

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Renata Machado Soares

Análise dinâmica de membranas circulares hiperelásticas

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Paulo Batista Gonçalves
Co-orientadora: Djenane Cordeiro Pamplona

Rio de Janeiro

Abril de 2009



Renata Machado Soares

Análise dinâmica de membranas circulares hiperelásticas

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Orientador

Departamento de Engenharia Civil-PUC-Rio

Prof. Djenane Cordeiro Pamplona

Co-Orientadora

Departamento de Engenharia Civil-PUC-Rio

Prof. Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil

EPUSP-USP

Prof. Michèle Schubert Pfeil

COPPE-UFRJ

Prof. Carlos Alberto de Almeida

DEM-PUC-Rio

Prof. Deane de Mesquita Roehl

DEC-PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

DEC-PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 03 de abril de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Renata Machado Soares

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Goiás (UFG) em março de 2002. Ingressou no mestrado em Engenharia Civil da Universidade Federal de Goiás (UFG) em março de 2003, atuando na área de Instabilidade e Dinâmica das Estruturas. Em 2005 iniciou o curso de doutorado na PUC-Rio atuando na área de Instabilidade e Dinâmica das Estruturas e de Membranas e Biomembranas.

Ficha Catalográfica

Soares, Renata Machado

Análise dinâmica de membranas circulares hiperelásticas / Renata Machado Soares ; orientador: Paulo Batista Gonçalves ; co-orientadora: Djenane Cordeiro Pamplona. – 2009.

214 f. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Civil)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Membranas circular e anular. 3. Material hiperelástico neo-Hookeano. 4. Vibrações não-lineares. 5. Deformações finitas. 6. Inclusão rígida. I. Gonçalves, Paulo Batista. II Pamplona, Djenane Cordeiro III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV. Título.

À Frederico, Milton e Otília.

Agradecimentos

À Deus por ter dado forças para o cumprimento desta etapa.

Ao professor Paulo Batista Gonçalves pelo auxílio constante na realização deste trabalho, pela sua paciência, confiança depositada e amizade.

Ao meu amado marido Frederico, pelo amor, incentivo, ajuda e compreensão ao longo deste caminho, mesmo nos momentos turbulentos.

À minha família na figura dos meus pais, Milton e Otília, que são sinônimos de força, coragem e amor, e dos meus irmãos André Luiz e Alessandra pelo apoio, compreensão, carinho e amizade.

Aos amigos que fiz nesse período e que foram de fundamental importância. Em especial à Paôla, Marianna e Nelly pelo convívio diário compartilhado, à Patrícia e Lucas pelo auxílio com o Abaqus, à Fanny, Diego, Igor e família, André Müller e família, Thiago Pecin, Rosendo, Magnus e Alex.

Aos amigos Eulher e Daniela pela amizade, prestatividade e acolhimento.

Ao professor e amigo Zenón J. G. N. Del Prado por seu auxílio na concretização deste trabalho.

Aos professores da PUC-Rio pelos ensinamentos transmitidos.

Aos professores da UFG que de alguma forma contribuíram para minha formação acadêmica.

Ao Cnpq e à Faperj pelo apoio financeiro, sem os quais este trabalho não poderia ser realizado.

A todos que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

Resumo

Soares, Renata Machado; Gonçalves, Paulo Batista; Pamplona, Djenane Cordeiro. **Análise dinâmica de membranas circulares hiperelásticas**. Rio de Janeiro, 2009. 214p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesta tese são estudadas as vibrações não-lineares de membranas circulares inicialmente tracionadas sujeitas a deformações finitas. O material da membrana é modelado como um material hiperelástico neo-Hookeano, isotrópico e incompressível. Baseada na teoria de deformações finitas para membranas hiperelásticas, uma formulação variacional é desenvolvida. Primeiro a solução da membrana sob tração radial uniforme é obtida e então as equações de movimento da membrana são obtidas pelo princípio de Hamilton. A partir das equações linearizadas, as frequências e os modos de vibração da membrana são obtidos analiticamente. Os modos naturais são usados para aproximar o campo de deformações não-linear usando o método de Galerkin e modelos de ordem reduzida são deduzidos através do método de Karhunen-Loève e de métodos analíticos. Além disso, estuda-se a influência da variação da massa específica e da espessura ao longo da direção radial da membrana nas vibrações. A seguir a mesma metodologia é utilizada para uma membrana anular. Por fim, estudam-se as vibrações não-lineares da membrana anular acoplada a uma inclusão rígida que insere tensões de tração na membrana, pois, devido ao seu peso próprio, provoca deslocamentos estáticos transversais e axissimétricos na membrana. Os mesmos problemas são analisados por elementos finitos utilizando o programa comercial Abaqus.

Palavras-chave

membranas circular e anular; material hiperelástico neo-Hookeano; vibrações não-lineares; deformações finitas; inclusão rígida.

