

3

Formulação da membrana hiperelástica

Neste capítulo é apresentada a modelagem matemática de membranas circulares e anulares previamente submetidas a esforços radiais de tração. Essa membrana é constituída de um material isotrópico e incompressível, o qual é modelado como um material neo-Hookeano.

Como o material da membrana considerada é altamente elástico, considera-se a teoria da elasticidade para grandes deformações, tendo por base a teoria de membranas apresentada por Green e Adkins (1960).

Assim, obtêm-se a equação de equilíbrio da membrana sob tração radial uniforme e as equações de movimento da membrana previamente tracionada.

3.1. Modelagem matemática

Uma modelagem matemática para um problema de membranas hiperelásticas de geometria circular ou anular, espessura constante ou variável é apresentada a seguir. Utiliza-se uma formulação variacional que permite reduzir a uma única expressão integral todos os elementos que influem no problema analisado. Através do princípio de Hamilton obtêm-se as equações gerais de movimento e as condições de contorno para o problema.

Assim, seja uma membrana anular e plana de espessura $h(\rho)$, raio externo indeformado R_o , raio interno indeformado ρ_o , e massa específica Γ . A membrana com bordo interno fixo é submetida a um deslocamento radial axissimétrico, alcançando um raio tracionado final R_f e, então, é fixada ao longo de seu bordo externo. Posteriormente à aplicação do deslocamento radial estático, perturba-se a membrana através de uma pressão dependente do tempo na direção transversal à superfície média.

Para a consideração da membrana de geometria circular completa considera-se o raio indeformado interno $\rho_o = 0$ e, inicialmente, considera-se a espessura

variável na direção radial $h(\rho)$ e, posteriormente, nas equações de equilíbrio e movimento, particulariza-se a espessura como constante.

As geometrias indeformada e deformada são apresentados na Figura 3.1.

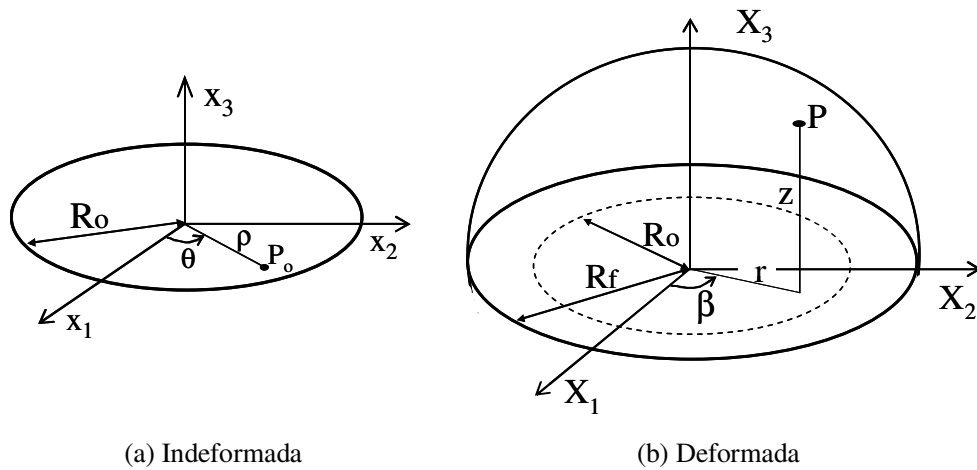


Figura 3.1 – Configurações da membrana indeformada e deformada na direção radial.

Dessa maneira, para a superfície média indeformada, apresentada na Figura 3.1 - a, tem-se:

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho \cos \theta \\x_2 &= \rho \operatorname{sen} \theta \\x_3 &= 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

onde ρ é a coordenada na direção radial da membrana indeformada, θ é a coordenada na direção circunferencial da membrana indeformada e x_3 é a coordenada na direção transversal à membrana indeformada.

Para a configuração deformada da superfície média após a tração e perturbação transversal apresentada na Figura 3.1 - b, tem-se:

$$\begin{aligned}X_1 &= r(\rho, \theta, t) \cos \beta(\rho, \theta, t) \\X_2 &= r(\rho, \theta, t) \operatorname{sen} \beta(\rho, \theta, t) \\X_3 &= z(\rho, \theta, t)\end{aligned}\quad (3.2)$$

onde r é a coordenada radial da membrana deformada; β é a coordenada circunferencial da membrana deformada; X_3 é a coordenada na direção transversal à membrana deformada e:

$$\begin{aligned}
 r(\rho, \theta, t) &= r_o(\rho, \theta) + u(\rho, \theta, t) \\
 \beta(\rho, \theta, t) &= \theta + \beta_o(\rho, \theta) + v(\rho, \theta, t) \\
 z(\rho, \theta, t) &= z_o(\rho, \theta) + w(\rho, \theta, t)
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

onde $u(\rho, \theta, t)$, $v(\rho, \theta, t)$ e $w(\rho, \theta, t)$ representam os deslocamentos dependentes do tempo nas direções radial, circunferencial e transversal respectivamente; $r_o(\rho, \theta)$, $\beta_o(\rho, \theta)$ e $z_o(\rho, \theta)$ representam as coordenadas de um ponto qualquer da membrana tracionada estaticamente nas direções radial, circunferencial e transversal respectivamente.

