5
A demonstração original

Nesse capítulo nós apresentamos a demonstração original do Teorema **A**, que afirma que a versão de Paris e Harrington para o Teorema de Ramsey, embora seja um teorema em ZF, não pode ser demonstrada em Aritmética de Peano.

Em linhas gerais, a demonstração do Teorema **A** consiste em mostrar que, em PA, a Afirmação **A** implica na consistência de PA e, portanto, contradiz o Segundo Teorema de Incompletude de Gödel (Teo. 3).

Uma passagem intermediária dessa demonstração envolve a construção de uma teoria T, expressa na linguagem de PA acrescentada de infinitas constantes c_i, $i \in \mathbb{N}$. Identificaremos conjuntos finitos com listas finitas em ordem crescente; listas serão indicadas por letras em negrito. Escrevemos $i < \boldsymbol{k}$ (resp. $\boldsymbol{k} < i$) para dizer que $i < k_1 < \cdots < k_r$ (resp. $k_1 < \cdots < k_r < i$) onde r é o tamanho da lista $\boldsymbol{k}$. Para cada subconjunto finito $\boldsymbol{i} = i_1, \ldots, i_r$ de $\mathbb{N}$, seja $c(\boldsymbol{i})$ a lista de constantes $c_{i_1}, \ldots, c_{i_r}$.

Definição 22. Os axiomas da teoria T são os seguintes:

(i) As equações recursivas usuais que definem $+$, $\cdot$, $<$, mais os axiomas de indução, restritos às fórmulas limitadas.

(ii) Para cada natural i temos o axioma $(c_i)^2 < c_{i+1}$.

(iii) Sejam $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k'}$ listas de naturais e seja $\boldsymbol{z}$ uma lista de variáveis, todas de um mesmo tamanho r. Para cada $i < \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k'}$ e cada fórmula limitada $\psi(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ temos o axioma:

$$\forall \boldsymbol{y} < c_i, [\psi(\boldsymbol{y}; c(\boldsymbol{k})) \leftrightarrow \psi(\boldsymbol{y}; c(\boldsymbol{k'}))].$$

Proposição 23. $Con_{\mathbf{T}} \implies Con_{\mathbf{PA}}$.

Dado um modelo $\mathfrak{A}$ de T devemos construir um modelo $\mathfrak{I}$ de PA. Seja $\mathfrak{A} \models T$ e seja $I = \{a \in \mathfrak{A} : \exists i \in \mathbb{N}, a < c_i\}$ um segmento inicial de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{I} = \langle I, +, \cdot, < \rangle$. A proposição 23 estará demonstrada ao provarmos que $\mathfrak{I}$ é um modelo de PA.

Para toda fórmula $\theta(\boldsymbol{y})$ de PA, defina uma fórmula limitada $\theta^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ da seguinte maneira. Escreva θ na forma normal prenex, digamos $\exists\, x_1 \ldots \forall x_r\, \varphi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$, onde φ é livre de quantificadores. Então $\theta^*(\boldsymbol{y}, z_1, \ldots, z_r)$ é a fórmula $\exists\, x_1 < z_1 \ldots \forall x_r < z_r\, \varphi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$.

Lema 24. *Dados $i < \boldsymbol{k}, \boldsymbol{a} < c_i$, e $\theta(\boldsymbol{y})$, onde $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{y}$ todos tem o comprimento apropriado,*

$$\mathfrak{I} \vDash \theta(\boldsymbol{a}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \theta^*(\boldsymbol{a}; c(\boldsymbol{k})).$$