Abstract

Soares, Renata Machado; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor); Pamplona, Djenane Cordeiro (Co-advisor). **Dynamic analysis of hyperelastic circular membranes.** Rio de Janeiro, 2009. 214p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work presents an analysis of the nonlinear vibration response of a pre-stretched hyperelastic circular membrane subjected to finite deformations. The membrane material is assumed to be isotropic, homogeneous and neo-Hookean. Based on the theory of finite deformations for hyperelastic membranes, a variational formulation is developed. First the exact solution of the membrane under a uniform radial stretch is obtained and then the equations of motion of the pre-stretched membrane are derived using the Hamilton's principle. From the linearized equations of motion, the natural frequencies and mode shapes of the membrane are obtained analytically. Then the natural modes are used to approximate the nonlinear deformation field using the Galerkin method. Several reduced order models are tested using the Karhunen-Loève method and analytical methods. Besides, the influence of the variation of the membrane thickness and material density along the radial direction of the membrane on the vibrations is investigated. The same methodology it is used for the annular membrane. Finally, the non-linear vibrations of the annular membrane coupled to a rigid inclusion are studied. The rigid inclusion inserts traction forces in the membrane and its own weight causes static transverse and radial displacements in the membrane. The same problems are analyzed by finite elements using the commercial program Abaqus®.

Keywords

circular and annular membranes; hyperelastic neo-Hookean material; nonlinear vibrations; finite deformations; rigid inclusion.

Sumário

1 Introdução	27
1.1. Objetivos	33
1.2. Organização do trabalho	34
2 Teoria de membranas elásticas	37
2.1. Relações Geométricas	37
2.2. Sistema de coordenadas para membranas axissimétricas	39
2.3. Modelos Constitutivos	41
2.3.1. Modelo de Mooney–Rivlin	41
2.3.2. Modelo neo-Hookeano	41
2.3.3. Modelo de Ogden	42
2.3.4. Modelo Yeoh	42
2.3.5. Modelo Polinomial	42
2.3.6. Modelo Blatz-Ko	43
2.3.7. Modelo Arruda-Boyce	43
3 Formulação da membrana hiperelástica	44
3.1. Modelagem matemática	44
3.2. Funcional de energia da membrana	47
3.3. Análise estática	48
3.3.1. Equação de equilíbrio para membrana de espessura variável.	50
3.3.2. Equação de equilíbrio para membrana de espessura constante.	50
3.3.3. Método de integração numérica	51
3.4. Análise dinâmica	52
3.5. Método dos elementos finitos	57
3.5.1. Tipos de Elementos	57
4 Membrana hiperelástica circular de espessura constante	62
4.1. Análise estática	62
4.2. Análise linear da vibração livre	65

4.3. Análise não linear da vibração livre	69
4.4. Redução do problema pelo método de Karhunen-Loève	79
4.4.1. Membrana submetida a um deslocamento inicial qualquer	84
4.5. Análise não linear da vibração forçada	85
4.6. Análise comparativa com diferentes modelos constitutivos	94
5 Membrana circular com massa específica e espessura variável	100
5.1. Variação da massa específica na direção radial da membrana circular	100
5.1.1. Análise linear da vibração livre	101
5.1.2. Análise não linear da vibração livre	105
5.2. Variação da espessura na direção radial da membrana circular	109
5.2.1. Análise estática	109
5.2.2. Análise linear da vibração livre	114
5.2.3. Análise não linear da vibração livre	118
5.2.4. Análise não linear da vibração forçada	121
6 Membrana hiperelástica anular	127
6.1. Membrana anular de espessura constante	127
6.1.1. Análise estática	127
6.1.2. Análise linear da vibração livre	130
6.1.3. Análise não linear da vibração livre	137
6.1.4. Redução do problema pelo método de Karhunen-Loève	144
6.1.5. Análise não linear da vibração forçada	147
6.2. Variação da massa específica na direção radial da membrana anular	153
6.2.1. Análise linear da vibração livre	154
6.2.2. Análise não linear da vibração livre	159
6.3. Variação da espessura na direção radial da membrana anular	162
6.3.1. Análise estática	162
6.3.2. Análise linear da vibração livre	165
6.3.3. Análise não linear da vibração livre	169
6.3.4. Análise não linear da vibração forçada	172
7 Membrana anular com inclusão rígida	177
7.1. Modelagem matemática	177

7.2. Funcional de energia da membrana	179
7.3. Análise estática	181
7.4. Análise dinâmica	189
7.4.1. Análise linear das vibrações livres	191
7.4.2. Análise não linear das vibrações livres	193
7.4.3. Análise não linear da vibração forçada	197
7.4.3.1. Vibração Axissimétrica	198
7.4.3.2. Vibração Assimétrica	201
8 Conclusões e sugestões	206
8.1. Conclusões	206
8.2. Sugestões	209
9 Referências Bibliográficas	210

