3
REVISÃO DA LITERATURA E A MEDIDA ÔMEGA (Ω)

3.1
Alguns Métodos de Escolha de Carteiras

O trabalho de Markowitz (1952) foi o precursor na análise de decisão em formação de carteiras. Aquele autor utilizou a variância do retorno da carteira como medida de risco. Em seu trabalho, deseja-se obter uma carteira de risco mínimo, ou seja, de variância mínima sujeito a restrições de uso do capital e de limite mínimo de retorno na carteira.

O risco sobre o retorno pode ser tratado como uma variável aleatória, sendo que apenas o segundo momento da distribuição de probabilidades do retorno, expresso através da variância (e do desvio padrão), é o indicador que define maior ou menor exposição ao risco ao qual o ativo está exposto.

Adicionalmente ao trabalho desenvolvido por Markowitz, surgiram outras medidas e índices de desempenho utilizados para escolher carteiras. Os resultados formalizados pelos tradicionais trabalhos de Treynor (1965), Sharpe (1966) e Jensen (1968) contribuíram com alguns índices amplamente conhecidos e aceitos no mercado.

Todos estes estudos, entretanto, têm em comum duas características, quais sejam (a) a aceitação de que os dados estudados conformam-se às características de distribuições normais, e (b) utilizam dados históricos para a derivação de dados de performance.

A partir destes, a literatura cita inúmeros trabalhos que abordaram a análise de risco, enriquecendo de sobremaneira as alternativas para a mensuração de resultados, embora de forma geral aceitando a hipótese subjacente de normalidade, ainda que sempre com a preocupação presente de avaliar que tipo de problemas e distorções uma tal abordagem poderia gerar.

O índice de Sharpe (IS), por exemplo, avalia o desempenho de uma carteira levando-se em conta a divisão entre o retorno esperado e o desvio padrão do retorno da carteira. Isto é perfeitamente aceitável quando se pode determinar perfeitamente o desvio padrão envolvido, mas pode não ser tão apropriado em um caso no qual o desvio padrão, por estar associado a uma distribuição não normal de resultados, não a descreva completamente.

Por outro lado, estes trabalhos também se valem do histórico da performance das carteiras para comparar sua performance em relação ao comportamento passado, o que não seria possível no caso de se tentar avaliar e comparar alternativas de resultados futuros previstos (simulados).

Na evolução dos critérios de escolha de carteiras e controle de risco, surgiu o *Value at Risk* (VaR), forma de quantificação desenvolvida pelo banco JP Morgan (1996). Esta é uma forma sistemática resultante do esforço de determinar, a cada período, qual o valor provável da perda, dado determinado nível de significância estatística. Maiores detalhes e considerações sobre a sobre esta medida de risco serão feitas na próxima seção.

Uma outra medida de risco também existente é a conhecida como Perda Média Esperada (*Expected Shortfall - ES*) ou *Conditional Value-at-Risk (CVaR)* , que decorre de uma crítica relacionada ao VaR, na medida em que este indica apenas uma probabilidade de perda acima de um limite, <u>mas não de que tamanho pode ser esta perda</u> uma vez incorrida (Rockafellar e, Uryasev, 2000), enquanto o ES fornece informações sobre a cauda da distribuição esperada de resultados.

Acerbi e Tasche (2001) claramente apontam que o uso do VaR como medida de risco pode levar a resultados e erros paradoxais, uma vez que esta medida não atende às características aceitas de uma medida de risco coerente.

Além disso, no trabalho mencionado acima, fica bastante claro a que tipo de erro o uso de uma restrição de risco na forma de VaR pode levar, através da apresentação de exemplos didáticos. Uma medida que baseia-se em hipóteses de normalidade pode levar a situações bastante distorcidas na otimização de ativos, e recomenda-se que ao menos as potencialidades de erro e suas origens sejam conhecidas.

Entretanto, devido a sua grande simplicidade conceitual, facilidade de cálculo e rápida aplicabilidade, o VaR tornou-se a medida de risco financeiro padrão, de fato, e aceita de forma geral (Yamai e Yoshiba, 2002).