Prova do Lema: Demonstraremos o Lema 24 por indução na fórmula θ. Suponha que $\theta(\boldsymbol{y})$ seja da forma $\exists\, x\, \psi(x, \boldsymbol{y})$ (os outros casos são análogos). Logo $\theta^*(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ é $\exists\, x < z_1\, \psi^*(x, \boldsymbol{y}; z_2, \ldots, z_r)$. Repare que, por definição, $\mathfrak{I} \vDash \theta(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \exists b \in \mathfrak{I};\ \mathfrak{I} \vDash \psi(b, \mathbf{a})$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{I} \vDash \psi(b, \mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi^*(b, \mathbf{a}; c(\mathbf{j}))$ para algum $\boldsymbol{j}$ (onde $\min \boldsymbol{j}$ é suficientemente grande) e, isto ocorre se, e somente se, para algum $\boldsymbol{k'}$ (novamente, onde $\min \boldsymbol{k'}$ é suficientemente grande) $\mathfrak{A} \vDash \theta^*(\boldsymbol{a}; c(\boldsymbol{k'}))$ que, por 22(iii), é o caso se, e somente se, $\mathfrak{A} \vDash \theta^*(\boldsymbol{a}; c(\boldsymbol{k}))$. □

Lema 25. *$\mathfrak{I}$ é um modelo de PA.*

Prova do Lema: Segue da estimativa $(c_i)^2 < c_{i+1}$ que I é fechado pela soma e pelo produto. Isso posto, o Lema 25 se reduz a uma conseqüência imediata do Lema 24 uma vez que 22(i) garante que para toda θ, $\mathfrak{A}$ satisfaz indução para θ^*. □

Nosso resultado principal será o seguinte:

Proposição 26. *A Afirmação $\boldsymbol{A}$ implica em $Con_{\mathbf{T}}$.*

Fica claro, pelas Proposições 23 e 26, que

$$[\forall e, r, k \in \mathbb{N}, \exists M, M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r] \underset{\text{Prop. 26}}{\Longrightarrow} Con_{\mathbf{T}} \underset{\text{Prop. 23}}{\Longrightarrow} Con_{\mathbf{PA}}$$

e segue, pelo Segundo Teorema de Incompletude de Gödel (3), que a Afirmação **A** não pode ser demonstrada em Aritmética de Peano.

Precisamos agora demonstrar em PA a Proposição 26 e faremos isso associando, para cada sequência $\boldsymbol{y}$ quantificada no axioma (iii) de $\mathbf{T}$, uma partição P_ξ construida de forma que a condição de indiscernibilidade para um dado $\boldsymbol{y}$ seja equivalente à existência de um conjunto homogêneo para a P_ξ associada. Os resultados sobre partições que demonstraremos a seguir irão nos permitir construir adequadamente essas P_ξ.

Lema 27. *Dadas partições P_0 e P_1 de $[M]^e$ em r_0 e r_1 pedaços, existe uma partição P de $[M]^e$ em $r_0 \cdot r_1$ pedaços tal que para $H \subseteq M$, H é homogêneo para P se, e somente se, H é homogêneo para ambos P_0 e P_1.*

Prova do Lema: Basta considerar $P(\boldsymbol{a}) = \langle P_0(\boldsymbol{a}), P_1(\boldsymbol{a})\rangle$. $\square$

Lema 28. *Um conjunto $H \subseteq M$ é homogêneo para uma partição P de $[M]^e$ se, e somente se todo subconjunto de H com cardinalidade $e+1$ é homogêneo para P.*

Prova do Lema: Uma das implicações é trivial. Para a outra, suponha que H não seja homogêneo e tome $\boldsymbol{a}, \tilde{\boldsymbol{a}} \in [H]^e$ com $P(\boldsymbol{a}) \neq P(\tilde{\boldsymbol{a}})$. Troque os elementos de $\boldsymbol{a}$ pelos de $\tilde{\boldsymbol{a}}$ um a um para obter uma sequência de conjuntos $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_\ell = \tilde{\boldsymbol{a}}$ tais que $\boldsymbol{a}_i$ e $\boldsymbol{a}_{i+1}$ diferem por um único elemento. Tome i tal que $P(\boldsymbol{a}_i) \neq P(\boldsymbol{a}_{i+1})$. O conjunto $\boldsymbol{a}_i \cup \boldsymbol{a}_{i+1}$ tem $e+1$ elementos e não é homogêneo. $\square$

Notação 29. Seja $\sqrt{r} = \lceil \sqrt{r}\,\rceil$, onde $\lceil x \rceil$ é o menor natural s tal que $s \geq x$.

