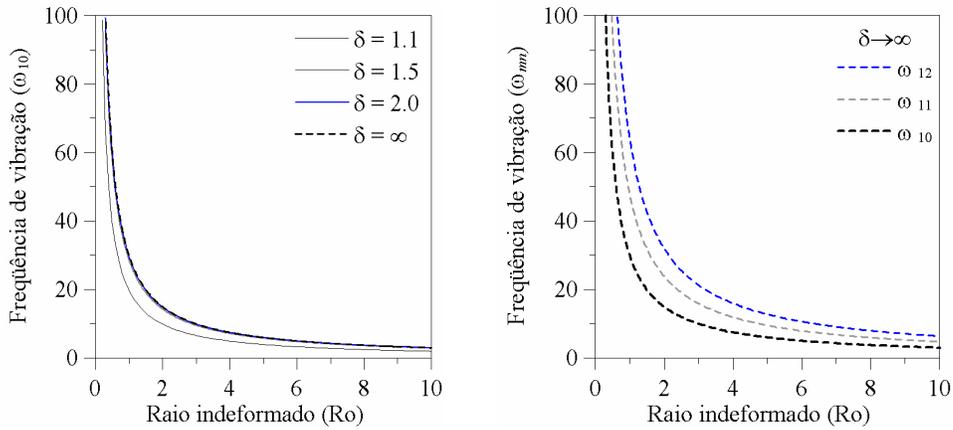


Figura 4.4 – Variação de frequência de vibração (rad/s) em função do raio indeformado (m), R_o .

Os modos de vibração da membrana circular associados às três menores frequências naturais são apresentados na Figura 4.5.

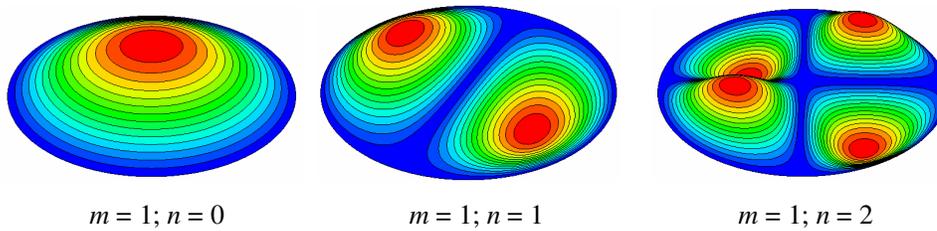


Figura 4.5 – Modos de vibração da membrana circular.

Ressalta-se que as frequências lineares de vibração independem da espessura da membrana circular indeformada (h).

Para um sistema amortecido, o deslocamento transversal pode ser escrito da seguinte maneira (Kin, 1998):

$$w(\rho, \theta, t) = A_{mn} J_n(\alpha_{mn} \frac{\rho}{R_o}) \cos(n\theta) e^{(-\frac{ct}{2})} * \left(\cos(\sqrt{\omega_{mn}^2 - \frac{c^2}{4}} t) + \frac{c}{2} \frac{\sin(\sqrt{\omega_{mn}^2 - \frac{c^2}{4}} t)}{\sqrt{\omega_{mn}^2 - \frac{c^2}{4}}} \right) \tag{4.15}$$

onde c é o parâmetro de amortecimento dado por $c = \zeta C_c$; ζ é o coeficiente de amortecimento e C_c é o amortecimento crítico.

4.3. Análise não linear da vibração livre

Primeiramente a resposta não-linear da vibração livre da membrana sob grandes e pequenas amplitudes de vibração é obtida utilizando o método dos elementos finitos. As componentes do deslocamento da vibração livre u , v e w ao longo do raio deformado da membrana ($\delta = 1.10$) para uma configuração axissimétrica de grande amplitude são ilustradas na Figura 4.6. Os resultados numéricos mostram que durante as vibrações transversais as componentes u e v são desprezíveis quando comparadas com o deslocamento transversal w . Resultados semelhantes foram encontrados na vibração forçada da membrana submetida à uma pressão hidrostática.

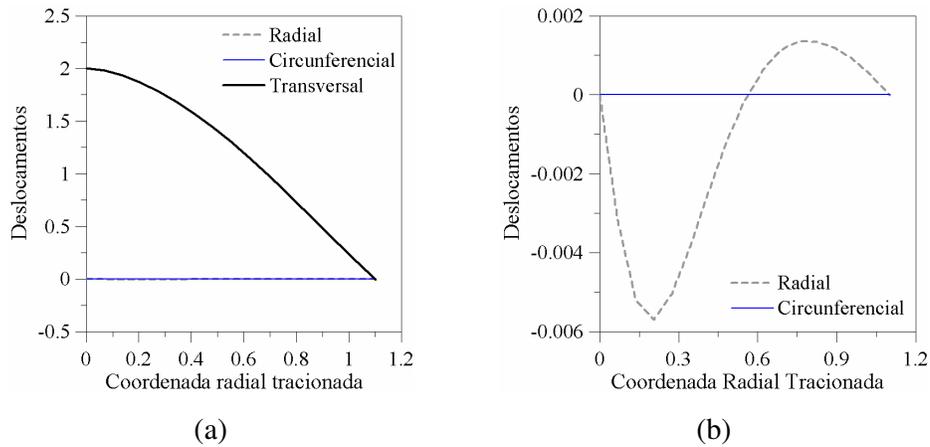


Figura 4.6 – (a) Variação dos deslocamentos (m) da membrana circular pré-tensionada sob grande amplitude de vibração ao longo do raio deformado. (b) Detalhe dos deslocamentos(m) radial e circunferencial ($\delta = 1.1$).

Assim, no desenvolvimento de um modelo de baixa dimensão para as vibrações transversais não-lineares de uma membrana os deslocamentos u e v são desprezados e a equação (3.42) reduz-se a:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{-4\rho^6 w_{,\rho}^2 + \rho^4 (\delta^2 \rho^2 + w_{,\theta}^2 + \rho^2 w_{,\rho}^2)}{\delta^2 (\delta^2 \rho^2 + w_{,\theta}^2 + \rho^2 w_{,\rho}^2)^3} - 1 \right] \frac{2C_1}{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \\
 & \left[\frac{-4\rho^5 \delta^2 - 8\rho^4 w_{,\theta} w_{,\theta\rho} - 4\rho^5 w_{,\rho}^2}{\delta^2 (\delta^2 \rho^2 + w_{,\theta}^2 + \rho^2 w_{,\rho}^2)^3} + \frac{5\rho^3}{\delta^2 (\delta^2 \rho^2 + w_{,\theta}^2 + \rho^2 w_{,\rho}^2)^2} - \frac{1}{\rho} \right] \frac{2C_1}{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \\
 & \left[\frac{-4\rho^2 w_{,\theta}^2 + \rho^2 (\delta^2 \rho^2 + w_{,\theta}^2 + \rho^2 w_{,\rho}^2)}{\delta^2 (\delta^2 \rho^2 + w_{,\theta}^2 + \rho^2 w_{,\rho}^2)^3} - \frac{1}{\rho^2} \right] \frac{2C_1}{\Gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \\
 & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

A precisão destas hipóteses é confirmada nas análises seguintes.

Para se obter a resposta não linear da membrana circular pré-tensionada, o campo de deslocamentos transversal w pode ser aproximado por um somatório de $M \times N$ modos ortogonais, dado por:

$$w(\rho, \theta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N A_{mn}(t) J_n\left(\alpha_{mn} \frac{\rho}{R_o}\right) \cos(n\theta) \tag{4.17}$$

onde $A_{mn}(t)$ corresponde à amplitude do deslocamento em função do tempo.

O método de Galerkin é utilizado para se obter as equações diferenciais ordinárias não lineares no domínio do tempo.

Na análise das vibrações livres estuda-se a vibração associada à menor frequência natural ($m = 1$ e $n = 0$) que corresponde ao primeiro modo axissimétrico.

Para isso, o deslocamento transversal (4.17) é aproximado com $N = 0$ e considerando-se um número crescente de modos radiais ($M = 1, 2$ e 3). As equações algébricas não-lineares resultantes do emprego do método de Galerkin-Urabe (Urabe e Reiter, 1966; Bour, 1972) são resolvidas e a relação frequência de vibração - amplitude modal é obtida. A variação de cada amplitude modal A_{i0} em (4.17) é apresentada na Figura 4.7 considerando-se um número crescente de modos M para três diferentes valores de δ .

Os resultados mostram que um modelo reduzido com apenas um grau de liberdade (expansão 1, com $M = 1$) é suficiente para se obter respostas corretas

sob grandes deslocamentos. As amplitudes dos modos subseqüentes (A_{20} e A_{30}) são muito pequenas quando comparadas com A_{10} .

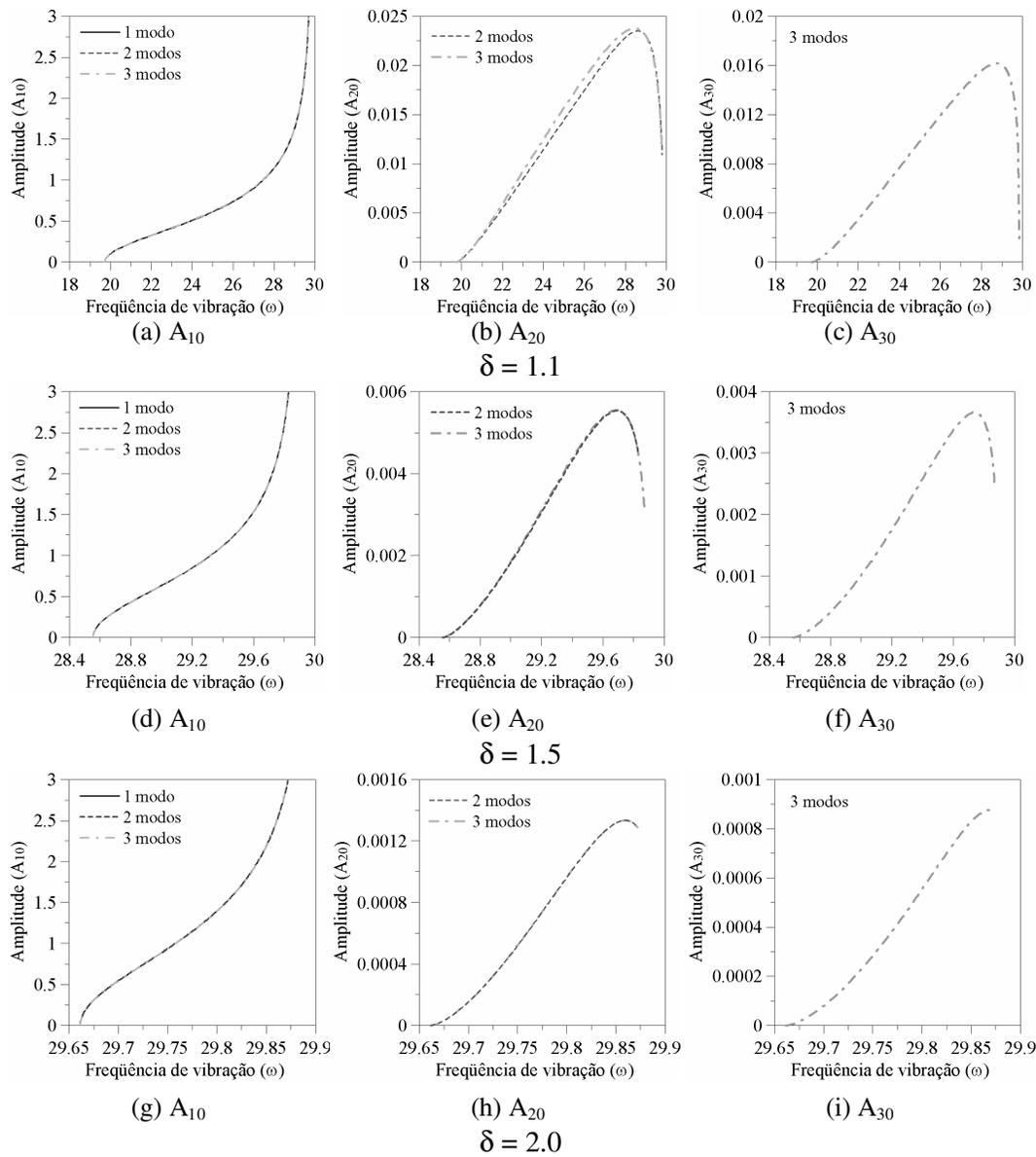


Figura 4.7 – Variação da frequência de vibração (rad/s) com a amplitude modal (m) considerando-se um número crescente de modos em (4.17).

