Referências Bibliográficas

[1] ATHERINO, R.; FERNANDES, C.. **Um modelo em espaço de estado para estimação de reservas IBNR**. Revista Brasileira de Risco e Seguro, 3(5):93–110, 2007.

[2] BOOTH, P.; CHADBURN, R.; HABERMAN, S.; JAMES, D.; KHORASANEE, Z.; PLUMB, R. H. ; RICKAYZEN, B.. **Modern Actuarial Theory and Practice**. CRC Press, 2004.

[3] BORNHUETTER, R.; FERGUSON, R.. **The actuary and IBNR**. In: PROCEEDINGS OF THE CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY, número 59, p. 181–195, 1972.

[4] BROCKWELL, P. J.; DAVIS, R. A.. **Introduction to Time Series and Forecasting**. Springer, 2002.

[5] CHRISTOFIDES, S.. **Regression models based on log-incremental payments**. In: CLAIMS RESERVING MANUAL, VOL 2. Institute of Actuaries, 1990.

[6] DE JONG, P.; ZEHNWIRTH, B.. **Claims reserving, state-space models and the Kalman filter**. Journal of the Institute of Actuaries, 110:157–181, 1983.

[7] DE JONG, P.. **Forecasting general insurance liabilities**. Technical report, Macquarie University, feb 2004. Department of Actuarial Studies Research Paper Series.

[8] DE JONG, P.. **Forecasting runoff triangles**. North American Actuarial Journal, 10(2):28–38, 2006.

[9] NTZOUFRAS, I.; DELLAPORTAS, P.. **Bayesian modelling of outstanding liabilities incorporating claim count uncertainty**. North American Actuarial Journal, 6(1):113–136, 2002.

[10] DOORNIK, J. A.. **Ox 3.0: An object-oriented matrix programming language**, 2001. Timberlake Consultants LTD.

[11] DORAY, L. G.. **UMVUE of the IBNR reserve in a lognormal linear regression model**. Insurance: Mathematics and Economics, 18:43–57, 1996.

[12] DURBIN, J.; KOOPMAN, S.. **Time Series Analysis by Space State Methods**. Oxford University Press, 2001.

[13] ENGLAND, P. D.; VERRALL, R. J.. **Stochastic claims reserving in general insurance**. Journal of the Institute of Actuaries, 129:1–76, 2002.

[14] HERTIG, J.. **A statistical approach to the IBNR-reserves in marine insurance**. ASTIN Bulletin, 15:171–183, 1985.

[15] KOOPMAN, S. J.; SHEPHARD, N. ; DOORNIK, J. A.. **Statistical algorithms for models in state space using ssfpack 2.2**. Econometrics Journal, 2:113–166, 1999.

[16] KREMER, E.. **IBNR claims and the two-way model of ANOVA**. Scandinavian Actuarial Journal, 1982.

[17] MACK, T.. **Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates**. ASTIN Bulletin, 23(2):213–225, 1993.

[18] MACK, T.. **Measuring the variability of chain ladder reserve estimates**. In: CASUALTY ACTUARIAL SOCIETY SPRING FORUM, p. 101–182, 1994.

[19] MACK, T.. **Which stochastic model is underlying the chain ladder method?** Insurance: Mathematics and Economics, 15:133–138, 1994.

[20] MIGON, H.; GAMERMAN, D.. **Statistical Inference: an Integrated Approach**. A Hodder Arnold Publication, 1999.

[21] RENSHAW, A. E.. **Chain ladder and interactive modelling (claims reserving and GLIM)**. Journal of the Institute of Actuaries, 116:559–587, 1989.

[22] SCHNIEPER, R.. **Separating true ibnr and ibner claims**. ASTIN Bulletin, 21(1), 1991.

[23] SHUMWAY, R. H.; STOFFER, D. S.. **Time Series Analysis and Its Applications**. Springer, 2006.

[24] JOHNSON, R.; WICHERN, D.. **Applied Multivariate Statistical Analysis**. Prentice Hall, 2002.

[25] WRIGHT, T.. **A stochastic method for claims reserving in general insurance**. Journal of the Institute of Actuaries, 117:677–731, 1990.

[26] HARVEY, A. C.. **Forecasting, structural time series models and the Kalman filter**. Cambridge University Press, 1989.