3.2
A Medida VaR

Como já indicado anteriormente, o VaR é uma medida de risco largamente utilizada pelo mercado financeiro, tendo sida introduzida pelo banco JP Morgan em 1966, e que a despeito de inúmeras críticas (Artzner et al, 1997), a seu respeito é, de fato, o padrão de medida de risco utilizado.

Esta medida é uma estimativa da máxima perda potencial que um agente financeiro estaria disposto a perder, dado um determinado nível de confiança e um período admitido para avaliação.

Exemplificando-se, o $VaR_{95\%}$ traduziria que no próximo período, por exemplo, de uma semana, a perda prevista pela distribuição esperada de resultados das operações em questão, a um nível de confiança de 95%, seria de um valor *v*. Assim, uma instituição pode balizar suas ações e operações através do máximo valor em risco admitido pela política definida pela direção da empresa, forçando o seu VaR a ser inferior (ou igual) aquele valor (Marzano, 2004).

Em outras palavras, o VaR traduziria a perda máxima possível para as determinadas operações, dado um horizonte temporal e um certo nível de confiança.

No caso em questão, poderíamos usar a definição estrita de que, sendo $z = f(r,s)$ o resultado[1] obtido com uma operação de sazonalização

[1] Define-se valor ao risco como o negativo do resultado

da entrega da energia assegurada, cujo valor é função de uma coleção *r* de resultados de faturamento, e *s* um vetor de distribuição de entrega de energia sazonalizada a cada mês, o VaR será o valor de z do percentil definido como referência, para aquela distribuição de resultados.

Assim, para uma determinada distribuição de resultados, o valor *z* = *f(r,s)* é uma variável com distribuição de probabilidades bem definida no conjunto de números reais, determinada pelos valores de entrega de energia e sujeito à probabilidade de cada resultados *p(r)*, determinados pelos preços de liquidação simulados (*PLDs*).

Sendo (1-*β*) a probabilidade de um resultado de faturamento exceder determinado valor *v*, temos:

$$prob(r \geq v) = \int_{r \geq v} p(v)\,dv = 1 - \beta \qquad (1)$$

o que significa o mesmo que dizer que a probabilidade do valor ao risco *v* ser dado por *β* é de:

$$prob(r \leq v) = \int_{r \leq v} p(v)\,dv = \beta \qquad (2)$$

Assim, o valor *v* representa o VaR da sazonalização específica, a um nível de confiança β%. Este valor determina um resultado mínimo que só é batido em *(1-β)%* dos casos (observe que os PLDs são constantes, uma vez que são obtidos através de uma única coleção de simulações para todos os casos sazonalizados).

Em outras palavras, o VaR a um nível de confiança de 95% está associado a um resultado de faturamento mínimo *v*, cuja probabilidade de ocorrência é de 5%, dado aquele vetor de distribuição de entrega de energia de sazonalizada, ou seja, em 95% dos casos teremos valores de faturamento superiores a *v*.

3.3
A Medida Ômega

Muitas dificuldades são encontradas no momento de definir uma adequada medida de desempenho de um ativo ou de uma carteira. A maioria dos indicadores considera duas importantes simplificações: a média e a variância descrevem completamente a distribuição de retornos.

Estas simplificações são válidas se é assumida uma distribuição normal dos retornos ou valores; entretanto, é geralmente aceito o fato empírico de que os retornos dos investimentos não possuem uma distribuição normal. Assim, além da média e da variância, momentos de ordem superior seriam necessários para descrever melhor a distribuição.

A medida Ômega (Ω), apresentada por Keating e Shadwick (2002), consegue incorporar todos os momentos da distribuição. Ela fornece uma completa descrição das características do risco-retorno, resultando em uma medida intuitivamente atrativa e explicativa, facilmente calculada. Ao invés de estimar alguns momentos individuais, a medida Ω considera o impacto total da distribuição, o qual é certamente de interesse dos tomadores de decisão.