Na Figura 4.8 ilustra-se a relação frequência de vibração - amplitude modal para diferentes valores do coeficiente de tração radial, δ .

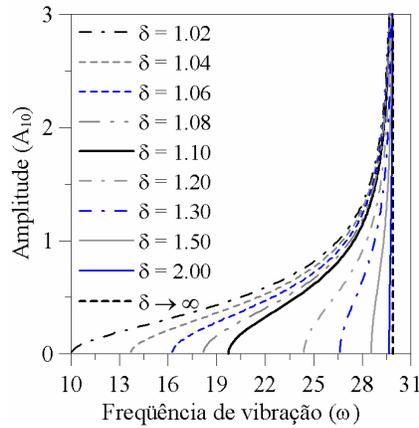


Figura 4.8 - Relação freqüência (rad/s)-amplitude modal (m) para vibração livre da membrana circular com diferentes valores de δ .

Observa-se que, para pequenas amplitudes de vibração, ocorre um grande aumento na freqüência de vibração e que, com o aumento da amplitude de vibração, o efeito *hardening* diminui e a curva muda de direção tendendo a um valor constante para grandes amplitudes de vibração. Esse valor constante da freqüência de vibração refere-se ao valor da freqüência quando o coeficiente de tração radial tende ao infinito.

Verifica-se, também, que a membrana menos tracionada exibe uma resposta altamente não linear e que essa não linearidade diminui com o aumento do coeficiente de tração radial e a resposta fica praticamente linear para um raio tracionado igual a duas vezes o raio indeformado. Todas as freqüências descrevem o mesmo comportamento não-linear observados para $m = 1$ e $n = 0$.

Calculando o limite da equação de movimento não-linear na direção transversal, (3.42), com $\delta \rightarrow \infty$, obtém-se a equação de movimento linear (4.10). Assim, a freqüência natural e a relação freqüência-amplitude convergem para o mesmo valor de ω quando δ aumenta. Este valor é dado pela equação (4.14). Ou seja, o valor da freqüência de vibração não linear da membrana circular permanece dentro de uma faixa de valores entre a freqüência natural linear e a freqüência com $\delta \rightarrow \infty$ e, tem-se que a relação entre essas freqüências depende de δ e pode ser dada por:

$$\frac{\omega_{mn}(\delta \rightarrow \infty)}{\omega_{mn}} = \sqrt{\left(\frac{\delta^6}{\delta^6 - 1} \right)} \quad (4.18)$$

Essa dependência da frequência quando $\delta \rightarrow \infty$, normalizada pela frequência natural linear, em relação à δ pode ser melhor observada através da Figura 4.9 onde se verifica que a relação entre as frequências tende para o valor unitário com o aumento do coeficiente de tração radial.

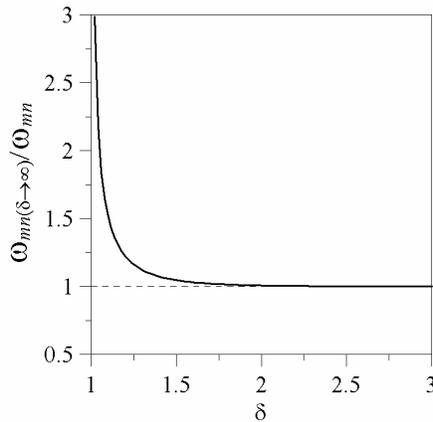


Figura 4.9 - Relação frequência de vibração normalizada–coeficiente de tração radial, δ .

Para a análise numérica por elementos finitos é utilizado um modelo com uma malha com 576 elementos de casca S4R e S3 que gera um sistema com 1731 equações. O modelo utilizado na análise não linear possui uma discretização menos refinada que na análise linear devido à dificuldade e ao tempo de processamento deste tipo de análise, já que ela é uma análise que consome muito mais tempo e memória que a linear. O elemento de casca é utilizado nesta análise, também, devido ao menor tempo de processamento gasto quando comparado ao elemento de membrana, sendo que ambos os modelos produzem os mesmos resultados neste tipo de análise. Ressalta-se que para essa análise não linear por elementos finitos o tempo gasto para obter as respostas apresentadas em cada gráfico é de aproximadamente de dois a três dias, enquanto que para a mesma resposta obtida de forma analítica gastam-se aproximadamente 10 minutos.

Para o cálculo da vibração livre por elementos finitos, excitou-se o primeiro modo de vibração da membrana circular ($n = 0$ e $m = 1$) impondo-se um campo de deslocamentos inicial igual à solução analítica e obteve-se, para uma dada amplitude inicial, a resposta no tempo para um sistema levemente amortecido, como ilustrado na Figura 4.10.

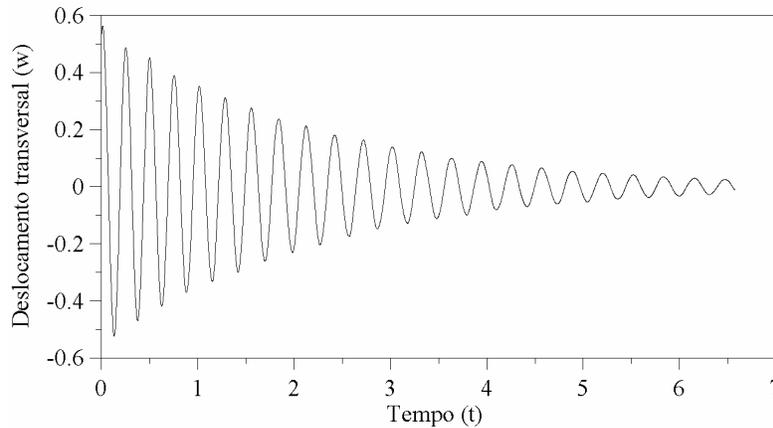


Figura 4.10 - Resposta no tempo da vibração livre da membrana circular ($\delta = 1.10$).

A partir desta resposta no tempo, obtida por elementos finitos, e utilizando a metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee (2005), pode-se obter a relação frequência de vibração-deslocamento transversal para um ponto qualquer da membrana. Para isso considera-se o deslocamento de dois picos positivos e sucessivos nos tempos t_1 e t_2 e calcula-se sua média w_1 . Posteriormente, toma-se o deslocamento negativo w_2 do pico entre t_1 e t_2 . Então, se define a amplitude do deslocamento transversal como:

$$w = \frac{(w_1 + |w_2|)}{2} \quad (4.19)$$

O período e a frequência de vibração são calculados através da seguinte equação:

$$T_i = t_2 - t_1 \quad (4.20)$$

$$\omega = \frac{1}{T_i} \quad (4.21)$$

Com os valores dos deslocamentos transversais e das frequências de vibração, obtém-se a relação frequência - deslocamento. Assim, os resultados obtidos por elementos finitos são comparados com os resultados obtidos analiticamente, utilizando-se os modelos de pequena dimensão para um ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada. Esses resultados são apresentados na Figura 4.11 para três valores de δ .

Observa-se na Figura 4.11 que a solução obtida por elementos finitos é mais precisa para as membranas sob os menores níveis de tração. Isso ocorre devido ao tamanho do passo de tempo utilizado na análise por elementos finitos, já que a

freqüência é obtida através do inverso do período de tempo (T_i), como apresentado na equação (4.21).

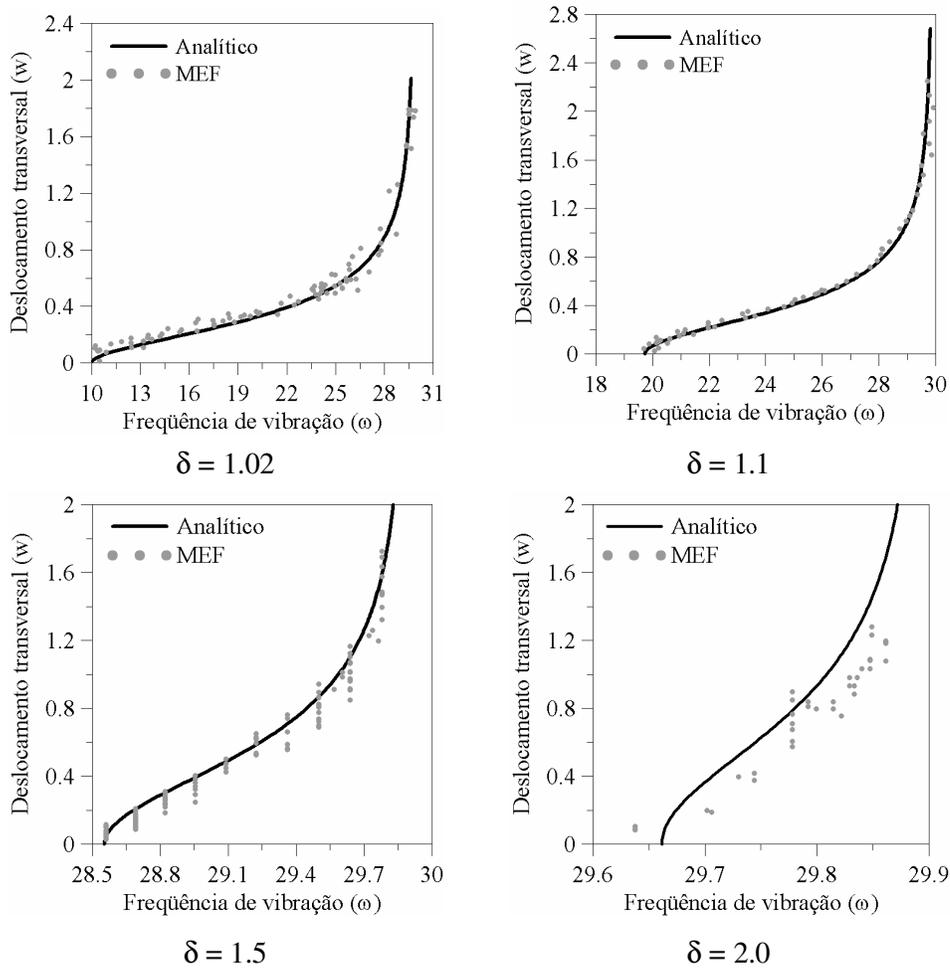


Figura 4.11 - Relação freqüência de vibração(rad/s)-deslocamento transversal (m) da membrana circular.

