4
Uma demonstração usando Teoria de Modelos

Nesse capítulo encontraremos as demonstrações propostas por Bovykin tanto para o Teorema de Paris-Harrington quanto para uma versão adaptada.

4.1
Uma versão adaptada do Teorema de Paris-Harrington

Relembrando, o Teorema de Paris-Harrington (Teorema **A**), afirma que a versão de Paris-Harrington do Teorema de Ramsey não é demonstrável em PA. A demonstração desse fato, no entanto, envolve uma série de dificuldades técnicas e, em (2), Bovykin apresenta a Afirmação **B**, uma versão do Teorema de Ramsey finito que, assim como a Afirmação **A**, não é demonstrável em PA. A prova apresentada por Bovykin, como veremos, remete muito mais à Teoria de Modelos que ao aspecto combinatório das partições, evitando muitas das dificuldades técnicas citadas acima. Em seu artigo, Bovykin enuncia e demonstra o Teorema **B** e sugere que os cursos de lógica apresentem provas como esta ao invés das provas conhecidas para o Teorema de Paris-Harrington.

Como podemos ver, a Afirmação **B** apresenta a restrição $\mathrm{card}(H) > (e+1)\cdot 2^{e\cdot \min H}$ ao invés da restrição $\mathrm{card}(H) > \min H$. É justamente essa restrição mais forte que nos permite simplificar a prova.

A idéia por trás do argumento é, supondo a Afirmação **B** verdadeira num modelo S não-*standard*, exibir uma partição que produza um conjunto H homogêneo e f-relativamente grande com uma propriedade muito particular. Construiremos um segundo modelo I, contido na estrutura original de S e veremos que a Afirmação **B** não vale em I.

Prova do Teorema B: Nós vamos provar que a Afirmação **B** não é demonstrável já em $r = 2$. Seja S um modelo não-*standard* de $I\Delta_0 + \exp$, onde $I\Delta_0$ representa os axiomas usuais de indução, mas aplicados apenas em fórmulas sem nenhum quantificador livre e exp aqui é a aplicação $n \to 2^n$.

Seja $e \in S \smallsetminus \mathbb{N}$ um elemento não-*standard* de S e

$$\phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_e, y), \ldots, \phi_e(x_1, x_2, \ldots, x_e, y)$$

uma enumeração para as primeiras e Δ_0-fórmulas com no máximo $e+1$ variáveis livres. Escolha a enumeração de tal forma que isso inclua todas as Δ_0 fórmulas de tamanho *standard*.

Suponha que $M \in S$ é o menor ponto tal que, para algum k dado, $M \underset{**}{\longrightarrow} (k)_2^{2e+1}$, isto é para toda partição $P : [M]^{2e+1} \to 2$, existe um $H \subset M$, card$H > k$, H monocromático para P e f-relativamente grande para $f(x) = (e+1) \cdot 2^{e \cdot x}$. O leitor pode se perguntar se M de fato existe, já que num modelo não-*standard* é possível que tenhamos seqüências infinitas decrescentes. Ocorre, no entanto, que a fórmula $M \underset{**}{\longrightarrow} (k)_2^{2e+1}$ é uma fórmula $I\Delta_0 +$ exp e, por indução, garantimos a existência do ponto mínimo M.

Sejam $\boldsymbol{b} = b_1, b_2, \ldots, b_e$ e $\boldsymbol{c} = c_1, c_2, \ldots, c_e$ e-uplas ordenadas de M. Defina $P : [M]^{2e+1} \to 2$ tal que, para todo $\{a < \boldsymbol{b} < \boldsymbol{c}\} \in [M]^{2e+1}$, temos:

$$P(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \forall x < a(\forall i \leq e \to (\phi_i(\boldsymbol{b}, x) = \phi_i(\boldsymbol{c}, x))) \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $H \subset S$ homogêneo para P com card$H > (e+1) \cdot 2^{e \cdot \min H}$. Para toda e-upla $\boldsymbol{b}$ de $H \smallsetminus \{\min H\}$ corresponde uma seqüência $\{B_1, B_2, \ldots, B_e\}$ onde $B_i = \{x < \min H : \phi_i(\boldsymbol{b}, x)\}$.