As extensões principais são definidas pela razão entre os comprimentos deformado e indeformado, dS e ds , respectivamente, nas direções principais. Ou seja:

$$\lambda_i = \frac{dS_i}{ds_i} \tag{3.4}$$

Assim, para a membrana submetida a esforços de tração, tem-se:

$$\lambda_1 = \sqrt{r_{,\rho}^2 + r^2 \beta_{,\rho}^2 + z_{,\rho}^2} \tag{3.5}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{r_{,\theta}^2 + r^2 \beta_{,\theta}^2 + z_{,\theta}^2} / \rho \tag{3.6}$$

onde $\frac{\partial(\)}{\partial \rho} = (\)_{,\rho}$ e $\frac{\partial(\)}{\partial \theta} = (\)_{,\theta}$.

A extensão normal à superfície média, λ_3 , é dada implicitamente em termos das duas extensões principais no plano pela suposição de incompressibilidade do material, ou seja, $I_3 = 1$. A partir da equação (2.17), tem-se:

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{a}{A}} \tag{3.7}$$

ou fisicamente:

$$\lambda_3 = \frac{H}{h} \tag{3.8}$$

onde H é a espessura da membrana deformada.

Considerando o sistema de coordenadas polares (ρ, θ) , os tensores métricos covariantes e contravariantes da membrana indeformada são definidos por:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$a^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

e da membrana deformada por:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} r_{,\rho}^2 + r^2 \beta_{,\rho}^2 + z_{,\rho}^2 & r_{,\rho} r_{,\theta} + r^2 \beta_{,\rho} \beta_{,\theta} + z_{,\rho} z_{,\theta} \\ r_{,\rho} r_{,\theta} + r^2 \beta_{,\rho} \beta_{,\theta} + z_{,\rho} z_{,\theta} & r_{,\theta}^2 + r^2 \beta_{,\theta}^2 + z_{,\theta}^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$A^{\alpha\beta} = (A_{\alpha\beta})^{-1} \quad (3.12)$$

O invariante de deformação I_1 é dado por:

$$I_1 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = r_{,\rho}^2 + r^2 \beta_{,\rho}^2 + z_{,\rho}^2 + \frac{r_{,\theta}^2 + r^2 \beta_{,\theta}^2 + z_{,\theta}^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{(r_{,\rho}^2 + r^2 \beta_{,\rho}^2 + z_{,\rho}^2)(r_{,\theta}^2 + r^2 \beta_{,\theta}^2 + z_{,\theta}^2) - (r_{,\rho} r_{,\theta} + r^2 \beta_{,\rho} \beta_{,\theta} + z_{,\rho} z_{,\theta})^2} \quad (3.13)$$

3.2.

Funcional de energia da membrana

A função de energia de deformação, W , para materiais hiperelásticos, pode ser descrita em função dos invariantes de deformação da superfície média da membrana, I_1 , I_2 e I_3 , obtendo-se a função $W(r, r_{,\rho}, r_{,\theta}, z_{,\rho}, z_{,\theta}, \beta_{,\rho}, \beta_{,\theta}, \rho, \theta)$.

A energia elástica de deformação, U , é a integral volumétrica da função W , na configuração indeformada, sendo para a membrana plana dada por:

$$U = \int_{\rho_0}^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^h W(\rho, r, r_{,\rho}, r_{,\theta}, z_{,\rho}, z_{,\theta}, \beta_{,\rho}, \beta_{,\theta}, \rho, \theta) \rho \, dz \, d\theta \, d\rho \quad (3.14)$$

O termo referente ao trabalho das forças externas, W_e , é realizado pela força uniformemente distribuída ao longo do bordo externo, f , que produz o deslocamento radial, pela pressão hidrostática excitadora uniformemente distribuída na superfície da membrana dependente do tempo, $P(t)$ e do peso próprio Γg , onde Γ é a massa específica da membrana e g é a aceleração da gravidade. Considera-se que o peso próprio da membrana age perpendicularmente à superfície média da membrana.

A pressão realiza trabalho sobre a variação do volume sofrido pela membrana (Tielking e Feng, 1974), ou seja:

$$P(t) \Delta v = P(t) (v_d - v_i) \quad (3.15)$$

onde v_i é o volume incluso da configuração indeformada (Figura 3.1- a), que é nulo, e v_d é o volume incluso da configuração deformada (Figura 3.1- b).

Assim, o trabalho das forças externas pode ser escrito como:

$$W_e = 2\pi \rho f(r_o - \rho) \Big|_{\rho=R_o} + P(t)\Delta v + \Gamma g z \quad (3.16)$$

A energia cinética, T , é dada por:

$$T = \int_{\rho_o}^{R_o} \int_0^{2\pi} \int_0^{h(\rho)} \Gamma \frac{(\dot{r}^2 + (r\dot{\beta})^2 + \dot{z}^2)}{2} \rho dz d\theta d\rho \quad (3.17)$$

onde $\dot{(\)} = \frac{\partial(\)}{\partial t}$.