Nas membranas menos tracionadas a variação da freqüência é maior para um mesmo intervalo de deslocamento, como pode ser melhor observado na Figura 4.12 que ilustra a relação freqüência de vibração-deslocamento transversal para diferentes valores do coeficiente de tração radial, δ . Assim, quanto mais tracionada a membrana menor o passo de tempo necessário para se obter com precisão os valores das freqüências e, portanto, maior esforço computacional é exigido.

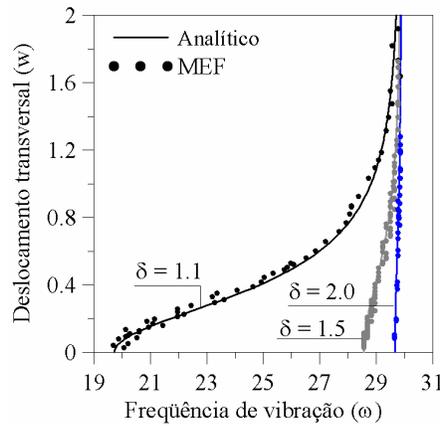


Figura 4.12 - Relação frequência de vibração (rad/s)-deslocamento transversal (m) da membrana circular com diferentes valores de δ .

Na Figura 4.13 apresenta-se o deslocamento transversal da membrana circular em vibração livre em um tempo t obtido através de elementos finitos. Compara-se esse resultado com o obtido pela equação (4.17) utilizando apenas o primeiro modo axissimétrico e a mesma amplitude da resposta numérica. Observa-se que a equação (4.17) é uma resposta com boa precisão para a vibração livre da membrana circular.

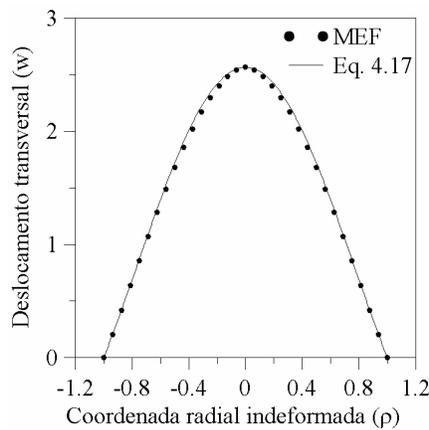
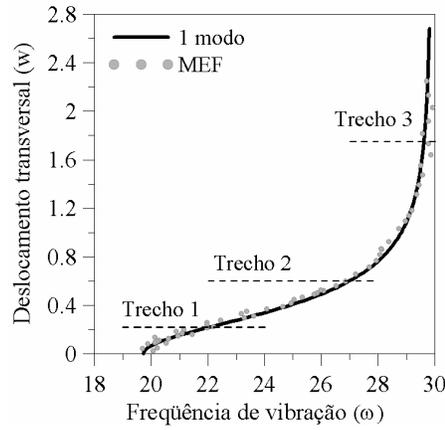
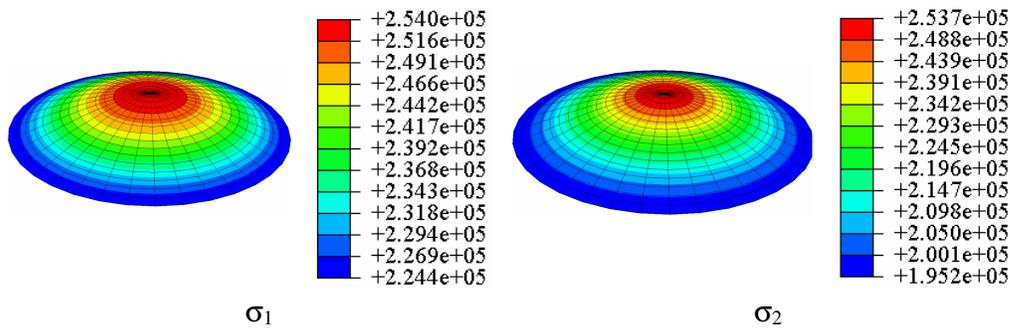


Figura 4.13 - Deslocamento transversal (m) da membrana circular em vibração livre, em um tempo t ($\delta = 1.1$).

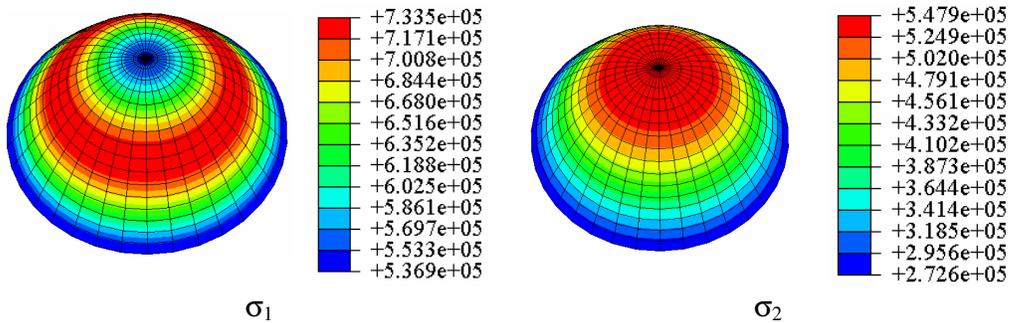
Em virtude da grande variação de frequência não-linear no intervalo em estudo escolheram-se três trechos distintos da curva para determinar a variação das tensões principais (σ_1 e σ_2) da membrana. Na Figura 4.14 mostra-se os três trechos escolhidos na curva frequência-deslocamento e a variação das tensões.



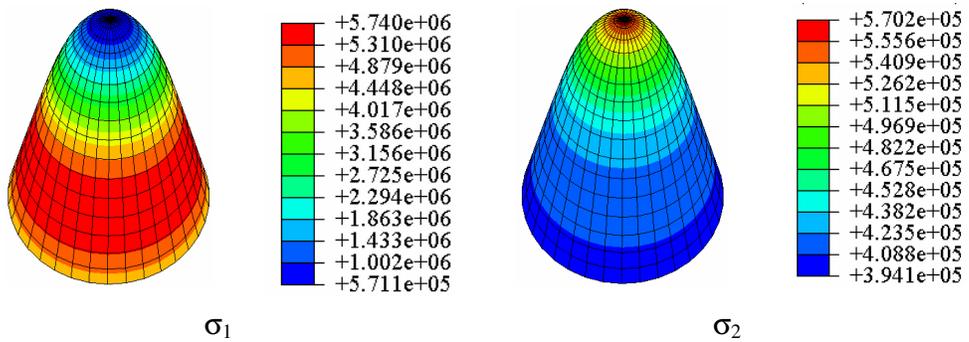
(a) Trechos da curva frequência-deslocamento



(b) Trecho 1



(c) Trecho 2



(d) Trecho 3

Figura 4.14 – Variação das tensões principais (N/m^2) da membrana em vibração livre ($\delta = 1.1$).

A parcela da extensão principal relativa a análise dinâmica, ou seja, o acréscimo de extensão devido a vibração da membrana é avaliado nos mesmos trechos apresentados na Figura 4.14-a. Assim, a variação desse acréscimo das extensões principais (λ_1 e λ_2) ao longo da direção radial da membrana são mostradas na Figura 4.15.

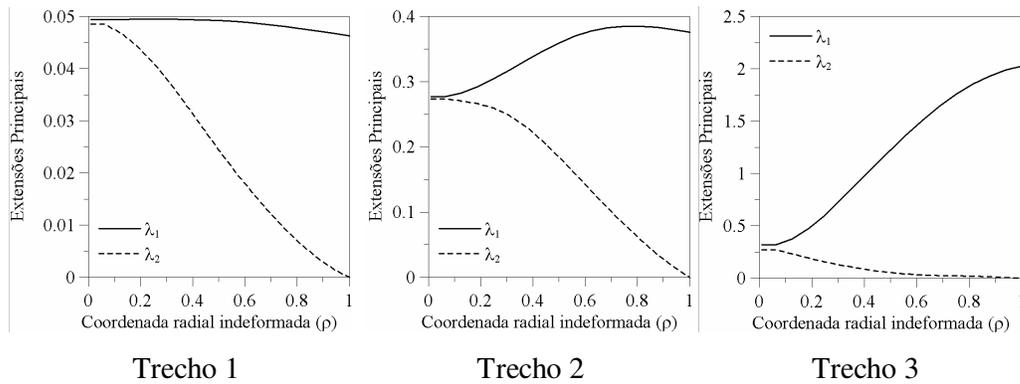


Figura 4.15 – Variação das extensões principais da membrana em vibração livre ($\delta = 1.1$). (λ_1 : Direção radial; λ_2 : Direção circunferencial)

Para uma membrana apoiada em sua extremidade externa, livre de carregamentos de tração radial e, submetida apenas ao peso próprio tem-se a variação das tensões principais e dos deslocamentos transversais ao longo do raio indeformado da membrana apresentada na Figura 4.16. Ressalta-se que quando se traciona radialmente a membrana, diminui-se o deslocamento transversal e a não linearidade da solução em virtude do peso próprio. Assim, o efeito do peso próprio será desconsiderado na análise dinâmica.

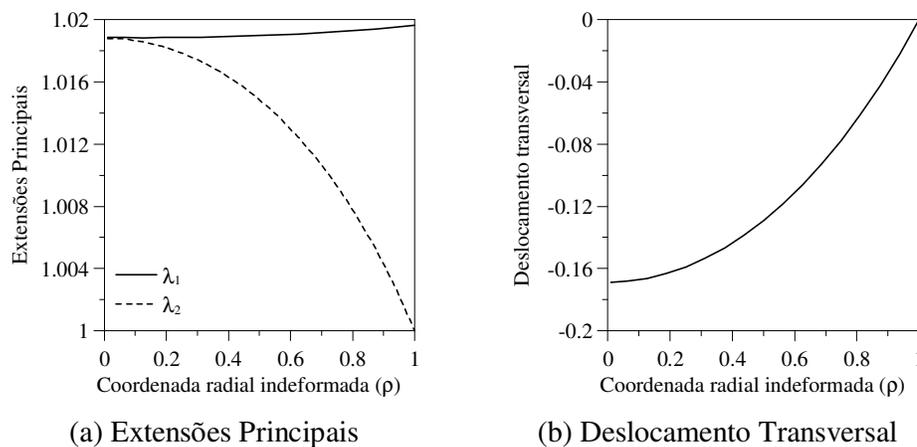


Figura 4.16 – Variação das extensões principais e deslocamentos transversais (m) ao longo do raio da membrana livre de tensões iniciais.