Não podem existir mais que $2^{e \cdot \min H}$ seqüências desse tipo e, como card$(H) > (e+1) \cdot 2^{e \cdot \min H}$, pelo princípio da casa do pombo, existem $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{c}$ em $H \smallsetminus \{\min H\}$ tais que $P(\min H, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ e, pela definição de P, temos ,

$$\forall x < \min H(\forall i \leq e \to (\phi_i(\boldsymbol{b}, x) = \phi_i(\boldsymbol{c}, x)))$$

Assim, como H é homogêneo, temos que P é constante 0 em $[H]^{2e+1}$.

Agora, sejam $d_1 < d_2 < \ldots < d_e$ os últimos e elementos de H. Então, para todo $a < \boldsymbol{b}$ e $a < \boldsymbol{c}$ em $H \smallsetminus \{d_1, d_2, \ldots, d_e\}$, temos que, se $x < a$

$$\{i \leq e : \phi_i(\boldsymbol{b}, x)\} = \{i \leq e : \phi_i(d_1, d_2, \ldots, d_e, x)\} = \{i \leq e : \phi_i(\boldsymbol{c}, x)\}.$$

Um conjunto é dito *indiscernível* se seus elementos não podem ser diferenciados por nenhuma propriedade ou relação definida por uma fórmula. Nesse caso, como todas as Δ_0-fórmulas de tamanho *standard* estão sendo levadas em consideração, os elementos de $H \smallsetminus \{d_1, d_2, \ldots, d_e\}$ são indiscerníveis.

Agora, seja $H = \{h_1 < h_2 < h_3 < \ldots\}$ uma ordenação para H e seja I o segmento inicial $I = \sup_{i \in \mathbb{N}} h_i$ (i.e., x pertence a I se, e somente se, existe um natural *standard* i tal que x é menor que h_i). Como definimos M como o menor ponto tal que valha a condição de Bovykin, temos que, se $I \models$ PA, então $I \models$PA+$\neg$Afir.**B**. Assim, basta provar que $I \models$PA e estaremos provando que a

Afirmação **B** não é demonstrável em PA.

Lema 21. $I \vDash PA$

Prova do Lema: Para demonstrar que I satisfaz PA, temos que mostrar que I é fechado pelas operações de soma e pelo produto e satisfaz o esquema de indução. Todos os outros axiomas são herdados trivialmente de H.

Para mostrar que I é fechado pela soma, basta mostrar que $h_i + h_{i+1} < h_{i+2}$. Se tivéssemos $h_i + h_{i+1} > h_{i+2}$, então para algum $p < h_i$ teríamos $p + h_{i+1} = h_{i+2}$ e usando a condição de indiscernibilidade e a fórmula $\phi(a, x_2, x_3) = (a + x_2 = x_3)$ para todo $h > h_{i+1}$ em H , teríamos $p + h_{i+1} = h$, o que é uma contradição. Assim $h_i + h_{i+1} < h_{i+2}$ e I é fechado por adição.

Para mostrar que I é fechado pelo produto, o argumento é semelhante: Temos que mostrar que $h_i \cdot h_{i+1} < h_{i+2}$ e, por contradição, se $h_i \cdot h_{i+1} > h_{i+2}$ então existe um $p < h_i$ tal que $p \cdot h_{i+1} < h_{i+2} < p \cdot h_{i+1} + h_{i+1}$ e, pela indiscernibilidade e a fórmula $\phi(a, x_2, x_3) = a \cdot x_2 + x_2 > x_3$, teríamos $h_{i+3} < p \cdot h_{i+1} + h_{i+1} < h_{i+2} + h_{i+1}$, o que é impossível uma vez que já foi provado que $h_{i+3} > h_{i+1} + h_{i+2}$.

