3
O Teorema de Ramsey

Nesse capítulo enunciamos versões finitas e a versão infinita do Teorema de Ramsey, além das versões propostas por Paris, Harrington e Bovykin, que serão tratadas no capítulos subseqüentes. Apresentamos uma demonstração em SF para as versões finitas e uma demonstração geral em ZF que abrange todas as versões expostas do Teorema.

3.1
Partições e os Teoremas de Ramsey

Seria enfadonho tratar dos resultados que seguem os enunciando e demonstrando em lógica de primeira ordem partindo dos axiomas de PA. Isso posto, nossa abordagem será a de proporcionar ao leitor enunciados e demonstrações não formais em SF, que, lançando mão da correspondência descrita em 1.3 podem ser escritos e interpretados de maneira formal em PA. Termos como grafo e aresta e expressões como card, min e sup mantém o seu significado tradicional mas, visando não tornar o texto exaustivo, nos permitimos não definir cada um formalmente.

Dado I, seja $[I]^e = \{U \subset I : \mathrm{card}(U) = e\}$, o conjunto das e-uplas de I.

Dada uma função $P : [I]^e \to r$, dizemos que P é uma *partição* de $[I]^e$ em r pedaços ou ainda, P *pinta* as e-uplas de I com r cores.

Os exemplos simples para partições são o grafo de I vértices, onde $P : [I]^2 \to 2$ determina se dois vértices são ou não ligados por uma aresta ou o grafo completo de I vértices, onde P pinta suas arestas nas cores azul e vermelho. Um exemplo mais geral é obtido se passamos a considerar o grafo de I vértices com as arestas pintadas em r cores.

Dada $P : [I]^e \to \sigma$, dizemos que $H \subset P$ é *homogêneo* ou *monocromático* para P se, e somente se, P é constante em $[H]^e$ e ,dados e, r, k e M, usamos a notação $M \longrightarrow (k)^e_r$ quando para toda partição $P : [M]^e \to r$ existe um $H \subset M$ homogêneo para P, $\mathrm{card}(H) \geq k$.

O Teorema de Ramsey, tema central de nosso trabalho, afirma o seguinte:

Teorema 4 (Ramsey)**.** *Para todo e, r, $k \in \mathbb{N}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $M \longrightarrow (k)^e_r$.*

Para demonstrar 4 em PA ou, melhor dizendo, em SF, começamos demonstrando uma versão do Teorema para grafos de duas cores para, posteriormente, generalizar os resultados obtidos.

Proposição 5 (Ramsey para grafos com duas cores)**.** *Para todo $r,\ s \in \mathbb{N}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo grafo completo de M vértices cujas arestas são coloridas de azul ou vermelho, então ou existe um subgrafo completo azul com r vértices ou um subgrafo completo vermelho com s vértices.*

Observe que o enunciado da Proposição 5 remete ao exemplo onde I é o conjunto dos vértices e P determina se existe ou não uma aresta ligando dois elementos distintos de P.

A Proposição 5 deu partida ao ramo da matemática hoje conhecido por Teoria de Ramsey e o menor M que satisfaz as condições de 5 para r e s dados é chamado de o número de Ramsey $R(r, s)$. Podemos ampliar essa definição de modo a contemplar uma gama maior de cores usando a notação $R(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ e, se a partição pinta e-uplas, $e \neq 2$, usando $R_e(a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

Nesse contexto, o Teorema 4 pode ser visto como um caso particular do lema abaixo:

Lema 6. *Para todo $e,\ r \in \mathbb{N}$, existe o número de Ramsey $R_e(a_1, \ldots, a_r)$.*

Demonstraremos, portanto, o Lema 6. A demonstração se desenvolve em três lemas e começa com a demonstração da Proposiçao 5.

Para tal, vamos utilizar a indução em $r + s$. Pela definição, temos que $R(n, 1) = R(1, n) = 1$. Admita, pela hipótese de indução, que existam $R(r - 1, s)$ e $R(t, s - 1)$.