A medida Ω, por definição, leva em conta um nível de retorno ou valor chamado de "limite" (L), definido exogenamente, o qual é a fronteira entre o que se considera como ganho e como perda. Mesmo em distribuições normais, dependendo do valor do L, a medida Ω fornece informações adicionais que só a média e variância não conseguiriam. Isto levaria a obter diferentes resultados em otimização de carteiras, se comparado com a otimização clássica de Markowitz.

Cabe destacar que a definição de um limite (L), também interpretado como uma meta, possui uma alta aderência à realidade das empresas e do mercado financeiro. Empresas e investidores estão habituados a definirem metas, abaixo das quais se considera perda e acima das quais se considera ganho.

A utilização da medida Ω é recente, tendo grande potencial de desenvolvimento e novas aplicações. Alguns trabalhos que já empregaram este índice de performance podem ser citados, tendo o uso da medida trazido a contribuição da demonstração de que a função ômega Ω(L) pode ser escrita como uma divisão de dois valores esperados (Kazemi, Schneeweis e Gupta, 2003). Uma proposta para otimizar uma carteira de ações utilizando a medida Ω é feita em Ick e Nowak (2006) e, por fim, a otimização da medida Ω é utilizada na escolha de carteiras de projetos com opções reais Castro (2008). Neste último caso, a metodologia desenvolvida é aplicada a projetos do setor petrolífero brasileiro.

3.4
Definição e Cálculo da Medida Ômega

Conforme mencionado acima, a medida Ômega (Ω) tem por finalidade capturar a informação contida em toda a distribuição de retornos esperada e, desta forma, necessita de uma informação sobre a qualidade requerida destes retornos. Assim, um limite L deve ser definido exogenamente, de acordo com as preferências características do indivíduo ou entidade em pauta, assim como do tipo de investimento.