Observe que, dado um r natural, temos que $\max(r, 7) \geq (1 + 2\sqrt{r})$.

Dada $P : [M]^e \to r$ definimos $P' : [M]^{e+1} \to (1 + 2\sqrt{r})$. Seja $s = \sqrt{r}$. Defina funções Q e R (associadas, respectivamente, a quociente e resto) ambas indo de $[M]^e$ para s de acordo com a equação $P(\boldsymbol{a}) = s \cdot Q(\boldsymbol{a}) + R(\boldsymbol{a})$. Note que $\boldsymbol{b}$ é homogêneo para P se e somente se for homogêneo para Q e para R. Para todo $\boldsymbol{b} = b_1, \dots, b_e, b_{e+1}$ em $[M]^{e+1}$, defina $\boldsymbol{b}' = b_1, \dots, b_e$. Definimos P' por:

$$P'(\boldsymbol{b}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \boldsymbol{b} \text{ for homogêneo para } Q \text{ e } R, \\ \langle 0, R(\boldsymbol{b}')\rangle, & \text{se } \boldsymbol{b} \text{ for homogêneo para } Q \text{ mas não para } R, \\ \langle 1, Q(\boldsymbol{b}')\rangle, & \text{se } \boldsymbol{b} \text{ não for homogêneo para } Q. \end{cases}$$

Lema 30. *Para todo $H \subseteq M$ de cardinalidade maior que $e+1$, H é homogêneo para P se, e somente se, H é homogêneo para P'.*

Prova do Lema: Seja H de cardinalidade maior do que $e+1$. Se H for homogêneo para P então claramente, para todo $\boldsymbol{b} \in [H]^{e+1}$, $\boldsymbol{b}$ é homogêneo para P donde $P'(\boldsymbol{b}) = 0$. Assim H é homogêneo para P'.

Suponha agora H homogêneo para P'. Se $P'(\boldsymbol{b}) = 0$ para todo $\boldsymbol{b} \in [H]^{e+1}$ então P é homogêneo em $\boldsymbol{b}$ para todo $\boldsymbol{b} \in [H]^{e+1}$ e, pelo Lema 28, P é homogêneo em H. Os outros casos levam ao absurdo. Suponha, por exemplo, que $P'(\boldsymbol{b}) = \langle 0, i\rangle$ para todo $\boldsymbol{b} \in [H]^{e+1}$. Sejam $a_1 < a_2 < \dots < a_e < a_{e+1} < a_{e+2}$ elementos de H e seja $\boldsymbol{b} = \{a_1, a_2, \dots, a_e, a_{e+1}\}$. Por definição de P', $R(\{a_1, a_2, \dots, a_e\}) = i$ e R não é homogêneo em $\boldsymbol{b}$. Existe portanto $j \in \{1, 2, \dots e\}$ tal que $R(\boldsymbol{b} \smallsetminus \{a_j\}) = R(\{a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_e, a_{e+1}\}) \neq i$.

Seja $\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} \cup \{a_{e+2}\} \setminus \{a_j\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_e, a_{e+1}, a_{e+2}\}$. Temos $(\tilde{\boldsymbol{b}})' = \boldsymbol{b} \setminus \{a_j\}$ o que contradiz $P'(\tilde{\boldsymbol{b}}) = \langle 0, i\rangle$. O caso $P'(\boldsymbol{b}) = \langle 1, i\rangle$ é análogo trocando R por Q. □

Lema 31. *Considere, para todo $i < n$, partições $P_i : [M]^{e_i} \to r_i$. Seja $e = \max_i(e_i)$ e $r = \prod_i \max(r_i, 7)$. Existe uma partição $P : [M]^e \to r$ tal que para todo $H \subseteq M$ de cardinalidade maior que e, H é homogêneo para P se, e somente se, H é homogêneo para todas P_i.*

Prova do Lema: Basta combinar os resultados dos Lemas anteriores e da observação 29. □