Lema 7. $R(r, s) \leq R(r - 1, s) + R(r, s - 1)$.

Prova do Lema: Considere o grafo completo G com $R(r-1, s) + R(r, s-1)$ vértices. Tome um vértice $v \in G$ e considere dois subgrafos M e N onde um vértice w está em M se, e só se, (v, w) é azul e, caso contrário, pertence a N.

Agora segue, pelo princípio da casa do pombo, que $\text{card}(M) \geq R(r-1, s)$ ou $\text{card}(N) \geq R(r, s-1)$. Sem perda de generalidade, digamos que $\text{card}(M) \geq R(r-1, s)$. Então ou M admite um subconjunto homogêneo V vermelho com s elementos ou M admite um subconjunto homogêneo azul com $r - 1$ elementos e, portanto, $M \cup v$ tem um subconjunto homogêneo A de r elementos. Como $M \subset G$, está demonstrado. $\square$

Seguimos aumentando indutivamente o tamanho das e-uplas.

Lema 8. $R_e(a_1, a_2) \leq R_{e-1}(R_e(a_1 - 1, a_2), R_e(a_1, a_2 - 1)) + 1$

O Lema 8 é uma generalização do Lema 7 e demonstração que segue apenas generaliza a demonstração apresentada para o Lema 7.

Prova do Lema: Os casos em que $e = 1$ são triviais e sabemos que $R_e(n, 1) = R_e(1, n) = 1$. Suponha, por indução, que exista $R_a(x, y)$ para todo $a < e$ e $R_e(b_1, b_2)$ para todo $b_1 \leq a_1$ e $b_2 \leq a_2$ tais que $b_1 + b_2 < a_1 + a_2$. Seja M um conjunto tal que $\text{card}(M)$ é maior que o lado direito do Lema 8 e considere a partição $P : [M]^e \to 2$. Tome $x \in M$ e considere a partição $P_x : [M - \{x\}]^{e-1} \to 2$ definida por $P_x(y_1, \ldots, y_{e-1}) = P(x, y_1, \ldots, y_{e-1})$. Existe, por hipótese, um conjunto $H \subset M - \{x\}$ homogêneo para P_x. Sem perda de generalidade, suponha H homogêneo de cor 0 para P_x e, portanto, $\text{card}(H) \geq R_e(a_1 - 1, a_2)$. Segue que ou H tem um conjunto P-homogêneo de cor 1 com a_2 elementos ou $H \cup \{x\}$ tem um conjunto P-homogêneo de cor 0 com a_1 elementos. □

O Lema que segue nos permite aumentar indutivamente o número de cores, concluindo o argumento.

Lema 9. $R_e(a_1, a_2, \ldots, a_r) \leq R_e(a_1, R_e(a_2, \ldots, a_r))$

Prova do Lema: A desigualdade se resume a uma igualdade no caso em que $r = 2$. Por indução suponha que, dados e e r, exista $R_e(b_1, \ldots, b_{r-1})$ para qualquer $b_1, \ldots, b_{r-1}$. Seja M um conjunto tal que $\text{card}(M)$ é maior que o lado direito do Lema 9 e considere uma partição $P : [M]^e \to r$. Defina $Q : [M]^e \to 2$ da seguinte maneira:

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } P(x) = 0 \\ 1 & \text{se } P(x) \neq 0 \end{cases}$$

M admite, portanto, um subconjunto H que ou é Q-homogêneo de cor 0 com a_1 elementos e vale o Lema ou H é Q-homogêneo de cor 1 com $R_e(a_2, \ldots, a_r)$ elementos. No segundo caso, pela hipótese de indução, existe, para algum $k < r$, um conjunto $N \subseteq H$, P-homogêneo de cor $i = k + 1$, com $\text{card}(N) = a_i$, o que conclui a demonstração. □

Agora, embora o Teorema de Ramsey afirme que, dados e, r e k, existe tal M, ele não nos dá muitos subsídios para determinar explicitamente $R_e(a_1, \ldots, a_r)$. Ao passo de que um pouco da combinatória presente na própria demonstração do teorema nos dê cotas superiores para determinados números de Ramsey, o trabalho de Paul Erdős em (9) nos dá cotas inferiores para valores de $R(r, s)$.