A variação da frequência no intervalo de interesse pode ser melhor comparada através dos resultados apresentados na Figura 4.17, onde mostra-se a relação normalizada frequência-deslocamento da membrana. A frequência de vibração foi normalizada com relação à frequência natural de cada caso. Observa-se através da Figura 4.17 que, quanto mais tracionada a membrana menor o grau de não-linearidade da resposta.

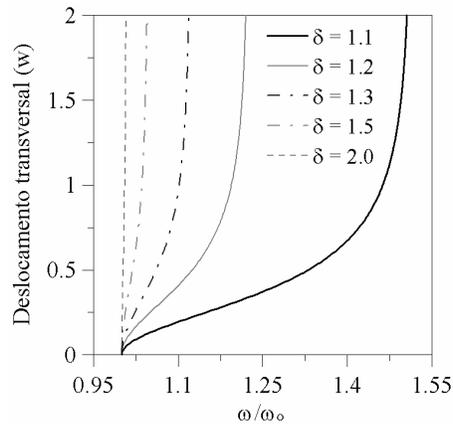


Figura 4.17 - Relação normalizada frequência-deslocamento transversal (w) da membrana circular.

4.4.

Redução do problema pelo método de Karhunen-Loève

A expansão do deslocamento transversal (4.17) utilizada consegue descrever corretamente o comportamento *hardening* da membrana com um número pequeno de modos. Entretanto, é necessário identificar a importância de cada modo na energia total do sistema e a participação de cada modo da expansão modal (4.17) nos modos não-lineares de vibração.

O método de Karhunen-Loève, também conhecido como decomposição ortogonal completa (POD, em inglês, *proper orthogonal decomposition*), é uma maneira de quantificar a participação desses modos na energia total do sistema. O método consiste na análise de uma série de dados da resposta do sistema obtida da solução de um modelo matemático preciso ou de um resultado experimental (Gonçalves, 2008). Nesta tese, os dados são obtidos a partir das respostas no tempo encontradas através do método dos elementos finitos.

A formulação matemática do método de Karhunen-Loève está apresentada, detalhadamente, nos trabalhos de Wolter (2001), Ritto (2005), Bellizi e Sampaio (2006) e Gonçalves (2008). Neste trabalho, utiliza-se o método direto de Karhunen-Loève que é apresentado de forma concisa a seguir.

Considere um campo vetorial real que descreve os deslocamentos transversais da membrana, $\bar{\mathbf{w}}(\rho, \theta, t)$. Este campo vetorial é decomposto em duas partes: uma média invariante no tempo $E[\bar{\mathbf{w}}(\rho, \theta, t)]$ e

$$\bar{\mathbf{v}}(\rho, \theta, t) = \bar{\mathbf{w}}(\rho, \theta, t) - E[\bar{\mathbf{w}}(\rho, \theta, t)] \quad (4.22)$$

que é a variação temporal com relação à média.

Para a aplicação do método, parte-se de um campo de deslocamentos discretos em certo instante. Para obter um vetor representativo do campo de deslocamentos da membrana ($\bar{\mathbf{w}}(\rho, \theta, t)$), utiliza-se o campo de deslocamentos discretos obtidos através da resposta por elementos finitos, apenas na direção radial da membrana já que o problema é axissimétrico. Ou seja, os deslocamentos são avaliados em N pontos distribuídos uniformemente ao longo de ρ .

Assim, para cada instante de tempo é obtido um vetor com N elementos, $\bar{w}_1(t), \bar{w}_2(t), \dots, \bar{w}_N(t)$. Tomando-se M intervalos de tempos igualmente espaçados $t_M = M \bar{\tau} (t_1, t_2, \dots, t_M)$, onde $\bar{\tau}$ é um período de amostragem, obtém-se a seguinte matriz de amostragem de dimensão $M \times N$:

$$\bar{\mathbf{w}} = [\bar{\mathbf{w}}_1 \ \bar{\mathbf{w}}_2 \ \dots \ \bar{\mathbf{w}}_N] = \begin{bmatrix} \bar{w}_1(t_1) & \bar{w}_2(t_1) & \dots & \bar{w}_N(t_1) \\ \bar{w}_1(t_2) & \bar{w}_2(t_2) & \dots & \bar{w}_N(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{w}_1(t_M) & \bar{w}_2(t_M) & \dots & \bar{w}_N(t_M) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

onde cada coluna representa a variação temporal do deslocamento em um determinado ponto do raio da membrana e cada linha representa o campo de deslocamentos da casca em um certo instante de tempo t_M .

Usando as hipóteses de ergodicidade (Bellizi e Sampaio, 2006), o valor médio do campo vetorial é obtido somando-se a variação temporal de cada ponto amostrado e dividindo o resultado pelo número de linhas da matriz de amostragem. A variação do campo vetorial com relação ao valor médio é dada por:

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{w}} - \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M \bar{w}_1(t_i) & \sum_{i=1}^M \bar{w}_2(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^M \bar{w}_N(t_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^M \bar{w}_1(t_i) & \sum_{i=1}^M \bar{w}_2(t_i) & \cdots & \sum_{i=1}^M \bar{w}_N(t_i) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Finalmente, como no método de Karhunen-Loève a variação temporal com relação à média $\bar{\mathbf{v}}$ é uma variável ergódica, a matriz de correlação espacial pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{v}} \quad (4.25)$$

onde $\bar{\mathbf{R}}$ é uma matriz simétrica e positiva definida.

Os autovetores de (4.25) que são ortogonais devido a matriz $\bar{\mathbf{R}}$ ser simétrica, são os modos ortogonais próprios ou POMs (do inglês, *proper orthogonal modes*) e os autovalores associados são os valores ortogonais próprios ou POVs (do inglês, *proper orthogonal values*) e fornecem a medida da energia média contida em cada modo, ou seja, cada autovalor λ_k pode ser interpretado como a medida da energia média do sistema projetada no eixo ϕ_k do espaço funcional.

O conceito de energia vem do fato de nas primeiras aplicações em turbulência, o campo $\bar{\mathbf{v}}$ representar a velocidade de escoamento do fluido e, portanto, neste caso, cada autovalor representa o dobro da energia cinética média contida no respectivo modo. A energia média do campo é igual à soma de todos os autovalores.

Assim, observando as relações frequência – deslocamento transversal associadas ao primeiro modo axissimétrico ($n = 0$ e $m = 1$), obtidas analiticamente (expansões 1, 2 e 3) e por elementos finitos, em virtude da grande variação de frequência não-linear no intervalo em estudo escolheram-se três trechos distintos da curva para determinar a série de dados. O primeiro trecho é escolhido onde a membrana vibra em baixa amplitude, o segundo trecho próximo à mudança de direção da curva frequência-deslocamento e o terceiro trecho onde a curva tende a um valor constante com grande amplitude de vibração.

Na Figura 4.18 são mostrados os três trechos escolhidos na curva frequência-deslocamento transversal para a determinação da série de dados

necessária para a decomposição de Karhunen-Loève. Neste estudo utilizam-se as respostas das membranas inicialmente tracionadas com $\delta = 1.1$.

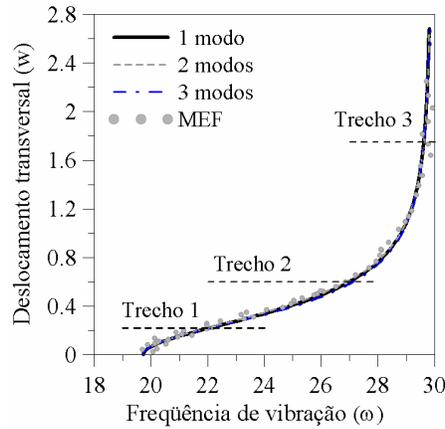


Figura 4.18 – Trechos da curva frequência-deslocamento transversal da membrana circular em vibração livre para decomposição de Karhunen-Loève ($\delta = 1.1$).

Os quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs, para o problema de vibração livre para a membrana circular são apresentados na Figura 4.19. Eles representam mais de 99,99% da energia total do sistema.

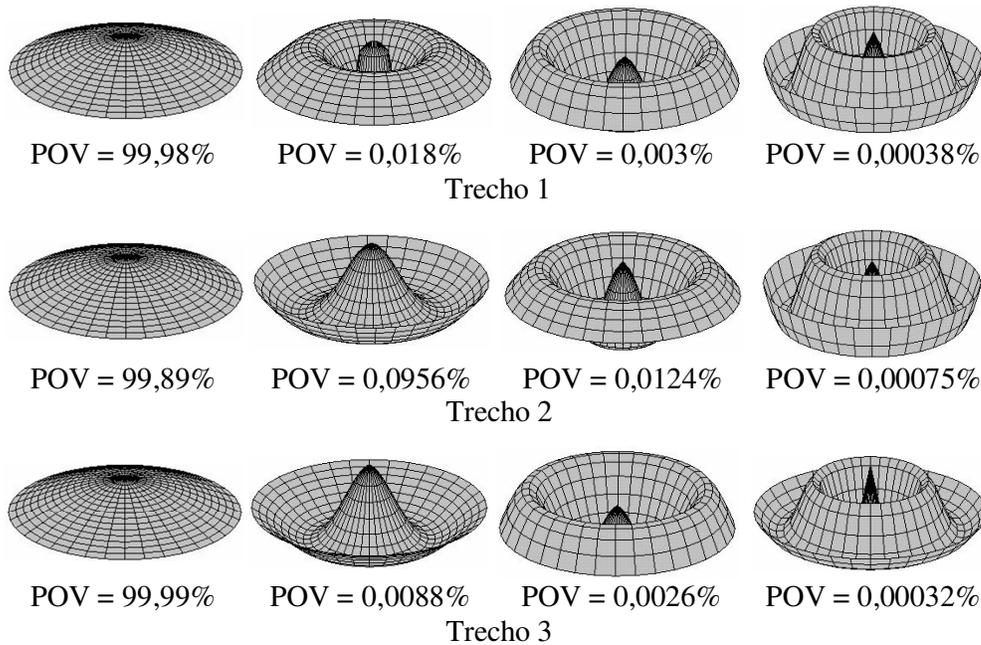


Figura 4.19 - Quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs para a vibração livre não linear da membrana circular.

De fato, a maior parte da energia nos três trechos, está concentrada no primeiro modo (POV > 99,89%). A partir destes resultados, pode-se derivar um modelo reduzido para a análise não linear da membrana e identificar a importância relativa de cada modo da expansão (4.17).

Para quantificar essa importância relativa de cada modo em (4.17) em cada POM, cada POM é expandido em séries usando os modos presentes em (4.17).

A Tabela 4.4 apresenta os coeficientes modais para cada POM ilustrado na Figura 4.19. A principal contribuição para o primeiro POM, que é responsável por mais de 96,89 % da energia total, é basicamente o primeiro modo axissimétrico A_{10} .