Prosseguimos agora enunciando uma proposição que é construída para implicar na consistência da teoria T. Os itens 32(ii) e 32(iii) correspondem às partes equivalentes de 22. Se mostramos que a versão Paris-Harrington para o Teorema de Ramsey implica na Proposição 32, teremos

$$[\forall e, r, k \in \mathbb{N}, \exists M, M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r] \underset{\text{Lema 35}}{\Longrightarrow} \text{Proposição 32} \underset{\text{Lema 36}}{\Longrightarrow} Con_{\mathbf{T}},$$

e o Teorema 26 estará demonstrado tão logo os Lemas 35 e 36 se encontrem enunciados e demonstrados.

Proposição 32. *Para todo e, k, r existe um M tal que para toda família $\langle P_\xi\, ; \xi < 2^M\rangle$ de partições $P_\xi : [M]^e \to r$, existe um X, $\mathrm{card}(X) \geq k$ tal que:*

(ii) Se $a, b \in X$ e $a < b$, então $a^2 < b$.

(iii) Se $a \in X$ e $\xi < 2^a$, então $X \setminus \{0, 1, \ldots, a\}$ é homogêneo para P_ξ.

Para demonstrar em PA que a Proposição 32 é conseqüência da Afirmação **A** será necessário encontrar uma maneira de obter conjuntos homogêneos que cresçam rapidamente.

Escreva $\exp_2(n) = 2^n$. Seja $\beth : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $\beth_n = \exp_2^n(1)$ ou, equivalentemente, $\beth_0 = 1$ e $\beth_{n+1} = 2^{\beth_n}$. Observe que, para todo natural n, $\beth_n \geq 2^n$.

Lema 33. *Dado M suficientemente grande, existem r e uma partição $R : [M]^2 \to r$ tais que para todo $X \subseteq M$, se X é R-homogêneo e $\mathrm{card}(X) > \max(2, \min X)$, então para todo $x, y \in X$, $x < y$ implica que $\beth_x < y$.*

Prova do Lema: Seja $Q : [M]^1 \to 4$ definida por $Q(a) = \min(a, 3)$. Dado X não unitário homogêneo para partição Q, é fácil ver X será homogêneo de cor 3 para Q e, portanto $\min X \geq 3$.

Seja $P_0 : [M]^2 \to 2$ definida por

$$P_0(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2+x<y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_C\}$, $\mathrm{card}(X) = C > \max(2, \min X)$. Caso X seja Q-homogêneo, temos que $P_0(a_1, a_C) = 1$, pois $\mathrm{card}X > \min X \geq 3$. Assim, se X é P_0-homogêneo, terá que ser homogêneo de cor 1. Observe que, neste caso, para todo $n < C$, $a_{n+1} > 2 + a_n$ e, portanto, $a_C > 2(c-1) + a_1 > 2a_1$.

Agora, tome $P_1 : [M]^2 \to 2$ definida por

$$P_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2x<y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que, se X é homogêneo para ambas Q e P_0, temos $P_1(a_1, a_C) = 1$. Para todo $n < C$ temos que X P_1-homogêneo implica em $a_{n+1} > 2a_n$ e, portanto, $a_C > 2^{c-1}a_0 > 2^{a_0}$.

Seja $P_2 : [M]^2 \to 2$ definida por

$$P_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2^x<y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

De modo análogo, se for homogêneo para as partiçoes Q, P_0, P_1 e P_2, X será homogêneo de cor 1 para P_2 e teremos $a_{n+1} > 2^{a_n}$. observe que $a_C > \exp_2^{C-1}(a_1) > \exp_2^{C-1}(2) = \beth_C > \beth_{a_1}$.

Concluimos o argumento definindo $P_3 : [M]^2 \to 2$ como

$$P_3(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \beth_x<y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Basta agora utilizar o Lema 31 para combinar Q, P_0, P_1, P_2 e P_3 em uma só partição, obtendo assim a R desejada. □

Vale observar que a demonstração do Lema 33 nos permite facilmente estender o resultado para funções que cresçam ainda mais rápido que $\beth_x$, iterando a função da partição P_k para construir a partição P_{k+1}.