Um exemplo trivial é o caso $R(3, 3)$ onde, para demonstrar que $R(3, 3) \leq 6$ podemos considerar um grafo completo de seis vértices, com arestas pintadas de azul ou vermelho. Tome um vértice v qualquer deste grafo. Como v tem cinco vizinhos, o princípio da casa do pombo garante que existem pelo menos três arestas saindo de v compartilhando uma mesma cor. Suponha, sem perda de generalidade, que as arestas (a_0, v), (a_1, v) e (a_2, v) são azuis. Segue que ou o conjunto $\{a_0, a_1, a_2\}$ é homogêneo vermelho ou, para algum $i, j < 3$ a aresta (a_i, a_j) é azul e o conjunto $\{a_i, a_j, v\}$ é homogêneo azul. Concluímos que $R(3, 3) = 6$ mostrando que o grafo $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ onde a aresta (a_i, a_j) é azul se $i - j \equiv \pm 1 \pmod 5$ e vermelha caso contrário não contém triângulos monocromáticos. $\square$

Seguimos apresentando uma notação apropriada para as diferentes versões do Teorema de Ramsey que serão tratadas nos capítulos seguintes.

Definição 10. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, H um conjunto finito. $H \subset \mathbb{N}$ é *f-relativamente grande* se $\mathrm{card}(H) \geq f(\min H)$.

Definição 11. Dados e, r, k e M, usamos a notação $M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r$ quando para toda partição $P : [M]^e \to r$ existe um $H \subset M$, f-relativamente grande e homogêneo para P, $\mathrm{card}(H) \geq k$, $f(x) = x$.

Definição 12. Dados e, r, k e M, usamos a notação $M \underset{**}{\longrightarrow} (k)^e_r$ quando para toda partição $P : [M]^e \to r$ existe um $H \subset M$, f-relativamente grande e homogêneo para P, $\mathrm{card}(H) \geq k$, $f(x) = (e + 1) \cdot 2^{e \cdot x}$.

Afirmação A (Ramsey, versão Paris-Harrington) *Dados os números naturais e, r e k, existe um natural M tal que $M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r$.*
Afirmação B (Ramsey, versão Bovykin) *Dados os números naturais e, r e k, existe um natural M tal que $M \underset{**}{\longrightarrow} (k)^e_r$.*

Demonstraremos nesse capítulo que as Afirmações **A** e **B** são teoremas em ZF e, nos capítulos 3 e 4, demonstraremos os dois s enunciados abaixo:

Teorema A *A Afirmação **A** não é demonstrável em PA.*

Teorema B *A Afirmação **B** não é demonstrável em PA.*

A importância histórica do Teorema **A**, provado em 1977, se deve ao fato de que esse foi o primeiro exemplo matematicamente natural de uma frase indecidível em Aritmética de Peano.

3.2
O Teorema de Ramsey infinito

Teorema 13 (Ramsey, versão infinita). $\omega \longrightarrow (\omega)^e_r$ *para todo* e, $r \in \omega$.

Para demonstrar o Teorema 13 vamos começar provando que $\omega \longrightarrow (\omega)^2_2$, onde P pinta a aresta (x, y) de vermelho se $P(x, y) = 0$, ou azul, se $P(x, y) = 1$. Nossa estratégia consistirá em tentar construir um conjunto infinito monocromático vermelho e se, em algum momento do processo abaixo, não for possível continuar construiremos um conjunto monocromático azul.