Tabela 4.4 - Participação dos modos usados na expansão modal dos quatro primeiros POMs na resposta não linear da membrana circular.

Trecho 1					
POM	POV	A_{10}	A_{20}	A_{30}	A_{40}
1	99,98%	0.35194	-0.00484	-0.00199	-0.00016
2	0,018%	0.26697	-0.48810	-0.13656	-0.01095
3	0,003%	0.01415	-0.52705	0.67960	0.05451
4	0,00038%	-0.03153	-0.02727	-0.59101	-0.04746
Trecho 2					
POM	POV	A_{10}	A_{20}	A_{30}	A_{40}
1	99,89%	0.35036	-0.00309	0.00040	0.00003
2	0,0956%	0.27064	-0.51417	-0.06642	-0.00532
3	0,0124%	-0.00547	-0.49283	0.48598	0.03898
4	0,00075%	-0.01689	0.08442	-0.76640	-0.06147
Trecho 3					
POM	POV	A_{10}	A_{20}	A_{30}	A_{40}
1	99,99%	0.34949	-0.00027	-0.00191	-0.00015
2	0,0088%	0.26665	-0.40981	-0.21234	-0.01703
3	0,0026%	0.05019	-0.59065	0.64393	0.05165
4	0,00032%	-0.02825	-0.04675	-0.56674	-0.04546

Na Figura 4.20 é apresentada a deformada da membrana dada pelo primeiro POM ilustrados na Figura 4.19. Observa-se que há uma boa concordância entre a deformada obtida usando a expansão modal (4.17) com um modo ($M = 1$) e usando o primeiro POM da expansão de Karhunen-Loève. Com este estudo, comprova-se matematicamente que um modelo simples com um grau de liberdade

é capaz de descrever o comportamento não-linear da membrana incluindo grandes deformações.

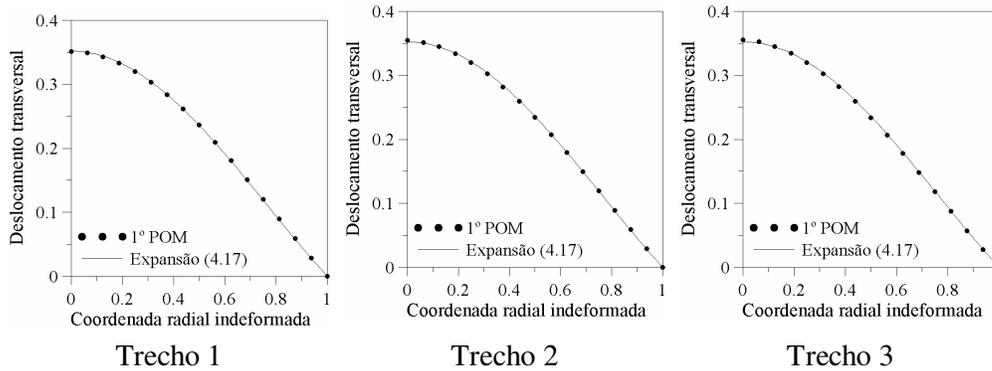


Figura 4.20 – Comparação da deformada obtida a partir da expansão (4.17) com o primeiro POM da expansão de Karhunen-Loève.

4.4.1.

Membrana submetida a um deslocamento inicial qualquer

Neste item utiliza-se o método de Karhunen-Loève para identificar a participação de cada modo da expansão modal (4.17) nos modos não-lineares de vibração da membrana submetida a um deslocamento inicial qualquer.

Para isso a resposta não-linear da vibração livre da membrana é obtida utilizando o método dos elementos finitos. Para o cálculo da vibração livre por elementos finitos, impôs-se um campo de deslocamentos inicial não simétrico, apresentado na Figura 4.21, e obteve-se, para uma dada amplitude inicial, a resposta no tempo para um sistema levemente amortecido, determinando a série de dados necessária para a decomposição de Karhunen-Loève. Neste estudo utilizam-se as respostas das membranas inicialmente tracionadas com $\delta = 1.1$.

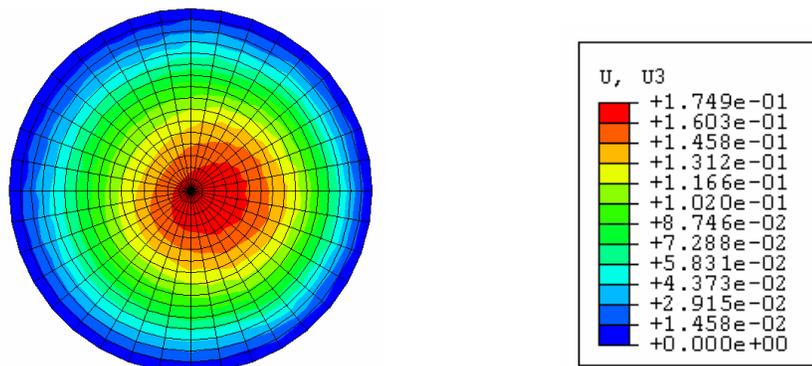


Figura 4.21 – Campo de deslocamento transversal inicial qualquer da membrana.

Os quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs, para esse problema de vibração livre são apresentados na Figura 4.22. Eles representam mais de 99,96% da energia total do sistema.

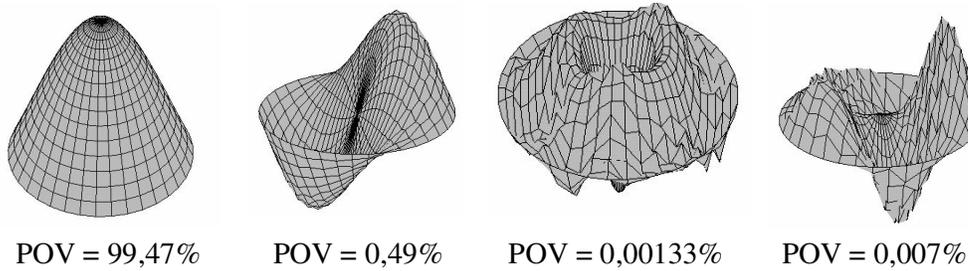


Figura 4.22 - Quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs para a vibração livre não linear da membrana circular sob um campo de deslocamento inicial qualquer.

Apresentam-se na Tabela 4.5 os coeficientes modais para cada POM ilustrado na Figura 4.22. A principal contribuição para o primeiro POM, que é responsável por mais de 99,47 % da energia total, é basicamente o primeiro modo axissimétrico A_{10} . Já a principal contribuição para o segundo POM é basicamente o segundo modo de vibração A_{11} .

Tabela 4.5 - Participação dos modos usados na expansão modal dos quatro primeiros POMs na resposta não linear da membrana circular.

POM	POV	A_{10}	A_{20}	A_{30}	A_{40}
1	99,47%	-0.0624	0.000307	0.000493	0.000039
2	0,49%	-0.0916	0.05092	0.012566	0.001008
3	0,0013%	0.02183	-0.02546	-0.06621	-0.00531
4	0,007%	0.03609	-0.041137	0.005359	0.000429

4.5. Análise não linear da vibração forçada

Na análise das vibrações forçadas considera-se a vibração transversal axissimétrica provocada por uma pressão excitadora uniforme dependente do tempo $P(t)$. O trabalho realizado pela pressão, apresentado em (3.15), depende do volume da membrana na configuração deformada, dado por:

$$v_d = \int_0^z \pi r^2 dz = \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^z r dz dr d\theta \quad (4.26)$$

Como ρ e θ são as variáveis independentes, os limites de integração são modificados (Tielking e Feng 1974) e o trabalho realizado por $P(t)$ pode ser escrito como:

$$v_d = \int_{\rho_o}^{R_o} \int_0^{2\pi} r r_{,\rho} z d\theta d\rho \quad (4.27)$$

Da mesma forma que na vibração livre não linear, os campos de deslocamentos radial u e circunferencial v são desprezíveis em relação ao campo de deslocamento transversal w . Assim, a equação de movimento não linear da membrana circular sob vibração forçada axissimétrica transversal é dada por:

$$-\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial W}{\partial z, \rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\rho \frac{\partial W}{\partial z, \theta} \right) + \rho \Gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \zeta C_c \frac{\partial w}{\partial t} - P(t) r_o \frac{dr_o}{d\rho} = 0 \quad (4.28)$$

onde a pressão excitadora uniforme dependente do tempo é dada por:

$$P(t) = P_o \cos(\Omega t) \quad (4.29)$$

sendo P_o é a magnitude da excitação e Ω é a frequência de excitação.

A vibração axissimétrica transversal é associada ao primeiro modo axissimétrico ($n = 0$ e $m = 1$) e utiliza-se o deslocamento transversal (4.17) aproximado com $N = 0$ e aumentando o número de modos radiais ($M = 1, 2$ e 3). O método de Galerkin é utilizado para se obter as equações diferenciais ordinárias não lineares no domínio do tempo.

Para obtenção dos resultados numéricos da membrana sem amortecimento, consideram-se a força com amplitude de excitação $P_o = 1 \text{ N/m}^2$. A variação das amplitudes modais A_{i0} com a frequência de vibração é apresentada na Figura 4.23.

Novamente, os resultados mostram que as amplitudes dos modos A_{20} e A_{30} são muito pequenas quando comparadas com A_{10} .