A função que representa o amortecimento é dada por:

$$R_e = 2\omega_o \int_{\rho_o}^{R_o} \int_0^{2\pi} \int_0^{h(\rho)} \zeta \Gamma \frac{\dot{W}}{2} \rho dz d\theta d\rho \quad (3.18)$$

onde ζ é o coeficiente de amortecimento e ω_o é a frequência natural do sistema.

Definidos os funcionais de energia, equações (3.14) a (3.18), chega-se à seguinte função de Lagrange:

$$L = T + R_e - U + W_e \quad (3.19)$$

Partindo da função de Lagrange chega-se às equações diferenciais para cada caso particular analisado neste estudo.

3.3. Análise estática

Para a membrana anular plana submetida apenas a esforços de tração radial axissimétrico, tem-se:

$$\lambda_1 = \frac{dr_o}{d\rho} \quad (3.20)$$

$$\lambda_2 = \frac{r_o}{\rho} \quad (3.21)$$

$$\lambda_3 = \frac{\rho}{r_o r_{o,\rho}} \quad (3.22)$$

Neste caso os tensores métricos covariantes e contravariantes da membrana tracionada são dados por:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} r_{o,\rho}^2 & 0 \\ 0 & r_o^2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$A^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{o,\rho}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_o^2} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

e o primeiro invariante de deformação I_1 é definido por:

$$I_1 = r_{o,\rho}^2 + \frac{r_o^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{r_o^2 r_{o,\rho}^2} \quad (3.25)$$

Dessa forma, a função energia de deformação pode ser descrita como $W = W(r_o, r_{o,\rho}, \rho)$.

Para obter a equação de equilíbrio, parte-se da energia potencial total, definida como a diferença entre a energia de deformação elástica e o trabalho realizado pela força trativa externa, f . Aplicando-se o princípio da energia potencial total estacionária e utilizando-se integração por partes, obtém-se a equação de equilíbrio na direção radial:

$$h(\rho) \rho \frac{dW}{dr_o} - \left(h(\rho) + \rho \frac{dh(\rho)}{d\rho} \right) \frac{dW}{dr_{o,\rho}} - h(\rho) \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dW}{dr_{o,\rho}} \right) = 0 \quad (3.26)$$

e a condição de contorno:

$$2\pi h(\rho) \rho \frac{dW}{dr_{o,\rho}} \Big|_{\rho_o}^{R_o} = 2\pi f R_o \quad (3.27)$$

Neste caso as componentes de deslocamento estático circunferencial e transversal, β_o e z_o respectivamente, são nulos.

Além disso, a membrana anular também está submetida à seguinte condição de contorno:

$$r_o(\rho_o) = \rho_o \quad (3.28)$$

As tensões principais de uma membrana de material hiperelástico são dadas por:

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad (3.29)$$

Para a membrana circular as tensões principais podem ser escritas como:

$$\sigma_1 = \frac{2C_1(r_{o,\rho}^4 r_o^2 - \rho^2)}{r_{o,\rho}^2 r_o^2} \quad (3.30)$$

$$\sigma_2 = \frac{2C_1(r_{o,\rho}^2 r_o^4 - \rho^4)}{\rho^2 r_{o,\rho}^2 r_o^2} \quad (3.31)$$

As equações das tensões principais para a membrana anular com variação da espessura e com espessura constantes são escritas da mesma maneira, porém, a coordenada radial estática $r_o(\rho)$ é diferente em cada caso.

3.3.1.

Equação de equilíbrio para membrana de espessura variável.

Para a membrana, obtém-se a equação de equilíbrio e condição de contorno, substituindo-se o primeiro invariante de deformação (3.25) na função energia de deformação (2.19) e depois nas equações (3.26) e (3.27). Assim, para uma membrana de espessura variável $h(\rho)$ a equação de equilíbrio é dada por:

$$h(\rho) \left(\frac{r_o}{\rho} - \frac{3\rho^3}{r_o^3 (r_{o,\rho})^2} - r_{o,\rho} + \frac{3\rho^2}{r_o^2 (r_{o,\rho})^3} \right) - h(\rho) r_{o,\rho\rho} \left(\frac{3\rho^3}{r_o^2 (r_{o,\rho})^4} + \rho \right) + \frac{dh(\rho)}{d\rho} \left(\frac{\rho^3}{r_o^2 (r_{o,\rho})^3} - \rho r_{o,\rho} \right) = 0 \quad (3.32)$$

e a condição de contorno em $\rho = R_o$ como:

$$f = \frac{2h(\rho)C_1}{R_o r_o^2 r_{o,\rho}^3} (r_o^2 r_{o,\rho}^4 \rho - \rho^3) \quad (3.33)$$

3.3.2.

Equação de equilíbrio para membrana de espessura constante.