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Exemplo de aplicações de membranas.....	27
Figura 3.1 – Configurações da membrana indeformada e deformada na direção radial.....	45
Figura 3.2 - Descrição do tipo de elemento de membrana usada pelo Abaqus®..	57
Figura 3.3 – Representação gráfica dos elementos de membrana e casca.	58
Figura 3.4 - Descrição do tipo de elemento de casca usada pelo Abaqus®.....	59
Figura 3.5 - Descrição do tipo de elemento de sólido usada pelo Abaqus®.....	60
Figura 3.6 – Representação gráfica dos elementos sólidos tridimensionais.	61
Figura 4.1 – Variação do comprimento radial tracionado (r_o) da membrana circular.....	64
Figura 4.2 - Espectro das frequências de vibração (rad/s) da membrana circular.....	66
Figura 4.3 – Variação da frequência de vibração (rad/s) em função do parâmetro de alongamento radial δ	67
Figura 4.4 – Variação de frequência de vibração (rad/s) em função do raio indeformado (m), R_o	68
Figura 4.5 – Modos de vibração da membrana circular.....	68
Figura 4.6 – (a) Variação dos deslocamentos (m) da membrana circular pré-tensionada sob grande amplitude de vibração ao longo do raio deformado. (b) Detalhe dos deslocamentos(m) radial e circunferencial ($\delta = 1.1$).	69
Figura 4.7 – Variação da frequência de vibração (rad/s) com a amplitude modal (m) considerando-se um número crescente de modos em (4.17).	71
Figura 4.8 - Relação frequência (rad/s)-amplitude modal (m) para vibração livre da membrana circular com diferentes valores de δ	72
Figura 4.9 - Relação frequência de vibração normalizada–coeficiente de tração radial, δ	73
Figura 4.10 - Resposta no tempo da vibração livre da membrana circular ($\delta = 1.10$).	74
Figura 4.11 - Relação frequência de vibração(rad/s)-deslocamento transversal (m) da membrana circular.....	75

Figura 4.12 - Relação frequência de vibração (rad/s)-deslocamento transversal (m) da membrana circular com diferentes valores de δ	76
Figura 4.13 - Deslocamento transversal (m) da membrana circular em vibração livre, em um tempo t ($\delta = 1.1$).	76
Figura 4.14 – Variação das tensões principais (N/m^2) da membrana em vibração livre ($\delta = 1.1$).	77
Figura 4.15 – Variação das extensões principais da membrana em vibração livre ($\delta = 1.1$). (λ_1 : Direção radial; λ_2 : Direção circunferencial).	78
Figura 4.16 – Variação das extensões principais e deslocamentos transversais (m) ao longo do raio da membrana livre de tensões iniciais.	78
Figura 4.17 - Relação normalizada frequência-deslocamento transversal (m) da membrana circular.	79
Figura 4.18 – Trechos da curva frequência-deslocamento transversal da membrana circular em vibração livre para decomposição de Karhunen-Loève ($\delta = 1.1$).	82
Figura 4.19 - Quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs para a vibração livre não linear da membrana circular.	82
Figura 4.20 – Comparação da deformada obtida a partir da expansão (4.17) com o primeiro POM da expansão de Karhunen-Loève.	84
Figura 4.21 – Campo de deslocamento transversal inicial qualquer da membrana.	84
Figura 4.22 - Quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs para a vibração livre não linear da membrana circular sob um campo de deslocamento inicial qualquer.	85
Figura 4.23 – Curva de ressonância não linear da membrana circular.	87
Figura 4.24 – Relação frequência (rad/s)-deslocamento (m) transversal para a vibração forçada da membrana circular com diferentes δ	88
Figura 4.25 – Relação frequência (rad/s)-deslocamento transversal (m) para a vibração forçada da membrana circular.	88
Figura 4.26 - Deslocamento transversal (m) da membrana circular em vibração forçada, em um tempo t ($\delta = 1.1$).	89
Figura 4.27 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da frequência de excitação (rad/s). Coordenada de Poincaré A_{10} (m) em função da amplitude da	