[27] HART, D.; BUCHANAN, R. ; HOWE, B.. **The Actuarial Practice of General Insurance**. Institute of Actuaries of Australia, Level 7, Challis House, Martin Place, Sydney, NSW, Australia, 1996.

[28] TAYLOR, G.; ASHE, F.. **Second moment of estimates of outstanding claims**. Journal of Econometrics, 23:37–61, 1983.

[29] TAYLOR, G.. **Claims Reserving in Non-Life Insurance**. North-Holland, 1986.

[30] TAYLOR, G.. **Loss Reserving: an Actuarial Perspective**. Springer, 2000.

[31] TAYLOR, G.. **Loss reserving: Past, present and future**. Technical report, The University of Melbourne, 2003. Research Paper no. 109.

[32] VERRALL, R.. **A state space representation of the chain ladder linear model**. Journal of the Institute of Actuaries, 116:589–610, 1989.

[33] VERRALL, R.. **On the estimation of reserves from loglinear models**. Insurance: Mathematics and Economics, 10:75–80, 1991.

A
Provas

A.1
Prova do Lema 2

Para $p, q = x, y, z$, defina $\mu_p = \mathrm{E}(p)$ e $\Sigma_{pq} = \mathrm{Cov}(p, q)$. Supondo sem perda de generalidade que Σ_{pp} é invertível para $p = y$ e $p = z$, a expressão (3-6) é obtida da forma

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(x|y,z) &= \mu_x + \begin{bmatrix} \Sigma_{xy} & \Sigma_{xz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{yy}^{-1} & \Sigma_{yz} \\ \Sigma_{zy} & \Sigma_{zz}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y - \mu_y \\ z - \mu_z \end{pmatrix} \\ &= \mu_x + \begin{bmatrix} \Sigma_{xy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{yy}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{zz}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y - \mu_y \\ z - \mu_z \end{pmatrix} \\ &= \mu_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(y - \mu_y) \\ &= \mathrm{E}(x|y), \end{aligned}$$

sendo que as 1ª e 3ª igualdades decorrem da tradicional expressão para esperanças condicionais envolvendo distribuições Gaussianas (cf. Johnson & Wichern, 2002). A dedução da expressão (3-7) é inteiramente análoga. □

A.2
Prova do Lema 3

Seja $t \notin \mathcal{I}$ arbitrário. É suficiente ver que $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, y_s) = 0$, para todo $s \in \mathcal{I}$. Mas isto é decorrente de

$$y_s = Z_s \left\{ \left[\prod_{j=1}^{s-1} T_j \right] \alpha_1 + \sum_{j=1}^{s-2} \left[\prod_{k=j+1}^{s-1} T_k \right] R_j \eta_j + R_{s-1}\eta_{s-1} \right\} + d_s + \varepsilon_s$$

e de os vetores aleatórios ε_t, ε_s, η_j para $j = 1, \ldots, s-1$ e α_1 serem mutuamente não-correlacionados (vide pressupostos da forma em EE na subseção 3.1.1). □

A.3
Prova do Lema 4

Seja uma forma auxiliar em EE que possui a mesma equação de estado que (3-1) e cuja equação das medidas é dada por

$$y_t^* = Z_t^* \alpha_t + d_t^* + \varepsilon_t^*, \qquad \varepsilon_t^* \sim \text{NID}(0, H_t^*),$$

na qual $y_t^* = y_t$, $Z_t^* = Z_t$, $d_t^* = d_t$, $H_t^* = H_t$ se $t \in \mathcal{I}$, e $Z_t^* = 0$, $d_t^* = 0$, e $H_t^* = I$ caso contrário. Então, como y_s^* é não correlacionado com $(\tilde{\mathbf{Y}}', \alpha_t', \varepsilon_j')'$ para $s, t, j \notin \mathcal{I}$, a expressão *1* decorre do Lema 2 e do Lema 3 (correlação nula implica em independência sob normalidade), e as expressões *2* e *3* são conseqüências do Lema 2 e do Lema 1, novamente observando que $K_t = 0$ sempre que $t \notin \mathcal{I}$. □