Para uma membrana anular de espessura indeformada constante, após a substituição da função energia de deformação nas equações (3.26) e (3.27), obtém-se a equação de equilíbrio:

$$\frac{r_o}{\rho} - \frac{3\rho^3}{r_o^3 (r_{o,\rho})^2} - r_{o,\rho} + \frac{3\rho^2}{r_o^2 r_{o,\rho}^3} - \left(\frac{3\rho^3}{r_o^2 (r_{o,\rho})^4} + \rho \right) r_{o,\rho\rho} = 0 \quad (3.34)$$

e a condição de contorno em $\rho = R_o$:

$$f = \frac{2h C_1}{R_o r_o^2 r_{o,\rho}^3} (r_o^2 r_{o,\rho}^4 \rho - \rho^3) \quad (3.35)$$

3.3.3.

Método de integração numérica

Por ser a equação diferencial da membrana, apresentada anteriormente (3.32), altamente não-linear torna-se necessário em certos casos a utilização de métodos numéricos para a resolução deste sistema. Pode-se obter uma solução numérica de forma eficiente transformando o problema de valor de contorno em um problema de valor inicial e utilizando-se, a seguir, métodos de integração numérica. Um método de integração numérica amplamente testado na literatura para resolver este tipo de problema é o método de Runge-Kutta.

O sistema de equações corresponde ao chamado problema de valor de contorno onde uma condição de contorno é conhecida em $\rho = \rho_o$ e uma é conhecida em $\rho = R_o$. Porém, necessita-se de duas condições iniciais, então a condição de contorno livre é inicialmente arbitrada e ajustada pelo *shooting method* (Krayterman, 1990) e a integração numérica realizada pelo método de Runge-Kutta, sendo a convergência da solução obtida pelo método de Newton-Raphson.

Dessa maneira, neste trabalho é usada uma metodologia incremental-iterativa, onde, a partir de uma configuração de equilíbrio conhecida, é obtida uma nova configuração de equilíbrio associada a um incremento do parâmetro de controle. Isto é feito usando-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem para integrar o sistema de equações diferenciais que descreve o problema e o algoritmo de Newton Raphson para minimizar o erro nas condições de contorno.

No *shooting method* é feita inicialmente uma escolha dos valores das variáveis livres e prescritas de um ponto inicial, x_i , do domínio de integração, onde se tem que as variáveis prescritas devem ser consistentes com as condições de contorno específicas do ponto, e as livres são arbitradas. As equações diferenciais são integradas numericamente como em um problema de valor inicial, chegando ao ponto final do domínio, x_f . São em geral encontradas discrepâncias entre as variáveis obtidas por integração numérica em x_f e os respectivos valores prescritos neste ponto, já que os valores das condições iniciais livres não são conhecidos a priori. Torna-se então necessário efetuar um ajuste das condições de contorno livres em x_i em função das discrepâncias detectadas em x_f . Os procedimentos de integração das equações e de ajuste das condições iniciais são

repetidos sistematicamente até que todas as condições de contorno prescritas em x_f sejam satisfeitas com o grau de precisão desejado.

Neste caso as equações diferenciais de primeira ordem utilizadas na integração numérica são:

$$y(\rho) = \frac{dr_o}{d\rho} \quad (3.36)$$

$$\frac{dy(\rho)}{d\rho} = - \left(\frac{r_o^4 r_{o,\rho}^4 - 3\rho^4 r_{o,\rho} - \rho r_o^3 r_{o,\rho}^5 + 3\rho^3 r_o^3 r_{o,\rho}}{\rho^2 r_o (3\rho^2 + r_o^2 r_{o,\rho}^4)} \right) - \left(\frac{\rho^3 r_{o,\rho} - \rho r_o^2 r_{o,\rho}^4}{\rho (3\rho^2 + r_o^2 r_{o,\rho}^4)} \right) \frac{1}{h} \frac{dh}{d\rho} \quad (3.37)$$

e as condições iniciais:

$$r_o(R_o) = R_f \quad (3.38)$$

$$r_o(\rho_o) = \rho_o \quad (3.39)$$

Após um estudo de convergência em função das coordenadas tracionadas da membrana circular, adota-se um passo de tamanho igual a $1 \times 10^{-5} m$ para as integrações numéricas através do método de Runge-Kutta.

3.4.