excitação P_o (N/m^2). ($\delta = 1.1$; $\zeta = 0.05$)	90
Figura 4.28 – Diagramas de bifurcação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da frequência de excitação Ω (rad/s) ($P_o = 1 N/m^2$; $\zeta = 0.05$).....	90
Figura 4.29 – Diagramas de bifurcação. Amplitude de vibração A_{10} (m) como função da frequência de excitação Ω (rad/s) ($\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$).	91
Figura 4.30 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2). ($\zeta = 0.05$)	91
Figura 4.31 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2).	92
Figura 4.32 – Bacia de atração no plano fase das condições iniciais $A_{10} \times \dot{A}_{10}$ ($P_o = 1 N/m^2$; $\zeta = 0.05$).....	93
Figura 4.33 - Curva tensão (Pa)-deformação utilizada pelo MEF no cálculo das constantes elásticas.	95
Figura 4.34 - Variação do deslocamento radial (m) da membrana sob esforços de tração radial utilizando os cinco modelos constitutivos.	96
Figura 4.35 - Resposta no tempo para membrana circular utilizando os cinco modelos constitutivos.....	98
Figura 4.36 – Relação frequência de vibração (rad/s)-deslocamento transversal (m) da membrana circular considerando diferentes modelos constitutivos do material.....	99
Figura 5.1 – Variação da massa específica normalizada ao longo da direção radial da membrana (Equação (5.1)).....	101
Figura 5.2 - Frequência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de tração radial δ para diferentes variações da massa específica da membrana circular....	105
Figura 5.3 - Frequência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de variação da massa específica (κ).	105
Figura 5.4 - Relação frequência (rad/s)-amplitude (m) para vibração livre da membrana circular com diferentes valores de κ	106
Figura 5.5 - Relação frequência (rad/s) – amplitude (m) para vibração livre da membrana circular com diferentes valores de δ ($\kappa = 0.5$).....	107

Figura 5.6 - Relação normalizada frequência (rad/s) - deslocamento transversal (m) da membrana circular ($\kappa = 0.5$).	108
Figura 5.7 - Relação frequência de vibração (rad/s)-deslocamento transversal (m) ($\delta = 1.1$).	108
Figura 5.8 – Variação da espessura normalizada ao longo da direção radial da membrana (Equação (5.10)).	109
Figura 5.9 – Variação do comprimento radial tracionado da membrana circular com espessura variável ($\eta = 0.5$).	110
Figura 5.10 – Variação do deslocamento radial (m) da membrana circular com espessura variável para diferentes valores de η .	110
Figura 5.11 – Tensões principais (N/m^2) da membrana circular tracionada com espessura variável para diferentes valores de η . ($\delta = 1.10$).	113
Figura 5.12 – Espessura (m) da membrana circular tracionada com espessura variável para diferentes valores de η . ($\delta = 1.10$).	114
Figura 5.13 – Variação da frequência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de tração radial δ para diferentes leis de variação da espessura da membrana circular.	117
Figura 5.14 – Variação da frequência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de variação da espessura, η .	117
Figura 5.15 - Relação frequência (rad/s) – amplitude (m) para vibração livre da membrana circular com diferentes valores de η .	118
Figura 5.16 - Relação frequência (rad/s)-amplitude (m) para vibração livre da membrana circular com diferentes valores de δ ($\eta = 0.5$).	119
Figura 5.17 - Relação normalizada frequência-deslocamento transversal (m) da membrana circular ($\eta = 0.5$).	119
Figura 5.18 - Relação normalizada frequência (rad/s) – deslocamento transversal da membrana circular ($\delta = 1.1$).	120
Figura 5.19 - Relação frequência de vibração (rad/s) - deslocamento transversal (m) para dois valores de η ($\delta=1.10$).	120
Figura 5.20 - Relação normalizada frequência – deslocamento transversal (m) da membrana circular com variação de espessura e massa específica.	121
Figura 5.21 - Relação frequência (rad/s) – amplitude (m) para vibração forçada	

da membrana circular com diferentes valores de η ($\delta = 1.1$).....	122
Figura 5.22 – Curva de ressonância para a vibração forçada da membrana circular com espessura variável com diferentes δ . ($\eta = 0.5$).....	123
Figura 5.23 – Diagrama de bifurcação do mapa de Poincaré. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da frequência de excitação Ω (rad/s) ($P_o = 1$ N/m^2 ; $\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$).	123
Figura 5.24 – Diagrama de bifurcação. Amplitude de vibração A_{10} (m) como função da frequência de excitação Ω (rad/s) ($\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$).....	124
Figura 5.25 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2) ($\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$).	124
Figura 5.26 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2) ($\delta = 1.1$).....	125
Figura 5.27 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} em função da amplitude da excitação P_o . ($\delta = 1.1$; $\zeta = 0.05$).....	125
Figura 5.28 – Bacia de atração no plano fase das condições iniciais $A_{10} \times \dot{A}_{10}$ ($P_o = 1$ N/m^2 ; $\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$).	126
Figura 6.1 – Variação do comprimento radial tracionado da membrana anular.	128
Figura 6.2 – Tensões principais (N/m^2) para a membrana anular tracionada de espessura indeformada constante.....	129
Figura 6.3 – Deslocamento transversal (m) da membrana anular pré-tensionada em vibração livre em um certo tempo t ($\delta = 1.1$, $\rho_o = 0.2$ m).	132
Figura 6.4 - Espectro das frequências naturais (rad/s) da membrana anular. Frequência natural em função de m ($\rho_o = 0.20$ m).....	133
Figura 6.5 - Espectro das frequências naturais (rad/s) da membrana anular. Frequência natural em função de n ($\rho_o = 0.20$ m).....	134
Figura 6.6 – Variação da frequência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de tração radial da membrana anular.	135
Figura 6.7 – Variação da frequência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de tração radial para diferentes valores do raio interno da	