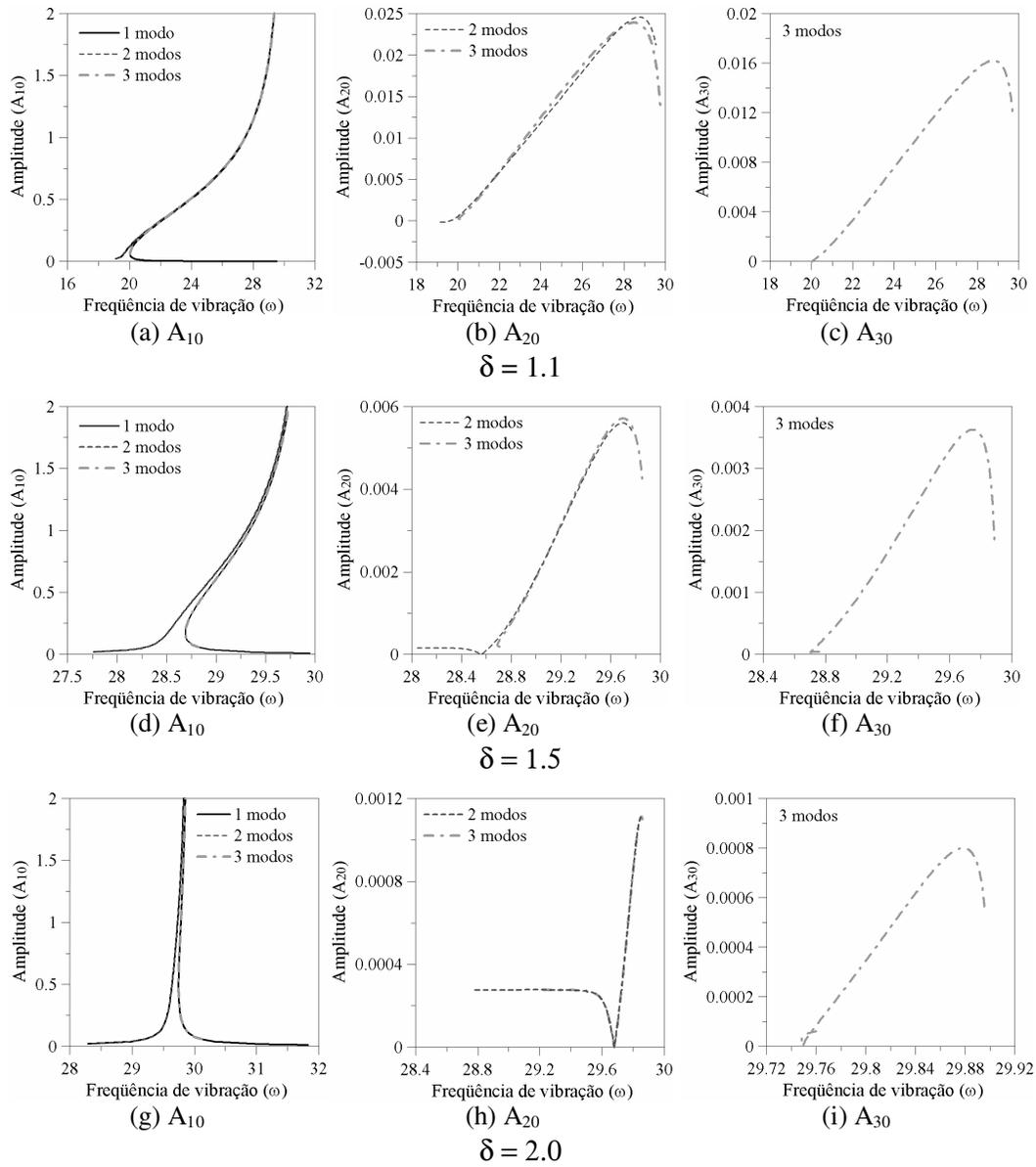


Figura 4.23 – Curva de ressonância não linear da membrana circular.

Na Figura 4.24 apresenta-se a curva de ressonância com diferentes valores de δ . Observa-se que as curvas tendem a um mesmo valor constante para grandes amplitudes de vibração

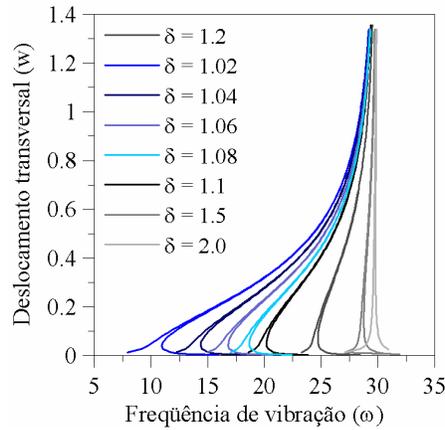


Figura 4.24 – Relação freqüência (rad/s)-deslocamento (m) transversal para a vibração forçada da membrana circular com diferentes δ .

A partir destas respostas e da obtida pelo método de Karhunen-Loève, verifica-se que um modelo reduzido com apenas um grau de liberdade (expansão 1, com $M = 1$) é suficiente para se obter respostas corretas sob grandes deslocamentos. Os demais resultados são calculados utilizando essa expansão com um modo axissimétrico.

Posteriormente obtém-se a curva de ressonância (freqüência-deslocamento transversal) para um ponto de coordenadas (0.5; 0) da membrana indeformada. O método dos elementos finitos também é usado para o cálculo de alguns pontos da curva de ressonância juntamente com a metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee (2005). Os resultados são apresentados na Figura 4.25. Neste caso despreza-se na resposta por elementos finitos a resposta inicial transiente e obtêm-se a amplitude e freqüência após a resposta atingir o regime permanente.

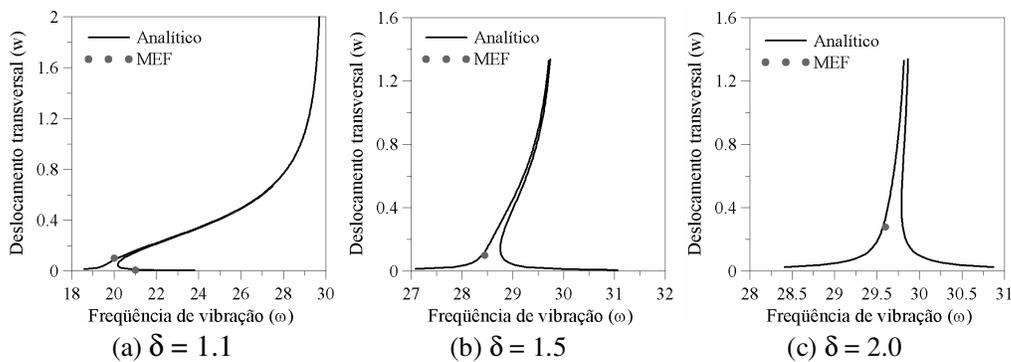


Figura 4.25 – Relação freqüência (rad/s)-deslocamento transversal (m) para a vibração forçada da membrana circular.

Na Figura 4.26 apresentam-se os deslocamentos laterais da membrana circular em vibração forçada em um tempo t obtidos através de elementos finitos. Compara-se esse resultado com o obtido pela equação (4.17) utilizando apenas o primeiro modo axissimétrico e a mesma amplitude da resposta numérica. Observa-se que a equação (4.17) também é uma resposta precisa para a vibração forçada da membrana.

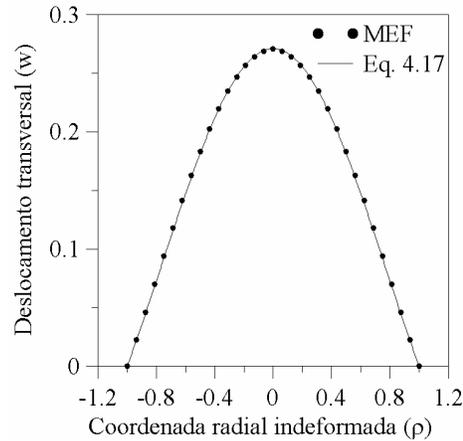


Figura 4.26 - Deslocamento transversal (m) da membrana circular em vibração forçada, em um tempo t ($\delta = 1.1$).

O método de continuação é utilizado para o cálculo dos diagramas de bifurcação do mapa de Poincaré (Nayfeh e Balachandran, 1995) da membrana circular tracionada. Na Figura 4.27 apresentam-se diagramas de bifurcação em função da amplitude da excitação para diferentes valores da frequência da excitação para a membrana com $\delta = 1.1$. As linhas contínuas representam posições de equilíbrio estáveis e as linhas tracejadas representam posições de equilíbrio instáveis.

Dependendo do valor de P_o e Ω , a membrana pode exibir uma ou três respostas. Por exemplo, para uma frequência de excitação $\Omega = 21$ rad/s, próxima à menor frequência natural, há duas soluções estáveis e uma instável para um dado valor de P_o . Os trechos estáveis e instáveis estão conectados por bifurcações do tipo nó-sela onde o multiplicador de Floquet atravessa o círculo unitário através de +1 (NS nas figuras). Para valores da frequência de excitação distantes da região de ressonância só é observada uma resposta (estável).

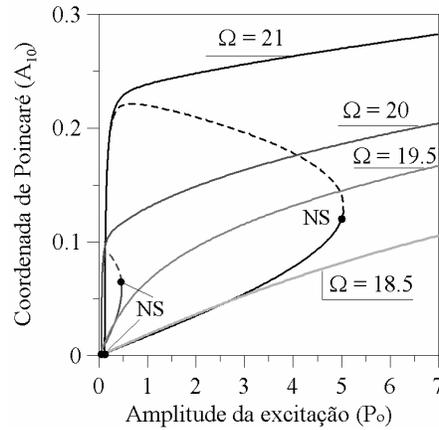


Figura 4.27 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da frequência de excitação (rad/s). Coordenada de Poincaré A_{10} (m) em função da amplitude da excitação P_o (N/m^2). ($\delta = 1.1$; $\zeta = 0.05$)

No diagrama de bifurcação apresentado na Figura 4.28 ilustra-se a coordenada de Poincaré A_{10} em função da frequência de excitação para três diferentes valores de δ e amplitude da excitação $P_o = 1 N/m^2$.

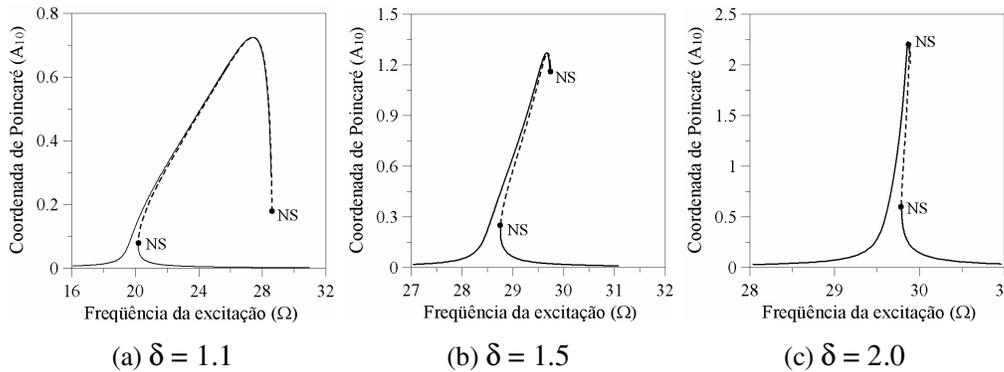


Figura 4.28 – Diagramas de bifurcação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da frequência de excitação Ω (rad/s) ($P_o = 1 N/m^2$; $\zeta = 0.05$).

Observa-se em cada caso da Figura 4.28 duas bifurcações nó-sela. Como era esperado, com o aumento do coeficiente de tração radial, a não-linearidade da resposta diminui, diminuindo a região da frequência onde as soluções instáveis existem.

Na Figura 4.29 apresentam-se os diagramas de bifurcação para valores crescentes de P_o para a membrana com $\delta = 1.1$.

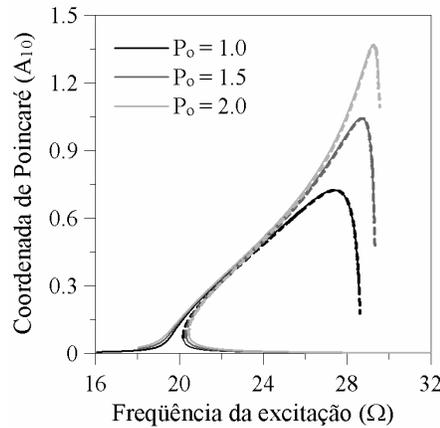


Figura 4.29 – Diagramas de bifurcação. Amplitude de vibração A_{10} (m) como função da frequência de excitação Ω (rad/s) ($\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$).