Análise dinâmica

Nessa análise tem-se por objetivo o estudo das vibrações lineares e não-lineares das membranas em estudo. Partindo da função de Lagrange, apresentada em (3.19), e aplicando o princípio de Hamilton, chegam-se às equações diferenciais de movimento:

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial L}{\partial r_{,\rho}} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial L}{\partial r_{,\theta}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial r_{,t}} \right) = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_{,\rho}} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_{,\theta}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \beta_{,t}} \right) = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial L}{\partial z_{,\rho}} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial L}{\partial z_{,\theta}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial z_{,t}} \right) = 0 \quad (3.42)$$

Dessa forma, substituindo o primeiro invariante de deformações (3.13) na função de Lagrange (3.19) e posteriormente nas equações de movimento (3.40) a (3.42) obtêm-se as equações de movimento em função dos deslocamentos. Após a

linearização do sistema encontram-se as seguintes equações de movimento lineares para a membrana circular, ou anular, de espessura variável na direção radial:

a) Direção radial

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(-r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} - 3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 u(\rho, \theta, t)}{\partial \rho^2} + \right. \\
 & \left[\begin{aligned}
 & - \left(6\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} + 6r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^5}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 r_o(\rho)}{\partial \rho^2} - \\
 & 7 \frac{1}{\rho} r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} - 12\rho^2 r_o(\rho)^3 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} + \\
 & 6 \frac{1}{\rho^2} r_o(\rho)^7 \frac{\partial r_o(\rho)^5}{\partial \rho} + 9\rho r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} - \\
 & \frac{1}{h(\rho)} \frac{dh(\rho)}{d\rho} \left(3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} - 7r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^5}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \right] \frac{\partial u(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} + \\
 & \left[\begin{aligned}
 & \left(-12\rho^2 r_o(\rho)^3 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} - 6r_o(\rho)^5 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 r_o(\rho)}{\partial \rho^2} - \\
 & \frac{6}{\rho} r_o(\rho)^5 \frac{\partial r_o(\rho)^7}{\partial \rho} - 9\rho^2 r_o(\rho)^2 \frac{\partial r_o(\rho)^4}{\partial \rho} + \\
 & 12\rho r_o(\rho)^3 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} + 7 \frac{1}{\rho^2} r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} + \\
 & \frac{1}{h(\rho)} \frac{dh(\rho)}{d\rho} \left(4\rho^2 r_o(\rho)^3 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} - 6r_o(\rho)^5 \frac{\partial r_o(\rho)^7}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \right] u(\rho, \theta, t) + \\
 & \left[\begin{aligned}
 & \left(-12\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} - 6r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 r_o(\rho)}{\partial \rho^2} - \frac{6}{\rho} r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^7}{\partial \rho} \\
 & + \frac{8}{\rho^2} r_o(\rho)^7 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} - 12\rho^2 \left(r_o(\rho)^3 \frac{\partial r_o(\rho)^4}{\partial \rho} - \frac{r_o(\rho)^4}{\rho} \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} \right) \\
 & + \frac{1}{h(\rho)} \frac{dh(\rho)}{d\rho} \left(4\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} - 6r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^7}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \right] \frac{\partial v(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} \\
 & - \left(r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 u(\rho, \theta, t)}{\partial \theta^2} - \left(3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 v(\rho, \theta, t)}{\partial \rho \partial \theta} \left. \right\} 2C_1 h(\rho) + \\
 & + \Gamma r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \left(h(\rho) \frac{\partial^2 u(\rho, \theta, t)}{\partial t^2} + \zeta C_c \frac{\partial u(\rho, \theta, t)}{\partial t} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

b) Direção circunferencial

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[-2r_o(\rho)^7 \frac{\partial r_o(\rho)^7}{\partial \rho} + \left(-\frac{1}{\rho} + \frac{1}{h(\rho)} \frac{dh(\rho)}{d\rho} \right) r_o(\rho)^8 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \right] \frac{\partial v(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} + \right. \\
& \left. \left[-2\frac{1}{\rho^2} r_o(\rho)^7 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} + 3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} \frac{\partial^2 r_o(\rho)}{\partial \rho^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. \left(3\rho + \frac{1}{h(\rho)} \frac{dh(\rho)}{d\rho} \right) r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} \right] \frac{\partial u(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} - \right. \\
& \left. 3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} \frac{\partial^2 u(\rho, \theta, t)}{\partial \theta \partial \rho} - r_o(\rho)^8 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \frac{\partial^2 v(\rho, \theta, t)}{\partial \rho^2} - \right. \\
& \left. \left(3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^4}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} r_o(\rho)^8 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 v(\rho, \theta, t)}{\partial \theta^2} - \right. \\
& \left. \left(r_o(\rho)^8 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} + 2r_o(\rho)^7 \frac{\partial r_o(\rho)^7}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \right\} 2C_1 h(\rho) + \\
& \Gamma r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \left(h(\rho) \frac{\partial^2 v(\rho, \theta, t)}{\partial t^2} + \zeta C_c \frac{\partial v(\rho, \theta, t)}{\partial t} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.44}$$