membrana anular.....	136
Figura 6.8 - Variação de frequência de vibração (rad/s) em função do raio indeformado, R_o (m).....	136
Figura 6.9 – Modos de vibração da membrana anular ($\rho_o = 0.20$ m).	137
Figura 6.10 – (a) Variação dos deslocamentos (m) da membrana circular pré-tensionada sob grande amplitude de vibração ao longo do raio tracionado. (b) Detalhe dos deslocamentos radial e circunferencial ($\delta = 1.1$, $\rho_o = 0.2$ m).....	137
Figura 6.11 – Variação da frequência de vibração (rad/s) com a amplitude modal (m), considerando-se um número crescente de modos em (6.16) ($\rho_o = 0.20$ m).....	139
Figura 6.12 - Relação frequência (rad/s) - amplitude (m) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de δ	140
Figura 6.13 - Relação frequência (rad/s) – amplitude (m) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de ρ_o	140
Figura 6.14 - Relação frequência de vibração (rad/s) - deslocamento transversal (m).	141
Figura 6.15 - Deslocamento transversal (m) da membrana anular em vibração livre, em um tempo t ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20$ m).....	142
Figura 6.16 - Relação normalizada frequência – deslocamento transversal (m) da membrana anular.	143
Figura 6.17 - Relação normalizada frequência-deslocamento transversal (m) da membrana anular com diferentes valores do raio interno. ($\delta = 1.1$).....	143
Figura 6.18 – Trechos da curva frequência (rad/s) – deslocamento transversal (m) da membrana em vibração livre para decomposição de Karhunen-Loève ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20$ m).....	144
Figura 6.19 - Quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs para a vibração livre não linear da membrana anular ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.2$ m).	145
Figura 6.20 – Comparação da deformada obtida a partir da expansão (6.16) com o primeiro POM da expansão de Karhunen-Loève ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.2$ m). ..	146
Figura 6.21 – Curva de ressonância não linear da membrana anular ($\rho_o = 0.20$ m).	148
Figura 6.22 – Relação frequência (rad/s) - deslocamento transversal (m) para a vibração forçada da membrana anular com diferentes δ ($\rho_o = 0.20$ m).	149

Figura 6.23 – Relação frequência (rad/s) - deslocamento transversal (m) para a vibração forçada da membrana anular com diferentes δ	149
Figura 6.24 – Diagramas de bifurcação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da frequência de excitação Ω (rad/s) ($P_o = 1 \text{ N/m}^2$; $\zeta = 0.05$; $\rho_o = 0.20 \text{ m}$).	150
Figura 6.25 – Curvas de ressonância. Amplitude de vibração A_{10} (m) como função da frequência de excitação Ω (rad/s) ($\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20 \text{ m}$). ...	150
Figura 6.26 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2). ($\zeta = 0.05$; $\rho_o = 0.20 \text{ m}$).....	151
Figura 6.27 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2). ($\rho_o = 0.20 \text{ m}$).....	151
Figura 6.28 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da frequência de excitação Ω . Coordenada de Poincaré A_{10} (m) em função da amplitude da excitação P_o (N/m^2) ($\delta = 1.1$; $\zeta = 0.05$; $\rho_o = 0.20 \text{ m}$).....	152
Figura 6.29 – Bacia de atração no plano fase das condições iniciais $A_{10} \times \dot{A}_{10}$ ($P_o = 1 \text{ N/m}^2$; $\zeta = 0.05$; $\rho_o = 0.20 \text{ m}$).....	153
Figura 6.30 - Frequência de vibração (ω_{10}) em função do coeficiente de tração radial para diferentes variações da massa específica ($\rho_o = 0.20 \text{ m}$).....	157
Figura 6.31 - Frequência de vibração (ω_{10}) em função do coeficiente de tração radial para diferentes valores do raio interno.	158
Figura 6.32 - Frequência de vibração (rad/s)-coeficiente de variação da massa específica ($\rho_o = 0.20 \text{ m}$).	158
Figura 6.33 - Relação frequência (rad/s) - amplitude (m) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de κ ($\rho_o = 0.20 \text{ m}$).....	159
Figura 6.34 - Relação normalizada frequência – deslocamento transversal (m) da membrana anular ($\delta = 1.10$; $\rho_o = 0.20 \text{ m}$).....	160
Figura 6.35 - Relação frequência (rad/s) – amplitude (m) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de δ ($\kappa = 0.5$; $\rho_o = 0.20 \text{ m}$).....	160
Figura 6.36 - Relação normalizada frequência – deslocamento transversal (m) da membrana anular ($\kappa = 0.5$; $\rho_o = 0.20 \text{ m}$).	161