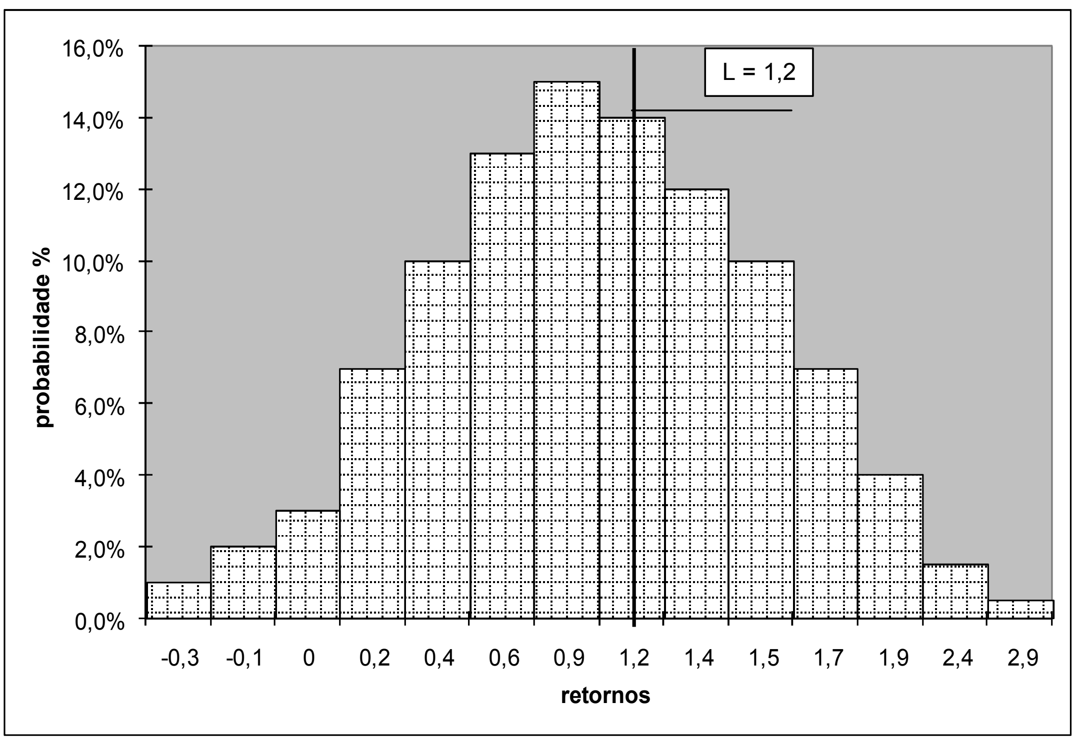

Figura 1 – Distribuição de Exemplo de Retornos e limite L = 1,2

A distribuição apresentada na Figura 1 servirá de exemplo para melhor caracterizar a forma de cálculo da medida ômega para um determinado caso, conforme será mostrado.

Esta distribuição servirá para ilustrar o conceito desta métrica e a forma de calcular o valor da função Ω para um determinado limite L, dada uma distribuição de retornos esperada para um ativo, seja ele um ativo único ou uma carteira ou coleção deles.

Tabela 1 – Exemplo de Distribuição de Resultados

Valor	-0,3	-0,1	0,0	0,2	0,4	0,6	0,9	1,2	1,4	1,5	1,7	1,9	2,4	2,9
prob (%)	1	2	3	7	10	13	15	14	12	10	7	4	1,5	0,5
prob cum (%)	1	3	6	13	23	36	51	65	77	87	94	98	99,5	100

De acordo com sua definição, o cálculo de Ômega para uma certa distribuição de freqüência e dado um limite dos retornos requeridos L,

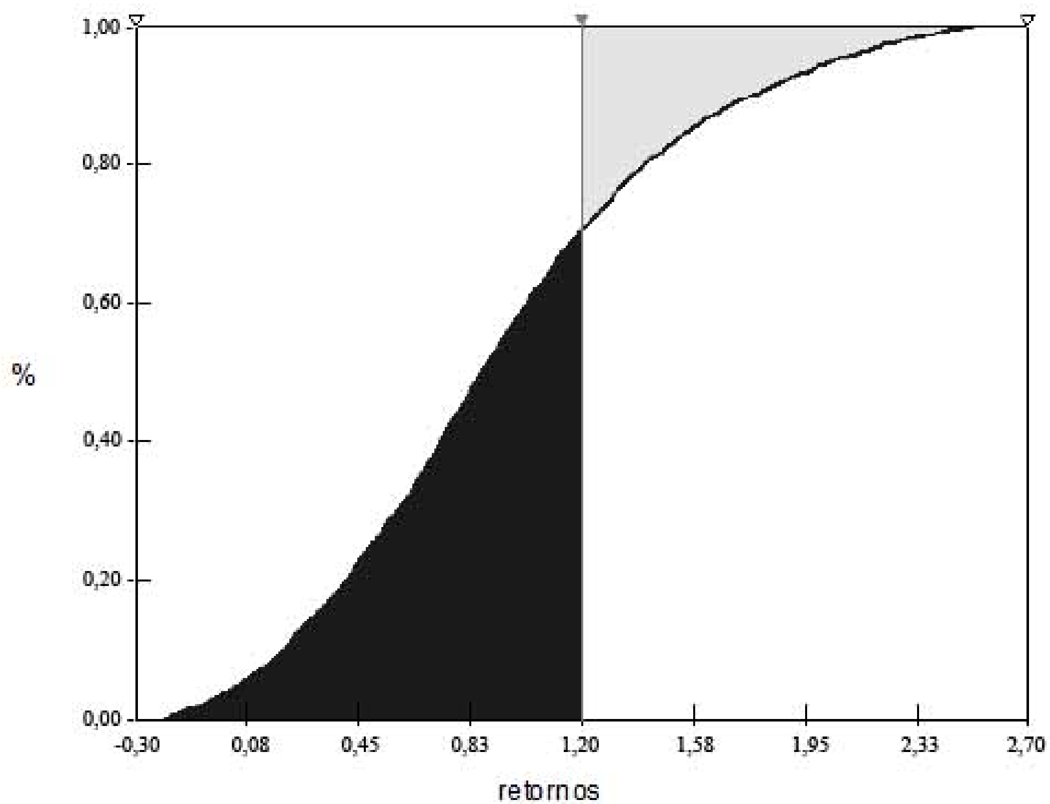

Figura 2 – Ilustração da Definição de Ômega Ω (L) o valor de Ω(L) é dado exatamente pela equação (3), com *F(x)* sendo a função de distribuição cumulativa (FDC) dos retornos *"x"*:

$$\Omega(L) = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\int_{L}^{+\infty} [1 - F(x)] dx}{\int_{-\infty}^{L} F(x) dx} \qquad (3)$$

Esta situação apresenta-se conforme mostrado na Figura 2, e o valor de Ω é resultado da divisão da área superior pela inferior do gráfico, sempre em relação ao limite especificado L.

No caso de uma distribuição discreta de resultados, é necessário que se faça uma integração numérica dos valores, de forma a se obter os dados para o cálculo de Ω(L) conforme definido.

Para a distribuição de exemplo, mostrada na Tabela 1, o cálculo pode ser feito utilizando-se todos os valores disponíveis no intervalo, conforme ilustrado na Figura 3.

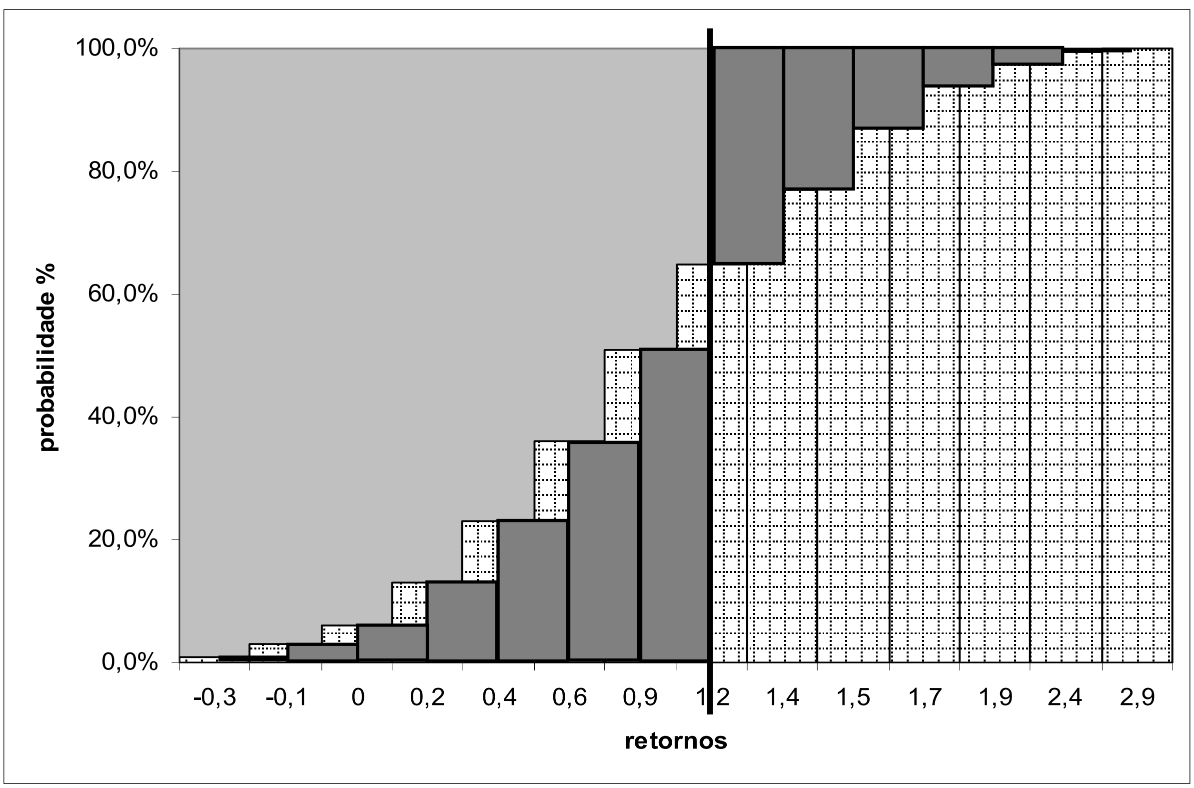

Figura 3 – Ilustração das Parcelas Ganho e Perda (todos os valores)