c) Direção transversal

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(\rho^2 \frac{\partial r_o(\rho)^4}{\partial \rho} r_o(\rho)^2 - \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} r_o(\rho)^6 \right) \frac{\partial^2 w(\rho, \theta, t)}{\partial \rho^2} + \right. \\
& \left[-4\rho^2 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} r_o(\rho)^2 \frac{\partial^2 r_o(\rho)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} r_o(\rho)^6 + \right. \\
& \left. 3\rho \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} r_o(\rho)^4 - 2\rho^2 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} r_o(\rho)^3 + \right. \\
& \left. \frac{1}{h(\rho)} \frac{dh(\rho)}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} r_o(\rho)^4 - \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} r_o(\rho)^6 \right) \right] \frac{\partial w(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} + \\
& \left. \left(\rho^2 \frac{\partial r_o(\rho)^4}{\partial \rho} r_o(\rho)^2 - \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} r_o(\rho)^6 \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2 w(\rho, \theta, t)}{\partial \theta^2} \right\} 2C_1 h(\rho) \\
& + \Gamma r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \left(h(\rho) \frac{\partial^2 w(\rho, \theta, t)}{\partial t^2} + \zeta C_c \frac{\partial w(\rho, \theta, t)}{\partial t} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Considerando a espessura da membrana indeformada constante pode-se simplificar as equações lineares de movimento, obtendo-se:

a) Direção radial

$$\begin{aligned}
 & \left\{ r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} - 3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} \right\} \frac{\partial^2 u(\rho, \theta, t)}{\partial \rho^2} + \\
 & \left[- \left(6\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} + 6r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^5}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 r_o(\rho)}{\partial \rho^2} - \right. \\
 & \left. 7 \frac{1}{\rho} r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} - 12\rho^2 r_o(\rho)^3 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} + \frac{\partial u(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} + \right. \\
 & \left. 6 \frac{1}{\rho^2} r_o(\rho)^7 \frac{\partial r_o(\rho)^5}{\partial \rho} + 9\rho r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} \right] \\
 & \left[\left(-12\rho^2 r_o(\rho)^3 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} - 6r_o(\rho)^5 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 r_o(\rho)}{\partial \rho^2} - \right. \\
 & \left. \frac{6}{\rho} r_o(\rho)^5 \frac{\partial r_o(\rho)^7}{\partial \rho} - 9\rho^2 r_o(\rho)^2 \frac{\partial r_o(\rho)^4}{\partial \rho} + \frac{u(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} + \right. \\
 & \left. 12\rho r_o(\rho)^3 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} + 7 \frac{1}{\rho^2} r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \right] \\
 & \left[\left(-12\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^2}{\partial \rho} - 6r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 r_o(\rho)}{\partial \rho^2} - \right. \\
 & \left. \frac{6}{\rho} r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)^7}{\partial \rho} + \frac{8}{\rho^2} r_o(\rho)^7 \frac{\partial r_o(\rho)^6}{\partial \rho} - 12\rho^2 r_o(\rho)^3 \frac{\partial r_o(\rho)^4}{\partial \rho} - \frac{\partial v(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} - \right. \\
 & \left. 12\rho r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} \right] \\
 & \left\{ r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} \right\} \frac{\partial^2 u(\rho, \theta, t)}{\partial \theta^2} - \left\{ 3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)^3}{\partial \rho} \right\} \frac{\partial^2 v(\rho, \theta, t)}{\partial \rho \partial \theta} \Big\} 2C_1 + \\
 & + \Gamma r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} \left(\frac{\partial^2 u(\rho, \theta, t)}{\partial t^2} + \zeta C_c \frac{\partial u(\rho, \theta, t)}{\partial t} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

b) Direção circunferencial

$$\begin{aligned}
 & \left[-2r_o(\rho)^7 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} r_o(\rho)^8 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} \right] \frac{\partial v(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} + \\
 & \left[-2 \frac{1}{\rho^2} r_o(\rho)^7 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} - 3\rho r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial u(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} - \right. \\
 & \left. 3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial^2 r_o(\rho)}{\partial \rho^2} \right] \frac{\partial u(\rho, \theta, t)}{\partial \theta} - \\
 & 3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial^2 u(\rho, \theta, t)}{\partial \theta \partial \rho} - r_o(\rho)^8 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial^2 v(\rho, \theta, t)}{\partial \rho^2} - \\
 & \left(3\rho^2 r_o(\rho)^4 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} r_o(\rho)^8 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} \right) \frac{\partial^2 v(\rho, \theta, t)}{\partial \theta^2} - \\
 & \left(r_o(\rho)^8 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} + 2r_o(\rho)^7 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} \Big\} 2C_1 + \\
 & \Gamma r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} \left(\frac{\partial^2 v(\rho, \theta, t)}{\partial t^2} + \zeta C_c \frac{\partial v(\rho, \theta, t)}{\partial t} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

c) Direção transversal

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(-\frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} r_o(\rho)^6 + \rho^2 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} r_o(\rho)^4 \right) \frac{\partial^2 w(\rho, \theta, t)}{\partial \rho^2} + \right. \\
 & \left. \left(-4\rho^2 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} r_o(\rho)^4 \frac{\partial^2 r_o(\rho)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} r_o(\rho)^6 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 3\rho \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} r_o(\rho)^4 - 2\rho^2 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} r_o(\rho)^3 \right) \frac{\partial w(\rho, \theta, t)}{\partial \rho} + \right. \\
 & \left. \left(-\frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} r_o(\rho)^6 \frac{1}{\rho^2} + \rho^2 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} r_o(\rho)^2 \right) \frac{\partial^2 w(\rho, \theta, t)}{\partial \theta^2} \right] 2C_1 + \\
 & \Gamma r_o(\rho)^6 \frac{\partial r_o(\rho)}{\partial \rho} \left(\frac{\partial^2 w(\rho, \theta, t)}{\partial t^2} + \zeta C_c \frac{\partial w(\rho, \theta, t)}{\partial t} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

O grifo é aqui usado para diferenciar os termos das equações diferenciais dos seus coeficientes que são funções do estado de tensões iniciais.