Figura 6.37 - Relação frequência de vibração (rad/s) - deslocamento transversal (m) ($\delta = 1.10$; $\rho_o = 0.20 m$).....	161
Figura 6.38 – Variação do comprimento radial tracionado da membrana anular com espessura variável ($\eta = 0.5$; $\rho_o = 0.20 m$).....	162
Figura 6.39 – Variação do deslocamento radial (m) da membrana anular com espessura variável para diferentes valores de η ($\rho_o = 0.20 m$).....	163
Figura 6.40 – Tensões principais (N/m^2) da membrana anular tracionada com espessura variável para diferentes valores de η . ($\delta = 1.10$; $\rho_o = 0.20 m$).	164
Figura 6.41 - Frequência de vibração (rad/s) - razão de tração radial para diferentes variações da espessura da membrana anular ($\rho_o = 0.20 m$).	168
Figura 6.42 - Frequência de vibração (rad/s) em função do coeficiente de variação da espessura η para diferentes valores de δ ($\rho_o = 0.20 m$).....	168
Figura 6.43 - Relação frequência (rad/s) – amplitude (m) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de η ($\rho_o = 0.20 m$).	169
Figura 6.44 - Relação frequência (rad/s) - amplitude (m) para vibração livre da membrana anular com diferentes valores de δ ($\eta = 0.5$; $\rho_o = 0.20 m$).	170
Figura 6.45 - Relação normalizada frequência – deslocamento transversal (m) da membrana anular ($\eta = 0.5$; $\rho_o = 0.20 m$).....	170
Figura 6.46 - Relação normalizada frequência-deslocamento transversal (m) da membrana circular ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20 m$).....	171
Figura 6.47 - Relação frequência de vibração (rad/s) - deslocamento transversal (m) ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20 m$).....	171
Figura 6.48 - Relação normalizada frequência – deslocamento transversal (m) da membrana anular com variação de espessura e massa específica ($\rho_o = 0.20 m$).....	172
Figura 6.49 - Relação frequência (rad/s) – amplitude (m) para vibração forçada da membrana anular com diferentes valores de η ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20 m$).....	173
Figura 6.50 – Curva de ressonância para a vibração forçada da membrana anular com espessura variável com diferentes δ . ($\eta = 0.5$; $\rho_o = 0.20 m$).....	173
Figura 6.51 – Diagrama de bifurcação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da frequência de excitação Ω (rad/s) ($P_o = 1 N/m^2$; $\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20 m$).....	174

Figura 6.52 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2) ($\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20$ m).....	174
Figura 6.53 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) como função da amplitude da excitação P_o (N/m^2) ($\rho_o = 0.20$ m).....	175
Figura 6.54 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da frequência de excitação. Coordenada de Poincaré A_{10} (m) em função da amplitude da excitação P_o . (N/m^2) ($\delta = 1.1$; $\zeta = 0.05$; $\rho_o = 0.20$ m)	175
Figura 6.55 – Bacia de atração no plano fase das condições iniciais $A_{10} \times \dot{A}_{10}$ ($P_o = 1$ N/m^2 ; $\zeta = 0.05$; $\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.20$).....	176
Figura 7.1 – Configurações da membrana anular acoplada a um disco rígido....	178
Figura 7.2 – Deslocamento transversal estático (m) - Peso do disco rígido (N). 185	
Figura 7.3 - Variação do deslocamento radial (m) estático da membrana.	186
Figura 7.4 - Variação do deslocamento radial (m) estático da membrana em um ponto de coordenadas $(\rho, \theta) = (0.5; 0)$	187
Figura 7.5 - Variação do deslocamento transversal (m) estático da membrana..	188
Figura 7.6 – Tensões principais (N/m^2) da membrana anular com um disco rígido acoplado.	189
Figura 7.7 - Variação dos deslocamentos (m) da membrana ao longo do raio. (b) Detalhe dos deslocamentos radial e circunferencial (Caso 1; $h_d = 0.05$ m)... 190	
Figura 7.8 – Modos de vibração da membrana anular com disco rígido.	193
Figura 7.9 – Relação frequência (rad/s)-amplitude (m) para a vibração livre da membrana anular com um disco rígido acoplado.....	195
Figura 7.10 – Relação frequência- amplitude normalizada para a vibração livre da membrana anular com um disco rígido acoplado	196
Figura 7.11 – Relação frequência- deslocamento transversal para a vibração livre da membrana anular com um disco rígido acoplado.	197
Figura 7.12 – Curva de ressonância não linear da membrana anular com um disco rígido acoplado vibrando axissimetricamente.....	198
Figura 7.13 – Diagrama de bifurcação. Coordenada de Poincaré A (m) como função da frequência de excitação Ω (rad/s) – ($P_o = 1$ N ; $\zeta = 0.05$).....	198
Figura 7.14 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da	