Na Figura 4.30 são mostrados os diagramas de bifurcação que têm como parâmetro de controle a magnitude da força, P_o , para valores crescentes do coeficiente δ . Em cada caso a frequência de excitação é escolhida na região principal de ressonância do sistema com ganho de rigidez, sempre à direita da frequência natural da membrana pré-tensionada. Esta é a região onde os efeitos não-lineares são mais importantes. Novamente observa-se a influência decrescente da não-linearidade com o aumento de relação δ .

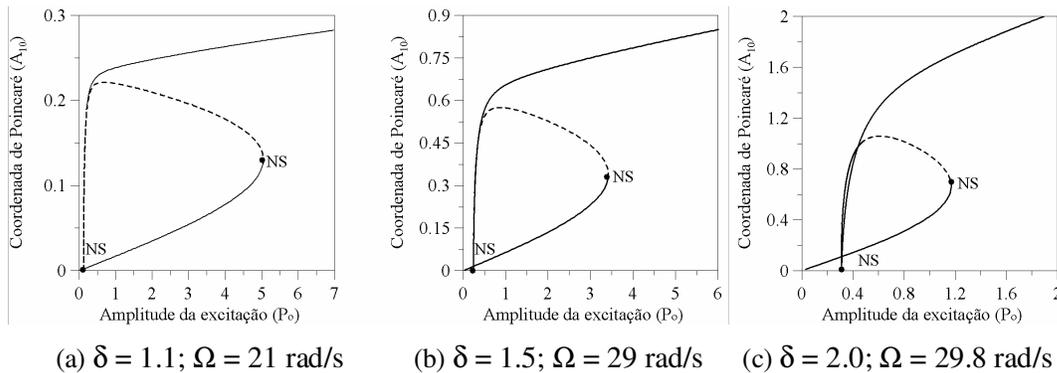
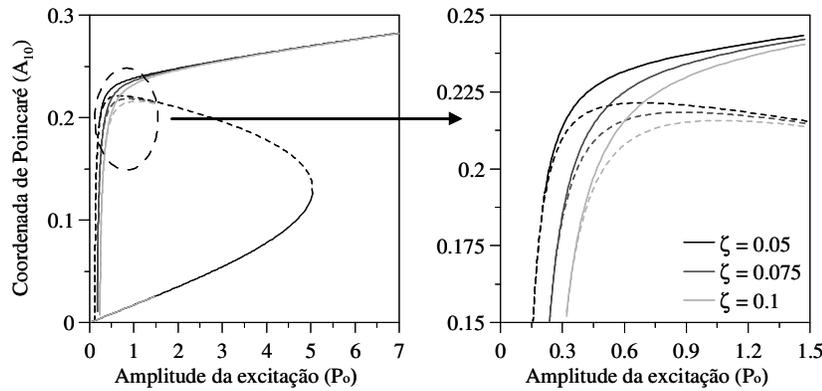
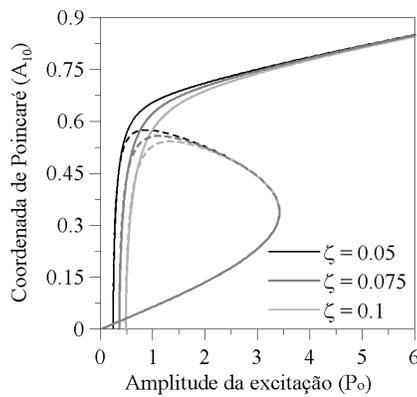


Figura 4.30 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2). ($\zeta = 0.05$)

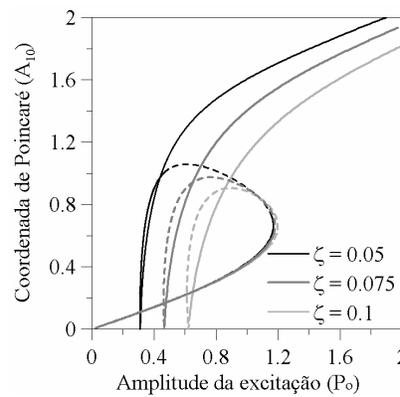
A influência do amortecimento é ilustrada na Figura 4.31 onde os diagramas de bifurcação são obtidos com diferentes valores de amortecimento.



$\delta = 1.1; \Omega = 21 \text{ rad/s}$



$\delta = 1.5; \Omega = 29 \text{ rad/s}$



$\delta = 2.0; \Omega = 29.8 \text{ rad/s}$

Figura 4.31 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_0 (N/m^2).

Observa-se que a membrana apresenta o mesmo tipo de comportamento para os diferentes valores de amortecimento.

A influência do amortecimento aumenta com o aumento do coeficiente de tração radial. Além disso, o amortecimento diminui a região onde a multiplicidade das soluções e os saltos entre as soluções estáveis co-existent podem ocorrer.

Finalmente, analisa-se o comportamento das bacias de atração das soluções na região principal de ressonância. A Figura 4.32 ilustra as bacias de atração para três conjuntos de parâmetros. Os parâmetros são escolhidos de tal modo que a resposta permaneça na região principal de ressonância onde ocorrem três soluções: uma solução de média amplitude instável, uma solução de pequena amplitude estável e uma solução de grande amplitude estável. A Figura 4.32 corresponde à bacia de atração no plano fase $A_{10} \times \dot{A}_{10}$ e as cores diferentes

correspondem aos atratores distintos realçados por uma cruz preta nas bacias de atração.

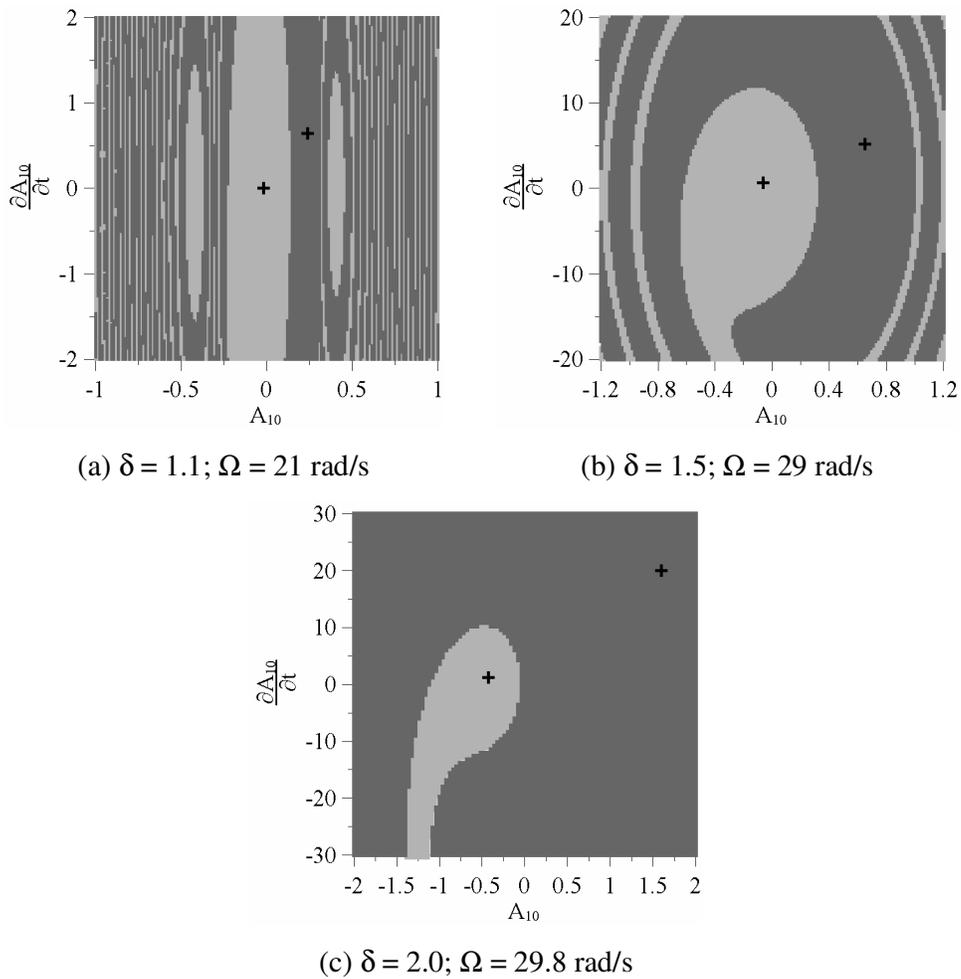


Figura 4.32 – Bacia de atração no plano fase das condições iniciais $A_{10} \times \dot{A}_{10}$ ($P_o = 1 \text{ N/m}^2; \zeta = 0.05$).

A cor cinza escuro corresponde à bacia de atração da oscilação de grande amplitude e a cor cinza claro corresponde à oscilação de pequena amplitude. Com o aumento do coeficiente de tração radial a complexidade da forma da bacia diminui com um número menor de faixas claras e escuras. Nota-se que na região principal de ressonância a maioria das condições iniciais conduz a soluções que convergem ao atrator de grande amplitude.

4.6.

Análise comparativa com diferentes modelos constitutivos

Um material com uma relação tensão – deformação conhecida de forma experimental pode ser descrito por diferentes modelos constitutivos. Neste item parte-se da relação tensão – deformação do material neo-Hookeano (Selvadurai, 2006) e calculam-se as constantes elásticas do material para os modelos de Arruda-Boyce, de Mooney-Rivlin, de Ogden e de Yeoh. Posteriormente, compara-se a solução da membrana em vibração livre utilizando os cinco modelos constitutivos diferentes. Em todos os casos o material é considerado isotrópico e incompressível.

A determinação das constantes é feita através dos resultados obtidos experimentalmente ou numericamente para a curva tensão-deformação. Estes resultados são introduzidos na análise numérica, realizada pelo método dos elementos finitos através do programa Abaqus®, onde se supõe que o comportamento do material pode ser descrito pelas diferentes teorias. Assim, é possível assumir a equação constitutiva que se ajuste de forma mais adequada aos resultados conhecidos.

Estas constantes são determinadas através do método dos mínimos quadrados que minimiza o erro relativo em tensões. Para n pares de valores de tensão-deformação o erro relativo a ser minimizado é dado por:

$$e = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{T_i^{th}}{T_i^{test}} \right)^2 \quad (4.30)$$

onde T_i^{test} são os valores de tensão obtidos experimentalmente e T_i^{th} são os valores de tensão obtidos através das relações constitutivas. Para materiais incompressíveis dados de ensaios uniaxiais são necessários e, para materiais compressíveis, testes de compressão volumétrica.

A membrana de material neo-Hookeano, anteriormente analisada, é utilizada como referência. Os valores das tensões e deformações obtidos para essa membrana neo-Hookeana são fornecidos na entrada de dados do programa Abaqus®.

Para a análise numérica utilizou-se uma malha de 576 elementos de membrana M3D3 e M3D4R, gerando assim um sistema com 1731 equações.