A função Ω(L), assim definida e exemplificadamente calculada como sendo 0,41 de acordo com a Tabela 2, engloba todas as características da distribuição de retornos, pois considera toda a função de distribuição destes, incorporando todos os efeitos dos momentos de ordem superior que porventura possam ser relevantes. Mais detalhes sobre a definição e as propriedades da medida Ω podem ser encontrados em Keating, C.; Schadwick, W.; (2002), bem como Cascon, A.; Keating, C.; Shadwick, W.; (2003).

Tabela 2 – Marcha de Cálculo dos Ganhos e Perdas Ponderadas para a Distribuição de Retornos do Exemplo e dado um Limite L =1,2

R<L	ς_i	*F(r)*	$\varsigma_i * F(r_i)$	*R≥L*	γ_i	$F(r_i)$	$1-F(r_i)$	$\gamma_i*(1-F(r_i))$
-0,3	0,200	1,0%	0,002					
-0,1	0,100	3,0%	0,003					
0	0,200	6,0%	0,012					
0,2	0,200	13,0%	0,026					
0,4	0,200	23,0%	0,046					
0,6	0,300	36,0%	0,108					
0,9	0,300	51,0%	0,153					
1,2				1,2	0,2	65,00%	35,00%	0,070
				1,4	0,1	77,00%	23,00%	0,023
				1,5	0,2	87,00%	13,00%	0,026
				1,7	0,2	94,00%	6,00%	0,012
				1,9	0,5	98,00%	2,00%	0,010
				2,4	0,5	99,50%	0,50%	0,003
				2,9				
Perda ponderada = Σ $\varsigma_i * F(r_i)$			**0,350**		**Ganho ponderado = Σ $\gamma_i*(1-F(r_i))$**			**0,144**

Ω = 0,144 / 0,350 = 0,410

3.5 Visão alternativa da Medida Ômega

De acordo com Kazemi, H.; Schneeweis, T.; Gupta, 2003, a função Ômega é essencialmente igual ao resultado da divisão dos valores esperados de ganhos pelo das perdas:

$$\Omega(L) = \frac{EC(L)}{ES(L)} \tag{4}$$

onde o numerador EC(L) é o valor esperado dos ganhos condicionados a resultados positivos, também conhecido como Expected Chance (EC), ou