3.5.

Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos é um procedimento numérico que pode ser aplicado a problemas de geometria irregular, condições de contorno arbitrárias e diversas propriedades dos materiais. Esse método combina vários conceitos matemáticos estabelecendo e resolvendo um sistema de equações lineares ou não lineares e tem sido extensivamente usado para análise de problemas suficientemente complexos para serem solucionados através dos métodos analíticos clássicos ou métodos numéricos simplificados.

É um método versátil, fundamentado na divisão do contínuo em estudo em elementos. A forma de divisão depende do problema a ser analisado, exigindo uma familiarização do usuário com as características dos diversos elementos finitos passíveis de utilização, ou mesmo a tentativa de vários tipos de divisão.

Neste estudo é utilizado o programa Abaqus®, versão 6.5. Uma breve abordagem dos tipos de elementos fornecidos pelo programa para a análise de membranas hiperelásticas é feita a seguir.

3.5.1.

Tipos de Elementos

Existem dois tipos de elementos de membranas disponíveis no Abaqus®: elementos gerais de membrana e elementos de membrana axissimétricos.

Estes elementos são definidos pelo código apresentado na Figura 3.2.

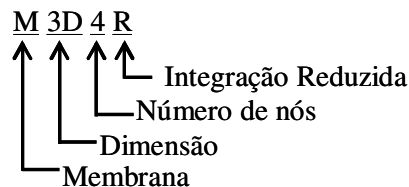


Figura 3.2 - Descrição do tipo de elemento de membrana usada pelo Abaqus®.

Tem-se no Abaqus® elementos triangulares com 3 e 6 nós e elementos quadrilaterais com 4, 8 e 9 nós, como mostram a Tabela 3.1 e a Figura 3.3.

Tabela 3.1 – Tipos de elementos de membrana disponíveis no Abaqus.

Sigla	Tipo	Nº de nós
M3D3	triangular	3
M3D4	quadrilateral	4
M3D4R	quadrilateral com integração reduzida	4
M3D6	triangular	6
M3D8	quadrilateral	8
M3D8R	quadrilateral com integração reduzida	8
M3D9	quadrilateral	9
M3D9R	quadrilateral com integração reduzida	9

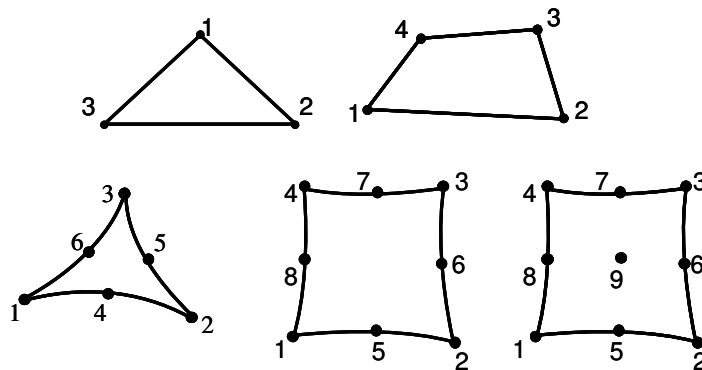


Figura 3.3 – Representação gráfica dos elementos de membrana e casca.

Elementos de membrana são usados para modelar estruturas que não apresentem resistência à flexão, principal característica de membranas. A escolha do tipo específico de elemento a ser usado, dentro do universo de elementos disponíveis, foi o de melhor modelar uma membrana da qual se esperava grandes deslocamentos e deformações.

A biblioteca do Abaqus® inclui também três grupos de elementos de casca: Casca Fina, Casca Espessa e de Finalidade Geral. Os elementos de casca de Finalidade Geral levam em consideração a deformação por cisalhamento, as quais se tornam muito pequenas à medida que se diminui a espessura da estrutura. Os

elementos de Casca Espessa são necessários quando é importante considerar-se os efeitos de cisalhamento através da espessura da casca. Como critério prático considera-se que uma casca é espessa quando sua espessura for maior que 1/15 do menor vão, do contrário é considerada fina.

Por sua vez, os elementos indicados para casca fina desprezam estes efeitos, já que nas cascas finas estes efeitos são muito pequenos em comparação aos de flexão. Esta aproximação é feita pela imposição da condição de Kirchhoff: admite-se que a seção plana normal à seção média da casca permanece plana e normal durante a deformação.