Concluímos provando que vale o esquema de indução em I e temos que, dada uma fórmula qualquer ϕ com uma variável livre e um parâmetro p, satisfeita para algum x em I, existe um x mínimo que a satisfaz.

Agora, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $p, q \in I$, temos que $p, q < h_k$ e $I \vDash \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ldots \phi(p, x_1, x_2, \ldots, x_n, q)$ e, para todo $d < q$, temos que

$$I \vDash \forall x_1 \exists x_2 \quad \ldots \quad \phi(p, x_1, \ldots, x_n, d) \tag{4.1.1}$$

$$\Updownarrow$$

$$M \vDash \forall x_1 < h_{i_1} \exists x_2 < h_{i_2} \quad \ldots \quad \phi(p, x_1, \ldots, x_n, d). \tag{4.1.2}$$

para alguma coleção $\boldsymbol{i} = i_1 < i_2 < \ldots < i_n$.

Entretanto, como M é um modelo indutivo, existe um d mínimo tal que a equação 4.1.2 vale e esse d será também minimal na equação 4.1.1, o que conclui a demonstração que $I \vDash$PA e, conseqüentemente, do Teorema **B**. □

4.2
O Teorema de Paris-Harrington

A demonstração original para o Teorema **A** será tratada no capítulo seguinte. Nessa seção estudamos a demonstração proposta por Bovykin.

Prova do Teorema A: De modo análogo à demonstração do Teorema **B**, tomaremos um modelo M não-*standard* de $I\Delta_0+$ exp, com a e e elementos não-*standard* de M e uma enumeração

$$\phi_1(z, x_1, x_2, \ldots, x_e), \ldots, \phi_e(z, x_1, x_2, \ldots, x_e)$$

para as primeiras e Δ_0-fórmulas, construída de forma a conter todas as Δ_0-fórmulas de tamanho *standard*. Seja $r(e)$ o menor S tal que $S \longrightarrow (5e+1)^{2e+1}_{e+1}$ e seja b minimal em M tal que para toda $g : [a, b]^{4e+1} \to 2e \cdot r(e)$, exista um $H \subset [a, b]$ g-homogêneo com card$H \geq r(e)$ tal que card$H > \min H$. No modelo M notamos $[a, b]$ como o conjunto $\{x \in M : (a \leq x \leq b)\}$. Agora defina uma $f : [a, b]^{2e+1} \to (e+2)$ de modo que, para todo $c < \boldsymbol{d_1} < \boldsymbol{d_2}$ (onde $\boldsymbol{d_1}$ e $\boldsymbol{d_2}$ são e-uplas ordenadas) em $[a, b]$, tenhamos

$$f(c, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}) = \begin{cases} \min i \leq e(\exists p < c\, \phi_i(p, \boldsymbol{d_1}) \nleftrightarrow \phi_i(p, \boldsymbol{d_2})) & \text{se existe tal } i \leq e. \\ e+1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A idéia aqui é que f identifica a primeira fórmula (com um parâmetro limitado por c) capaz de distingüir as e-uplas $\boldsymbol{d_1}$ e $\boldsymbol{d_2}$. Seja $\alpha = f(c, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2})$ e defina uma função h em $[a, b]^{2e+1}$ tal que:

$$h(c, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}) = \begin{cases} \min p \leq c(\phi_\alpha(p, \boldsymbol{d_1}) \nleftrightarrow \phi_\alpha(p, \boldsymbol{d_2})) & \text{se } \alpha \neq e+1. \\ c & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desse modo, $h(c, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2})$ é o primeiro parâmetro p com o qual ϕ_α é capaz de distingüir $\boldsymbol{d_1}$ e $\boldsymbol{d_2}$. Finalmente, introduzimos a partição $g : [a, b]^{4e+1} \to 2e \cdot r(e) + 1$ como abaixo:

$$g(c, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}, \boldsymbol{d_3}, \boldsymbol{d_4}) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad h(c, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}) = h(c, \boldsymbol{d_3}, \boldsymbol{d_4}). \\ j & \text{se} \quad h(c, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}) \neq h(c, \boldsymbol{d_3}, \boldsymbol{d_4}), \\ & \qquad 0 \leq j < 2e \cdot r(e) \text{ e} \\ & \qquad h(c, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}) \equiv j \pmod{2e \cdot r(e)} \end{cases}$$