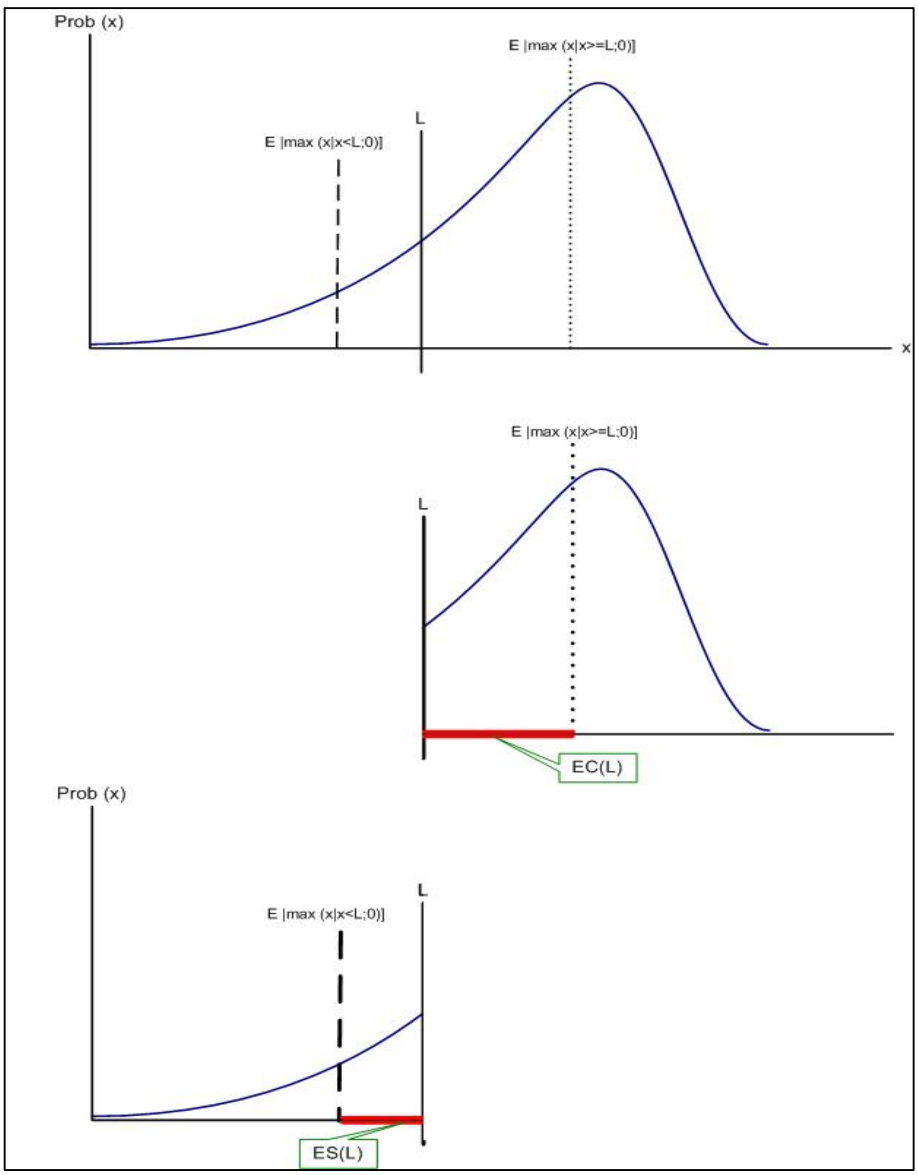

Figura 4 – Numerador EC(L) e Denominador ES(L) para a derivação de Ω seja, exatamente o preço de uma opção de compra, e o denominador *ES(L)* é o valor esperado das perdas condicionadas a resultados negativos, também conhecido como *Expected Shortfall (ES)*, ou seja, exatamente o preço de uma opção de venda.

Graficamente, esta situação pode ser visualizada como na **Error! Reference source not found.**, onde se tem mostrada a situação completa da curva de resultados e posteriormente subdividida com foco nas perdas e nos ganhos, a cada lado do limite imposto L.

A tradução da idéia que motiva esta visão alternativa da função Ômega reside nas seguintes questões:

- o que se espera ganhar, caso se ganhe (*what is the expected return given no losses*)?
- o que se espera perder, caso se perca (*what is the expected return given losses*)?

A razão entre os valores das respostas às questões acima, uma vez definido o limite entre perdas e ganhos (L), é exatamente o valor Ω(L). Estes também são os valores que satisfazem a definição de preços de opções de compra e de venda, dadas as restrições de limite mínimo aceitável de ganhos (L), uma vez que será este o valor monitorado como limite da compra/venda do ativo. A seguinte equação prevalece:

$$\Omega(L)=\frac{\int_{L}^{+\infty}[1-F(x)]dx}{\int_{-\infty}^{L}F(x)dx}=\frac{\int_{L}^{+\infty}(x-L)f(x)dx}{\int_{-\infty}^{L}(L-x)f(x)dx}=\frac{E[\max(x-L,0)]}{E[\max(L-x,0)]}=\frac{EC(L)}{ES(L)} \qquad (5)$$

A completa derivação das equações acima pode ser vista em Kazemi, H.; Schneeweis, T.; Gupta, 2003, com a resolução analítica da Equação (5). Quando esta equação é aplicada à distribuição de exemplo apresentada na Tabela 1, sua resolução numérica pode ser vista na Tabela 3, abaixo.