freqüência de excitação. Coordenada de Poincaré $A(m)$ como função da amplitude da excitação $P_o(N)$. ($\zeta = 0.05$)	199
Figura 7.15 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré $A(m)$ como função da amplitude da excitação $P_o(N)$	199
Figura 7.16 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da freqüência de excitação. Coordenada de Poincaré $A_1(m)$ em função da amplitude da excitação $P_o(N)$. ($h_d = 0.02 m$; $\zeta = 0.05$).....	200
Figura 7.17 – – Bacia de atração no plano fase das condições iniciais $A \times \dot{A}$ ($P_o = 1 N$; $\zeta = 0.05$).	201
Figura 7.18 – Curva de ressonância não linear da membrana anular com um disco rígido acoplado vibrando assimetricamente.	202
Figura 7.19 – Diagramas de bifurcação. Coordenada de Poincaré $A(m)$ como função da freqüência de excitação Ω (rad/s) ($M_o = 0.5 Nm$; $\zeta = 0.01$).	202
Figura 7.20 – Diagramas de bifurcação para valores selecionados da freqüência de excitação. Coordenada de Poincaré $A(m)$ como função da amplitude da excitação $M_o(Nm)$ ($\zeta = 0.01$).	203
Figura 7.21 – Diagramas de bifurcação com diferentes valores de amortecimento. Coordenada de Poincaré $A(m)$ como função da amplitude da excitação $M_o(Nm)$	203
Figura 7.22 - Diagramas de bifurcação com diferentes valores da freqüência de excitação. Coordenada de Poincaré $A(m)$ em função da amplitude da excitação $M_o(Nm)$. ($h_d = 0.02 m$; $\zeta = 0.01$)	204
Figura 7.23 – Bacia de atração no plano fase $A \times \dot{A}$ ($\zeta = 0.05$; $M_o = 0.5 Nm$)...	205

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Tipos de elementos de membrana disponíveis no Abaqus.....	58
Tabela 3.2 – Tipos de elementos de casca disponíveis no Abaqus®.....	60
Tabela 3.3 – Tipos de elementos sólidos tridimensionais tensão/deslocamento disponíveis no Abaqus®.	61
Tabela 4.1 – Tensões principais (σ_1 e σ_2) para a membrana circular tracionada. .	64
Tabela 4.2 – Espessura da membrana circular tracionada (H).	64
Tabela 4.3 – Frequências de vibração lineares (rad/s).....	67
Tabela 4.4 - Participação dos modos usados na expansão modal dos quatro primeiros POMs na resposta não linear da membrana circular.	83
Tabela 4.5 - Participação dos modos usados na expansão modal dos quatro primeiros POMs na resposta não linear da membrana circular.	85
Tabela 4.6 - Constantes elásticas para o material da membrana.	95
Tabela 4.7 – Frequências de vibração lineares (rad/s) para a membrana circular considerando diferentes modelos constitutivos e coeficiente de tração radial.	97
Tabela 5.1 – Frequências de vibração lineares (rad/s) para a membrana circular com massa específica variável na direção radial.	103
Tabela 5.2 – Parâmetro da frequência de vibração $\bar{\omega}$ para a membrana circular com massa específica variável na direção radial.	104
Tabela 5.3 – Frequências de vibração lineares (rad/s) para a membrana circular com espessura variável na direção radial.	116
Tabela 6.1 – Frequências de vibração lineares (rad/s) da membrana anular.....	135
Tabela 6.2 - Participação dos modos usados na expansão modal dos quatro primeiros POMs na resposta não linear da membrana anular ($\delta = 1.1$; $\rho_o = 0.2 m$).	146
Tabela 6.3 – Frequências de vibração lineares (rad/s) para a membrana anular com massa específica variável na direção radial ($\rho_o = 0.20 m$).	156
Tabela 6.4 – Parâmetro da frequência de vibração $\bar{\omega}$ para a membrana anular com massa específica variável na direção radial ($\rho_o = 0.20 m$).	157
Tabela 6.5 – Frequências de vibração lineares (rad/s) para a membrana anular com raio interno $\rho_o = 0.20 m$ e espessura variável na direção radial.....	167

Tabela 7.1 – Espessura do disco rígido e carregamento aplicado.	185
Tabela 7.2 – Frequências de vibração lineares (rad/s).....	192