Neste trabalho, para análise de membranas hiperelásticas, foram adotados tanto elementos de membrana como de casca. Um estudo foi realizado para identificar o elemento mais apropriado em função do carregamento, bem como da geometria utilizada. Os elementos de casca são definidos na forma esquemática ilustrada na Figura 3.4.

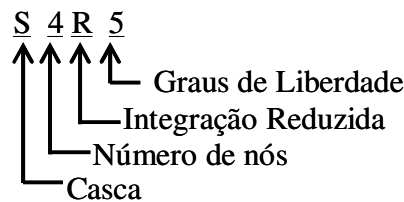


Figura 3.4 - Descrição do tipo de elemento de casca usada pelo Abaqus®.

Tem-se no Abaqus® elementos de casca triangulares com 3 e 6 nós e elementos quadrilaterais com 4, 8 e 9 nós, como apresentados na Tabela 3.2 e na Figura 3.3.

Para alguns tipos de análises, tais como a de histerese do material, a discretização do modelo no Abaqus® não pode ser realizada com elementos de casca ou de membrana. Uma maneira de controlar esse problema é com o uso de elementos sólidos tridimensionais.

Na biblioteca do Abaqus® existem inúmeros elementos sólidos que podem ser de uma, duas ou três dimensões, axissimétricos ou cilíndricos. Neste trabalho é utilizado o elemento sólido tridimensional quando não é possível a discretização do problema com elementos de casca e de membrana. Os elementos sólidos são definidos no Abaqus® da maneira apresentada na Figura 3.5:

Tabela 3.2 – Tipos de elementos de casca disponíveis no Abaqus®.

Sigla	Tipo	Nº de nós
STRI3	triangular (casca fina)	3
S3	triangular (geral – deformação finita)	3
S3R	triangular com integração reduzida	3
S3RS	triangular com baixa deformação de membrana	3
STRI65	triangular (casca fina)	6
S4	quadrilateral (geral – deformação finita)	4
S4R	quadrilateral com integração reduzida	4
S4RS	quadrilateral com integração reduzida e baixa deformação de membrana	4
S4R5	quadrilateral (casca fina)	4
S8R	quadrilateral (casca espessa)	8
S8R5	quadrilateral (casca fina)	8
S9R5	quadrilateral (casca fina)	9

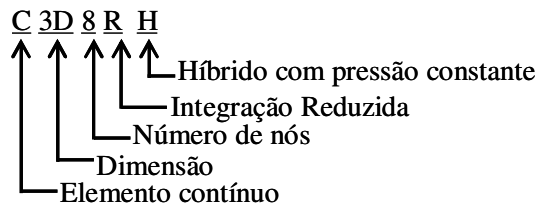


Figura 3.5 - Descrição do tipo de elemento de sólido usada pelo Abaqus®.

Os elementos sólidos tridimensionais disponíveis no Abaqus® são apresentados na Figura 3.6 e na Tabela 3.3.

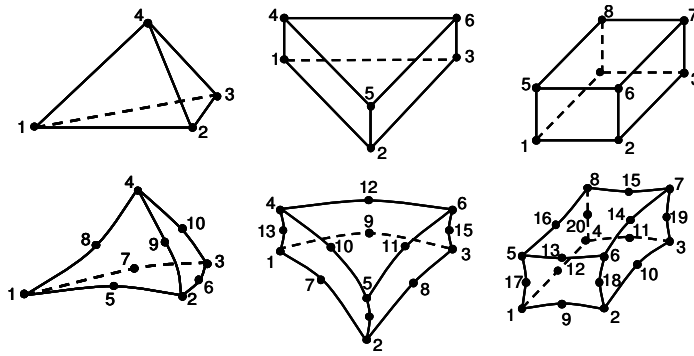


Figura 3.6 – Representação gráfica dos elementos sólidos tridimensionais.

Tabela 3.3 – Tipos de elementos sólidos tridimensionais tensão/deslocamento disponíveis no Abaqus®.

Sigla	Tipo	Nº de nós
C3D4	tetraedro	4
C3D4H	tetraedro híbrido	4
C3D6	prisma triangular	6
C3D6H	prisma triangular híbrido	6
C3D8	quadrilateral	8
C3D8H	quadrilateral híbrido	8
C3D8I	quadrilateral com modos incompatíveis	8
C3D8IH	quadrilateral com modos incompatíveis e híbrido	8
C3D8R	quadrilateral com integração reduzida	8
C3D8RH	quadrilateral com integração reduzida e híbrido	8
C3D10	tetraedro quadrático	10
C3D10H	tetraedro quadrático híbrido	10
C310M	tetraedro quadrático modificado	10
C310MH	tetraedro quadrático modificado e híbrido	10
C3D15	prisma triangular quadrático	15
C3D15H	prisma triangular quadrático híbrido	15
C3D20	quadrilateral quadrático	20
C3D20H	quadrilateral quadrático híbrido	20
C3D20R	quadrilateral quadrático com integração reduzida	20
C3D20RH	quadrilateral quad.com int.reduzida e híbrido	20