A.4
Prova do Teorema 1

Se $t \in \mathcal{I}$, então $\text{E}(y_t|\tilde{\mathbf{Y}}) = y_t$, o que é suficiente para o primeiro caso. Suponha agora que $t, j \notin \mathcal{I}$ e veja que, pela equação das observações da forma em EE dada em (3-1),

$$\begin{aligned} \text{Cov}(y_t, y_j|\tilde{\mathbf{Y}}) = Z_t \text{Cov}(\alpha_t, \alpha_j|\tilde{\mathbf{Y}}) Z_j' + \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_j|\tilde{\mathbf{Y}}) \\ + Z_t \text{Cov}(\alpha_t, \varepsilon_j|\tilde{\mathbf{Y}}) + \text{Cov}(\varepsilon_t, \alpha_j|\tilde{\mathbf{Y}}) Z_j'. \end{aligned} \tag{A-1}$$

Pelo item *2* do Lema 4, a 3ª e a 4ª parcelas de (A-1) se anulam. Além disso, se $t = j$, segue-se, pelos itens *1* e *3* do Lema 4, que a 1ª e a 2ª parcela de (A-1) resultam em $Z_t(P_{t|t-1} - P_{t|t-1} N_{t-1}^* P_{t|t-1}) Z_t'$ e H_t, respectivamente; isso prova o segundo caso. Também, se $t < j$, então, novamente pelos itens *1* e *3* do Lema 4, a 1ª parcela é dada por $Z_t P_{t|t-1} L_t^{*\prime} L_{t+1}^{*\prime} \ldots L_{j-1}^{*\prime} Z_t'$ e a 2ª parcela se anula, provando, assim, o terceiro caso. □

A.5
Prova da Proposição 1

É suficiente mostrar que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ em todo espaço paramétrico, o que decorre, através da decomposição pelo erro de predição (cf. Harvey, 1989), de se mostrar que $\upsilon_t = \upsilon_t^\dagger$ para todo $t = 1, \ldots, n$. Implementando: fixe t arbitrário. De acordo com (3-2), segue-se, para os modelos (3-1) e (3-13) respectivamente, que

$$\upsilon_t = y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t \quad \text{e} \quad \upsilon_t^\dagger = y_t^\dagger - Z_t a_{t|t-1}^\dagger - d_t, \tag{A-2}$$

sendo a notação "†" um indicador de que o modelo adotado é o aumentado e $a^{\dagger}_{t|t-1} \equiv \mathrm{E}(\alpha_t|Y^{\dagger}_{t-1})$. Por outro lado, sob o modelo aumentado, a solução recursiva da equação das observações, para $s = 1, \dots, t-1$, é

$$y^{\dagger}_s = \begin{bmatrix} Z_s & 0 \end{bmatrix} \left\{ \left[\prod_{j=1}^{s-1} \begin{bmatrix} T_j & 0 \\ X_j & I \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{s-2} \left[\prod_{k=j+1}^{s-1} \begin{bmatrix} T_k & 0 \\ X_k & I \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} R_j \\ 0 \end{bmatrix} \eta_j + \begin{bmatrix} R_{s-1} \\ 0 \end{bmatrix} \eta_{s-1} \right\} + d_t + \varepsilon_s. \quad \text{(A-3)}$$

Como

$$\prod_{j=1}^{s-1} \begin{bmatrix} T_j & 0 \\ X_j & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \prod_{j=1}^{s-1} T_j & 0 \\ A_s & I \end{bmatrix} \quad \text{(A-4)}$$

e

$$\sum_{j=1}^{s-2} \left[\prod_{k=j+1}^{s-1} \begin{bmatrix} T_k & 0 \\ X_k & I \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} R_j \\ 0 \end{bmatrix} \eta_j = \sum_{j=1}^{s-2} \begin{bmatrix} \prod_{k=j+1}^{s-1} T_k R_j \eta_j \\ B_j \end{bmatrix}, \quad \text{(A-5)}$$

sendo que A_s é dependente das Z_j e das T_j, $j = 1, \dots, s-2$, e as B_j são dependentes de Z_k e das T_k, $k = j+1, \dots, s-2$, então, substituindo (A-4) e (A-5) apropriadamente em (A-3), obtém-se

$$y^{\dagger}_s = Z_s \left\{ \left[\prod_{j=1}^{s-1} T_j \right] \alpha_1 + \sum_{j=1}^{s-2} \left[\prod_{k=j+1}^{s-1} T_k \right] R_j \eta_j + R_{s-1} \eta_{s-1} \right\} + d_t + \varepsilon_s \ , \quad \text{(A-6)}$$

a qual coincide com a solução recursiva da equação das oservações do modelo original. Por fim, combine (A-6) a (A-2). □