Lista de Símbolos

Símbolos latinos

A	determinante do tensor métrico covariante da membrana deformada
a	determinante do tensor métrico covariante da membrana indeformada
$A_{\alpha\beta}$	tensor métrico covariante da membrana axissimétrica na configuração indeformada
$a^{\alpha\beta}$	tensor métrico contravariante da membrana axissimétrica na configuração indeformada
$A_{\alpha\beta}$	tensor métrico covariante da membrana axissimétrica na configuração deformada
$A^{\alpha\beta}$	tensor métrico contravariante da membrana axissimétrica na configuração deformada
A_{mn}	amplitude modal
b_{mn}	m-ézima raiz de $M_n(R_0)$
C_1	parâmetro do material neo-Hookeano e do tipo Mooney-Rivlin
C_2	parâmetro do material do tipo Mooney-Rivlin
c	parâmetro de amortecimento
C_c	amortecimento crítico
E	módulo de elasticidade do aço
$E[\mathbf{w}(\mathbf{x}, \theta, t)]$	matriz da média invariante no tempo do campo vetorial
f	força trativa radial distribuída ao longo do bordo da membrana
g	determinante do tensor métrico na configuração indeformada
G	determinante do tensor métrico na configuração deformada
\mathbf{G}_i	vetor base na configuração deformada
\mathbf{g}_i	vetor base na configuração indeformada
g_{ij}	tensor métrico covariante na configuração indeformada
g^{ij}	tensor métrico contravariante na configuração indeformada
G_{ij}	tensor métrico covariante na configuração deformada
G^{ij}	tensor métrico contravariante na configuração deformada
h	espessura da membrana indeformada
H	espessura da membrana deformada
h_d	espessura do disco rígido
h_0	valor inicial da espessura da membrana

I_1	primeiro invariante de deformação
I_2	segundo invariante de deformação
I_3	terceiro invariante de deformação
J_n	função Bessel de primeiro tipo de ordem n
k_{mn}	k -ésima raiz de $M_m(R_o)$
L	função de Lagrange
L_{ele}	comprimento do elemento utilizado no Abaqus®
m	número de semi-ondas na direção radial
$M(t)$	momento excitador dependente do tempo
M_n	função hipergeométrica confluyente Whittaker M
n	número de ondas na direção circunferencial
$P(t)$	pressão hidrostática excitadora dependente do tempo
P_d	peso próprio do disco rígido
P_o	magnitude da excitação da força
P_e	força estática total no disco rígido
p	força estática aplicada no disco rígido
$\bar{\mathbf{R}}$	matriz de correlação espacial
\mathbf{R}	vetor posição na configuração deformada
\mathbf{r}	vetor posição na configuração indeformada
r	comprimento na direção radial da membrana deformada
Re	trabalho das forças de dissipação
R_f	raio externo tracionado
R_o	raio externo indeformado
r_o	coordenada na direção radial da membrana tracionada
S	fator escalar de tensão
t	tempo
T_i	período de tempo
T	energia cinética
U	energia elástica de deformação
u	deslocamento na direção radial
v	deslocamento na direção circunferencial
v_d	volume incluso da configuração deformada
v_i	volume incluso da configuração indeformada

$\bar{\mathbf{v}}$	matriz da variação do campo vetorial com relação ao campo médio
w	deslocamento na direção transversal
W	função de energia de deformação
We	trabalho das forças externas
W_n	função hipergeométrica confluyente Whittaker W
$\bar{\mathbf{w}}$	matriz de amostragem
x_i	coordenadas cartesianas na configuração indeformada
X_i	coordenadas cartesianas na configuração deformada
Y_n	função Bessel de segundo tipo de ordem n
z	comprimento na direção transversal da membrana deformada
z_o	coordenada na direção transversal da membrana tracionada

Símbolos gregos

α_{mn}	m -ésimo valor positivo onde $J_n(\alpha)$ é nula
α_i	parâmetro do material do tipo Ogden
β	comprimento na direção circunferencial da membrana deformada
β_o	coordenada na direção circunferencial da membrana tracionada
δ	taxa de alongamento na direção radial
ε	deformação nominal
γ_{ij}	tensor de deformações
ϕ	deslocamento angular provocado pela aplicação de $M(t)$
Γ	massa específica da membrana
Γ_d	massa específica do disco rígido
Γ_o	valor inicial da massa específica da membrana
η	valor que descreve a variação da espessura da membrana
κ	valor que descreve a variação da massa específica da membrana
$\lambda_1; \lambda_2$	extensões principais no plano da membrana
λ_3	extensão normal a superfície média
λ_m	parâmetro do material do tipo Arruda-Boyce
Λ_{mn}	m -ésima raiz da expressão $L_m(\Lambda_{mn})$
μ	parâmetro do material do tipo Arruda-Boyce
μ_i	parâmetro do material do tipo Ogden

ρ	coordenada polar na direção radial da membrana
ρ_o	raio interno da membrana
σ	tensão nominal
$\sigma_1; \sigma_2$	tensões nas direções principais
$\bar{\tau}$	período de amostragem
θ	coordenada polar na direção circunferencial da membrana
ω_{mn}	freqüências de vibração
ω_o	freqüência natural do sistema
$\bar{\omega}$	parâmetro de freqüência
Ω	freqüência da excitação do carregamento
ζ	coeficiente de amortecimento