Especificamente no caso do exemplo adotado, a diferença dos valores que é observada nos resultados do valor de Ω(L) é extremamente pequena, e devida ao pequeno número de pontos usados na integração numérica dos exemplos, com suas conseqüentes distorções geométricas, mas ainda assim menor do que 1%. Como esperado, a menos de precisão numérica, o resultado dos cálculos é essencialmente o mesmo.

Pelo mesmo raciocínio, o resultado particular para as distribuições equiprováveis mostrado na Equação (8) (item 3.6 adiante) também se sustenta nesse caso, simplificando a determinação de ômega e tornando esta medida bastante atrativa.

Tabela 3 – Marcha de Cálculo do Valor da Medida Ômega (Ω) de acordo com a Equação (3) e um Limite L =1,2 para os Dados da Distribuição Exemplar

R	*f(r)*	*F(r)*	*max(r-L,0)*	*max(L-r,0)*	*f(r) * max(r-L,0)*	*f(r) * max(L-r,0)*
-0,3	1,0%	1,0%		1,50		0,015
-0,1	2,0%	3,0%		1,30		0,026
0	3,0%	6,0%		1,20		0,036
0,2	7,0%	13,0%		1,00		0,070
0,4	10,0%	23,0%		0,80		0,080
0,6	13,0%	36,0%		0,60		0,078
0,9	15,0%	51,0%		0,30		0,045
1,2	14,0%	65,0%				
1,4	12,0%	77,0%	0,20		0,024	
1,5	10,0%	87,0%	0,30		0,030	
1,7	7,0%	94,0%	0,50		0,035	
1,9	4,0%	98,0%	0,70		0,028	
2,4	1,5%	99,5%	1,20		0,018	
2,9	0,5%	100,0%	1,70		0,009	
			$E[\max(r-L,0)]$		**0,144**	
				$E[\max(L-r,0)]$		**0,350**
			Ω(1,2) = 0,144 / 0,350 = 0,413			

3.6 Simplificação para Retornos Equiprováveis

A grande simplificação, que torna tão atraente o uso da medida ômega na comparação das situações referentes ao problema descrito nessa dissertação, é apresentada a seguir.

No caso de uma distribuição de retornos calculada através de algum tipo de simulação de um modelo ajustado para a previsão do comportamento de algum tipo de ativo, caso em que todos os retornos gerados terão exatamente a mesma probabilidade, uma grande simplificação pode ser feita no cálculo da função Ômega.

Assim, em sendo os resultados provenientes de modelos que são simulados numericamente, a simplificação bastante útil vem da constatação de que esses valores têm exatamente a mesma probabilidade, isto é, são equiprováveis. O raciocínio por trás desta simplificação é demonstrado a seguir:

$$\Omega = \frac{\sum_{i=L}^{b} val_i^+ \times prob_i^+}{\sum_{j=a}^{L} val_j^- \times prob_j^-} \qquad (6)$$

onde $val_i^+ = r_i - L, \forall r_i > L$

$$val_j^- = L - r_j, \forall r_j < L$$

mas se os resultados são equiprováveis (e neste caso são!), temos

$$prob_i = \frac{1}{n}, \forall i \qquad (7)$$

onde n é o número de resultados (simulações) disponíveis

Substituindo (7) em (6) e fazendo as simplificações possíveis, temos que a equação (8) vale,

$$\Omega = \frac{\sum_{i=L}^{b} val_i^+}{\sum_{j=a}^{L} val_j^-} \qquad (8)$$

ou seja, simplesmente a soma dos ganhos dividida pela soma das perdas (considerando-se em relação ao limite definido L), o que torna o uso desta medida extremamente prático e de fácil cálculo, além dela ser bastante intuitiva e completa.