Tome agora um conjunto $H \subseteq [a, b]$, g-homogêneo de tamanho pelo menos $r(e)$ e tal que card$H > \min H$. Seguimos provando que g vale zero em $[H]^{4e+1}$. Suponha por absurdo que g vale $j \neq 0$ em $[H]^{4e+1}$.Não existem mais que $\lceil \frac{\min H}{2e \cdot r(e)} \rceil$ valores menores que $\min H$ tais que $h(\min H, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}) \equiv j \pmod{2e \cdot r(e)}$. No entanto, como card$H > \min H$, podemos dividir H em pelo menos $\lfloor \frac{\min H}{2e} \rfloor$ $2e$-uplas ordenadas de modo que, pelo princípio da casa do pombo, tem que existir $\boldsymbol{d_1} < \boldsymbol{d_2} < \boldsymbol{d_3} < \boldsymbol{d_4}$ tais que $h(\min H, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}) = h(\min H, \boldsymbol{d_3}, \boldsymbol{d_4})$ e teríamos $g(\min H, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}, \boldsymbol{d_3}, \boldsymbol{d_4}) = 0$, o que é uma contradição. Como card$H \geq r(e)$ temos, pela definição de $r(e)$, que existe um conjunto $C \subseteq H$ contendo $5e+1$ pontos $c_0 < c_1 < \ldots < c_{5e+1}$ tal que para qualquer duas $(2e+1)$-uplas $c_k < \boldsymbol{d_1} < \boldsymbol{d_2}$ e $c_j < \boldsymbol{d_3} < \boldsymbol{d_4}$, temos:

$$f(c_k, \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}) = f(c_j, \boldsymbol{d_3}, \boldsymbol{d_4})$$

Se o valor de f em $[C]^{2e+1}$ é diferente de $e+1$, defina $p = h(c_0, c_{3e+1}, \ldots, c_{5e})$. Então, para qualquer $d_1 < d_2$ em $\{c_1, \ldots, c_{3e}\}$, temos que $h(c_0, d_1, d_2) = p$. Dessa forma vale que

$$\phi_i(p, c_1, \ldots, c_e) \not\leftrightarrow \phi_i(p, c_{e+1}, \ldots, c_{2e}) \not\leftrightarrow \phi_i(p, c_{2e+1}, \ldots, c_{3e}) \not\leftrightarrow \phi_i(p, c_1, \ldots, c_e)$$

, o que é impossível uma vez que só existem dois valores-verdade. Assim, temos que $i = e+1$ e o conjunto C satisfaz a condição de indiscernibilidade de que, para toda Δ_0-fórmula $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$, todo $c \in C$, $d_1 < \ldots < d_n$ e $e_1 < \ldots < e_n$ e todo $p < c$, temos

$$\phi(p, d_1, \ldots, d_n) \leftrightarrow \phi(p, e_1, \ldots, e_n).$$

Resta agora mostrar que o segmento inicial $I = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} c_j$ é um modelo de PA e, portanto, também é modelo de PA $+\neg$Afir. **A**, uma vez que definimos $b > I$ como o menor ponto de M tal que para toda $g : [a,b]^{4e+1} \to 2e \cdot r(e)$ existe um subconjunto homogêneo nas condições da Afirmação **A**. Os argumentos de indiscernibilidade para mostrar que $I \vDash$PA são análogos aos apresentados na demonstração do Lema 21, o que conclui a demonstração. □