Os resultados obtidos para as constantes dos modelos de Arruda-Boyce, Mooney-Rivlin, Ogden e Yeoh, bem como as constantes do material neo-Hookeano utilizadas são apresentadas na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 - Constantes elásticas para o material da membrana.

neo-Hookeano	$C_1 = 170000 \text{ Pa}$		
Mooney-Rivlin	$C_1 = 169720.3 \text{ Pa}$	$C_2 = -18.7 \text{ Pa}$	
Yeoh	$C_1 = 163694.04 \text{ Pa}$	$C_2 = 209 \text{ Pa}$	$C_3 = -1.84 \text{ Pa}$
Arruda-Boyce	$\mu = 331373.66 \text{ Pa}$	$\lambda_m = 18$	
Ogden (N=3)	$\mu_1 = 1279517.5 \text{ Pa}$	$\alpha_1 = 1.47875$	
	$\mu_2 = -16902.5 \text{ Pa}$	$\alpha_2 = 1.90802$	
	$\mu_3 = -949448.8 \text{ Pa}$	$\alpha_3 = 1.07815$	

Na Figura 4.33 apresenta-se a curva tensão - deformação da membrana sob tração uniaxial obtida através do programa Abaqus® para o cálculo das constantes elásticas do material, usando-se os diferentes modelos constitutivos.

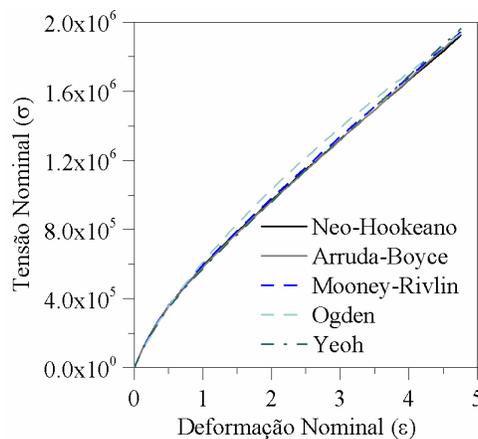


Figura 4.33 - Curva tensão (Pa)-deformação utilizada pelo MEF no cálculo das constantes elásticas.

Observa-se na Figura 4.33 que os resultados apresentam uma boa concordância para os cinco modelos constitutivos analisados, sendo o modelo de Ogden o que mais diverge da curva tensão-deformação padrão adotada.

Ilustra-se na Figura 4.34 a variação do deslocamento radial estático da membrana submetida a um esforço de tração axissimétrico radial que produz um raio final (R_f) igual ao dobro da membrana indeformada ($\delta = 2$). Observa-se consonância dos resultados para os cinco modelos constitutivos utilizados.

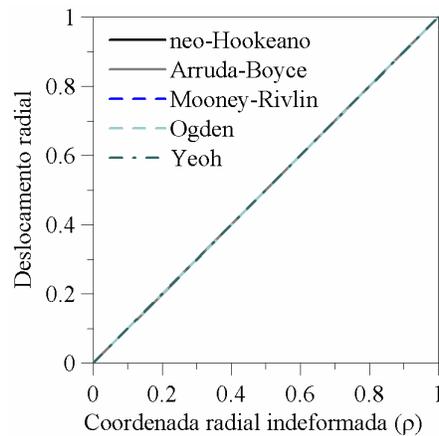


Figura 4.34 - Variação do deslocamento radial (m) da membrana sob esforços de tração radial utilizando os cinco modelos constitutivos.

Posteriormente, apresentam-se as frequências e os modos de vibração da membrana submetida a três diferentes níveis de tração na Tabela 4.7.

Observa-se que a menor frequência de vibração ocorre para uma combinação de ondas $m = 1$ e $n = 0$ e que a seqüência de modos (número de ondas) é a mesma em todos os casos. Além disso, pode-se observar que a variação dos valores das frequências fica entre 0.8% e 5%, sendo a maior variação para o modelo de Ogden.

Os modos de vibração possuem a mesma forma que os apresentados na Figura 4.5.

Tabela 4.7 – Frequências de vibração lineares (rad/s) para a membrana circular considerando diferentes modelos constitutivos e coeficiente de tração radial.

$\delta = 1.10$						
m	n	neo-Hookeano	Mooney-Rivlin	Yeoh	Arruda-Boyce	Ogden
1	0	19.771	19.754	19.404	19.538	18.699
1	1	31.412	31.384	30.827	31.040	29.708
1	2	41.817	41.780	41.040	41.323	39.550
$\delta = 1.50$						
m	n	neo-Hookeano	Mooney-Rivlin	Yeoh	Arruda-Boyce	Ogden
1	0	28.614	28.587	28.137	28.289	26.607
1	1	45.460	45.417	44.703	44.945	42.272
1	2	60.520	60.463	59.513	59.834	56.276
$\delta = 2.0$						
m	n	neo-Hookeano	Mooney-Rivlin	Yeoh	Arruda-Boyce	Ogden
1	0	29.724	29.693	29.343	29.418	28.278
1	1	47.224	47.175	46.619	46.738	44.926
1	2	62.869	62.803	62.063	62.221	59.809

Para o cálculo da vibração livre não linear da membrana excita-se o primeiro modo de vibração da membrana circular ($n = 0$ e $m = 1$), impondo-se um campo de deslocamentos inicial, e obtém-se, para uma dada amplitude inicial, a resposta no tempo para um sistema levemente amortecido. Na Figura 4.35 apresenta-se um exemplo desta resposta no tempo com os mesmos parâmetros iniciais para os cinco modelos de material.

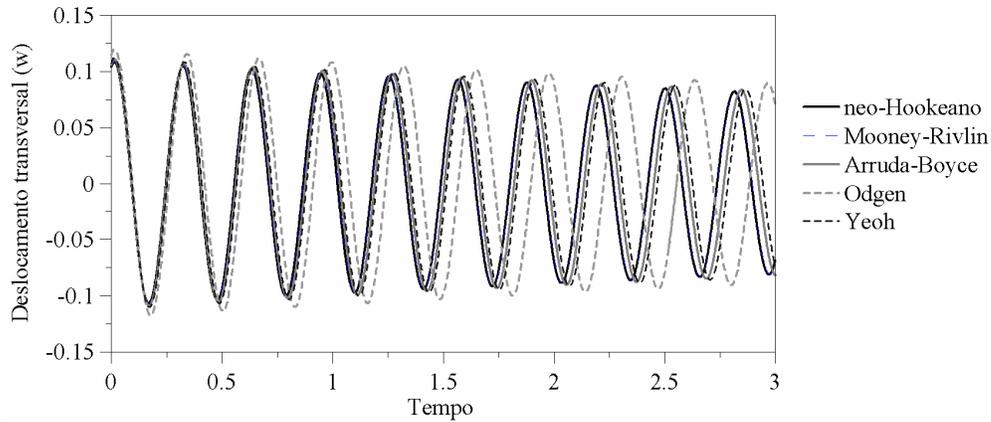


Figura 4.35 - Resposta no tempo para membrana circular utilizando os cinco modelos constitutivos.

Observa-se, através da Figura 4.35, que o deslocamento transversal da membrana é quase o mesmo utilizando os modelos constitutivos neo-Hookeano, de Mooney-Rivlin, de Arruda-Boyce e de Yeoh, principalmente no início da vibração. Porém, para o modelo de Odgen, ocorre uma divergência dos valores do deslocamento transversal, sendo que essa divergência aumenta com o tempo.

A partir desta resposta no tempo, obtida por elementos finitos, e utilizando a metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee (2005), pode-se obter a relação frequência de vibração-deslocamento transversal (w) para um ponto qualquer da membrana.

Assim, os resultados obtidos por elementos finitos utilizando os cinco diferentes modelos constitutivos são comparados, utilizando-se uma razão de tração $\delta = 1.1$. Esses resultados para um ponto de coordenadas $(0.5; 0)$ da membrana indeformada são apresentados na Figura 4.36, sendo sempre comparados com o resultado adotado como referência (modelo neo-Hookeano).

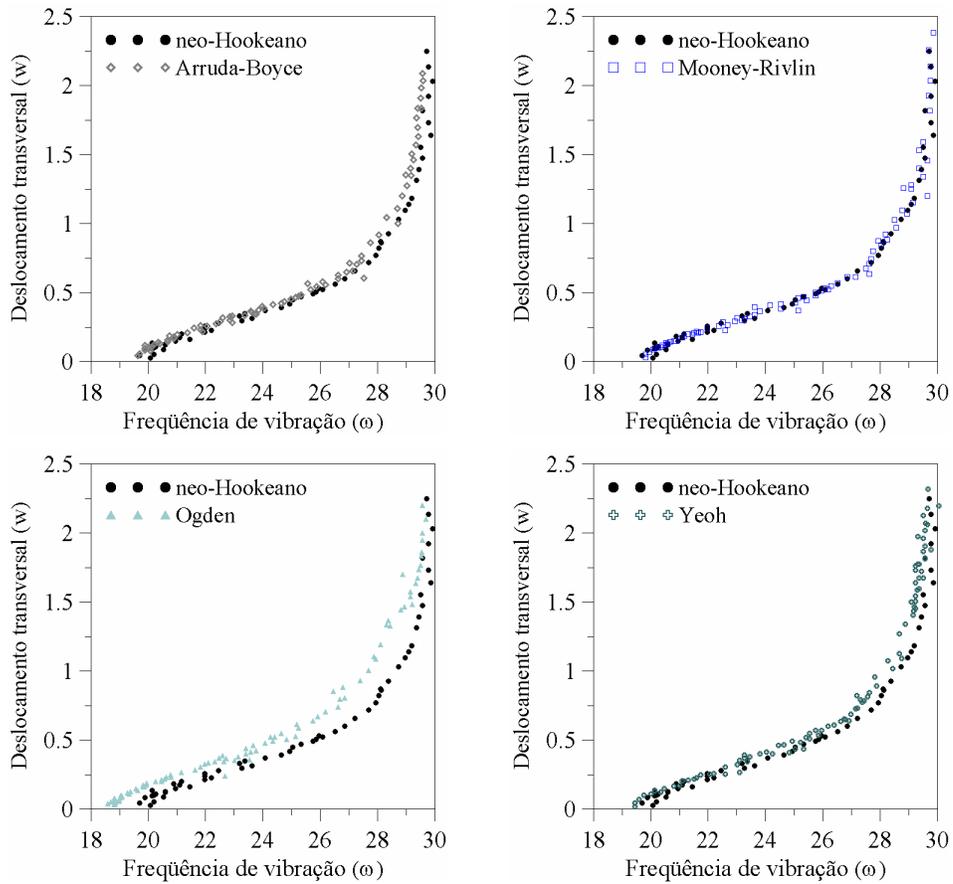


Figura 4.36 – Relação frequência de vibração (rad/s)-deslocamento transversal (w) da membrana circular considerando diferentes modelos constitutivos do material.

Observa-se o mesmo comportamento *hardening* em todos os exemplos e que, com o aumento da amplitude de vibração, esse efeito diminui e a curva tende a um valor constante para grandes amplitudes de vibração. Assim, pode-se afirmar que o comportamento dinâmico não-linear da membrana é o mesmo, independente do modelo constitutivo.