Antes de enunciar o Lema 35, vamos precisar demonstrar o Lema que segue:

Lema 34. *Sejam $P : [M]^e \to s$, $e \geq 2$ e m dados. Existe uma $P^* : [M]^e \to s'$, onde s' depende apenas de e, m e s, tal que se existe $Y \subseteq M$ homogêneo para P^* com $\mathrm{card}(Y) > \max(e, \min Y)$, então existe um $X \subseteq M$ tal que X é homogêneo para P, $\mathrm{card}(X) \geq \max(e+1, \beth_{\min X})$.*

Prova do Lema: Seja $h(a)$ o maior x tal que $\beth_x \leq a$. Para $\boldsymbol{a} = a_1, \ldots, a_e$, seja $\boldsymbol{h_a} = h(a_1), \ldots, h(a_e)$. Seja $S : [M]^e \to s+1$ definida por:

$$S(\boldsymbol{a}) = \begin{cases} P(\boldsymbol{h_a}) & \text{se temos } h(a_1) < \ldots < h(a_e), \\ s, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja R como no Lema 33. Use o Lema 31 para combinar R e S em $P^* : [M]^e \to s'$. Tome Y como na hipótese e defina $X = h(Y)$. Se Y é homogêneo para P^* teremos X homogêneo para P, uma vez que se $\boldsymbol{b} \in [X]^e$ então $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{h_a}$ para algum $\boldsymbol{a} \in Y$. Além disso, temos que $S(\boldsymbol{a}) \neq s$ pois como Y é R-homogêneo, cada elemento de Y é levado por h num elemento distinto X. Temos então que $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) \geq \min Y$, mas a definição de h implica que $\beth_{\min X} \leq \min Y$ então temos $\mathrm{card}(X) \geq \beth_{\min X}$ como queríamos. □

Lema 35. *A Afirmação **A** implica na Proposição 32.*

Prova do Lema: A Afirmação **A** nos garante a existência de um M, a idéia é fazer com que esse M atenda as exigências da Proposição 32. Tome e, r, k dados e seja $e' = 2e + 1$.

Defina $R : [M]^2 \to r$ como no Lema 33. Observe que, num conjunto X R-homogêneo com $\mathrm{card}(X) > \max(2, \min X)$, temos que $\forall x, y \in X$, $\beth_x < y$ e, portanto, $x^2 < y$. Isso satisfaz o item (ii) da Proposição 32.

Dada qualquer família $P_\xi : [M]^e \to r$ para $\xi < 2^M$, defina a partição $S : [M]^{e'} \to 2$ por:

$$S(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{cases} 0 & \text{se temos que } P_\xi(\boldsymbol{b}) = P_\xi(\boldsymbol{c}), \forall \xi < 2^a. \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que, se X é homogêneo de cor 0 para a partição S, temos que, dado um $a \in X$, vale que $\forall \xi < 2^a$, $X \smallsetminus (a + 1)$ é homogêneo para P_ξ, o que satisfaz o item (iii) da Proposição 32.

Teremos que controlar o tamanho de X para garantir que ele é grande o bastante para não poder ser S-homogêneo de cor 1. Para isso, defina Q uma partição tal que $Q(x) = \min(x, p)$. É fácil ver que todo conjunto X Q-homogêneo com mais de um elemento é necessariamente homogêneo de cor p e, além disso, $\min X > p$. A idéia agora é forçar que a cardinalidade de X dependa de uma função de $\min X$ para então escolher um p apropriado.

Usando a Proposição 31, combinamos Q, R e S em uma única P e usamos o Lema 34 para obter $P^* : [M]^{e'} \to s'$. O valor de s' depende somente de $e' = 2e + 1$ e de p. Usando a Afirmação **A**, obtemos um conjunto M tal que $M \underset{*}{\longrightarrow} (e' + 1)^{e'}_{s'}$. O Lema 34 nos garante que existe um $X \subseteq M$ homogêneo para P (e conseqüentemente para Q, R e S) com $\mathrm{card} X \geq \beth_{\min X}$.

Definimos $X' = X \smallsetminus \boldsymbol{d}$, onde $\boldsymbol{d} = d_1, \ldots, d_e$ são os últimos e elementos de X. Seja $i_\xi = P_\xi(\boldsymbol{d})$, a ξ-cor da última e-upla de X. Se mostramos que para todo $a < b_1 < \ldots < b_e$ em X' e todo $\xi < 2^a$, vale que $P_\xi(\boldsymbol{b}) = i_\xi$, podemos concluir que X' satisfaz os axiomas da Proposição 32. Basta então mostrar que $S(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ para alguma (e, pela homogeneidade, para toda) $(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ em $[X]^{2e+1}$.

Tome $a = \min X$ e considere e-uplas consecutivas de $X \setminus \{a\}$. Cada uma das P_ξ pinta e-uplas de $X \setminus \{a\}$ por uma dentre r cores. Nossa escolha inicial de p tem que ser tal que existam mais que $r^{2^{\min X}}$ dessas e-uplas e, pelo princípio da casa do pombo, temos $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ tais que $P_\xi(\boldsymbol{b}) = P_\xi(\boldsymbol{c})$ para todo $\xi < 2^{\min X}$. Assim, a exigência que precisamos sobre a cardinalidade de X é da ordem de $C \cdot 2^{\min X}$ para alguma constante C que depende apenas de e, r e k e como temos que card$X \geq \beth_{\min X} > \beth_p$, basta tomar p grande o bastante para que $f_3(p) > C \cdot 2^p$ e concluimos a demonstração. □

Lema 36. *A Proposição 32 implica em* $Con_{\boldsymbol{T}}$.

Prova do Lema: Dado um subconjunto finito S de T, sejam $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ constantes de S. Vamos usar a Proposição 32 para mostrar que S tem um modelo da forma $\langle \mathbb{N}; +, \cdot, x_0, \ldots, x_{k-1} \rangle$, onde $x_0, \ldots, x_{k-1}$ são os primeiros k elementos do conjunto X dado por 32. Esse modelo claramente satisfaz 22(i) então só precisamos nos preocupar com os axiomas presentes em 22(ii) e 22(iii). A parte (ii) de 32 cuida dos axiomas de 22(ii) automaticamente, bastando então adaptar nossas partições de modo a lidar com os axiomas de 22(iii).

Usando uma construção análoga a presente no Lema 1, podemos associar cada $\xi \in \mathbb{N}$ a uma seqüência finita crescente $\boldsymbol{a}(\xi)$ de naturais, bastando para isso observar a expansão de ξ em binário. Dessa forma, todas as seqüências de b são codificadas por algum $\xi < 2^b$. Dada uma fórmula limitada $\psi(\boldsymbol{y}; z)$ e uma seqüência $\boldsymbol{a}(\xi)$ de mesmo comprimento que $\boldsymbol{y}$, obtemos uma partição $F_{\psi,\xi} : [M]^{e'} \to 2$, onde e' é o comprimento de $\boldsymbol{z}$, definida por:

$$F_{\psi,\xi}(\boldsymbol{c}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \psi(\boldsymbol{a}(\xi); \boldsymbol{c}) \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Fixe M e ξ e, para cada axioma na forma (iii) de 22 ocorrendo em S corresponde uma fórmula limitada $\psi(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ e portanto corresponde uma partição $F_{\psi,\xi}$. Podemos, pelo Lema 31, combinar todas em uma única partição $P_\xi : [M]^e \to r$, onde e e r dependem somente de S, não de ξ ou M. Agora, utilizando a Proposição 32, escolha M grande o bastante tal que (ii) e (iii) valham para algum $X \subseteq M$ para a família $\langle P_\xi; \xi < 2^M \rangle$ e card$(X) \geq k + e$. Agora tome $x_0, \ldots, x_{k-1}$ como descrito acima e temos que todo axioma do tipo (iii) é satisfeito. □