Lema 14. $\omega \longrightarrow (\omega)^2_2$

Prova do Lema: Considere um número natural a_0 que tenha infinitos vizinhos vermelhos em ω, isto é, tal que se $A_1 = \{x \in \omega : P(a_0, x) = 0\}$, então card$A_1 = \omega$. Considere agora um elemento a_1 de A_1 que tenha infinitos vizinhos vermelhos em A_1. Seja $A_2 = \{x \in A_1 | P(a_1, x) = 0\}$. Repita o processo, construindo, em cada passo, um conjunto $A_{n+1} = \{x \in A_n | P(a_n, x) = 0\}$, contendo infinitos vizinhos vermelhos do elemento a_n, contido em A_n. Se este processo nunca falhar, o conjunto $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ será infinito monocromático vermelho.
Se o processo falha no passo n (i.e. se não existir a_n com infinitos vizinhos vermelhos em A_n), podemos afirmar que todo elemento de A_n tem infinitos vizinhos azuis em A_n e, tomando um elemento b_0 qualquer de A_n, definimos $B_1 = \{x \in A_n | P(b_0, x) = 1\}$, o conjunto de vizinhos azuis de b_0. Seguimos selecionando elementos b_k e construindo conjuntos $B_{k+1} = \{x \in B_k | P(b_k, x) = 1\}$.
Observe que o processo não tem como falhar dessa vez, uma vez que a falha implicaria na existência, para algum k, de elementos de B_k com infinitos vizinhos vermelhos e, como $B_k \subseteq A_n$ teríamos uma contradição. Assim, o conjunto $\{b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ é infinito monocromático azul. $\square$

Lema 15. $\forall r \in \omega, \omega \longrightarrow (\omega)^2_r$

Prova do Lema: Dados $P : [\omega]^2 \to r$ e $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, lançamos mão de partições P_i, definidas da seguinte maneira:

$$P_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } P(x) = i \\ 1 & \text{se } P(x) \neq i \end{cases}$$

A idéia agora é, usando as partições P_i, tentar exibir um conjunto monocromático infinito na cor i e se falhamos, por pelo Lema 14, podemos afirmar que existe um conjunto infinito monocromático para P_i na cor 1. Começamos o processo procurando construir um conjunto monocromático de cor 0 para a partição $P_0 : [\omega]^2 \to 2$. Se não existir um conjunto infinito monocromático de cor 0, então existe um conjunto infinito monocromático A_1 de cor 1 e podemos considerar a partição $P_1 : [A_1]^2 \to 2$ e assim prosseguindo, em cada passo tentando obter um conjunto monocromático de cor 0 para a partição $P_i : [A_i]^2 \to 2$ e, caso não seja possível, construindo o conjunto A_{i+1} infinito de cor 1. Seguindo esse processo ou encontramos, no passo i, um conjunto infinito monocromático H de cor 0 para a partição P_i e segue que H é monocromático de cor i para a partição P ou não conseguimos encontrar um H monocromático de cor 0 para a partição P_i, para $i < n$ e segue que A_n é monocromático de cor $n-1$ para a partição P. □

Seguimos provando o Teorema 13.

Prova do Teorema: Dada a partição $P : [\omega]^e \to r$, definimos, para cada $x \in \omega$, partições $P_x : [\omega]^{e-1} \to r$ tais que $P_x(\boldsymbol{y}) = P(\boldsymbol{y}, x)$ para todo $\boldsymbol{y} \in [\omega \setminus \{x\}]^{e-1}$.

Ainda no espírito das demonstrações anteriores, vamos tentar construir uma seqüência infinita de conjuntos X_s, sempre procurando por um elemento a_{ij} de X_s que admita a construção de um conjunto $X_{s+1} \subset X_s \setminus \{a_{ij}\}$ infinito homogêneo de cor i para a partição $P_{a_{ij}}$. Se existir um a_{ij} satisfatório, passamos a procurar em X_{s+1} o elemento $a_{i(j+1)}$, tal que exista o conjunto $X_{s+2} \subset X_{s+1} \setminus \{a_{i(j+1)}\}$ infinito homogêneo de cor i para a partição $P_{a_{i(j+1)}}$. Se não existir um a_{ij} satisfatório, procuraremos no conjunto X_s por um $a_{(i+1)0}$ tal que exista um conjunto $X_{s+1} \subset X_s \setminus \{a_{(i+1)0}\}$ infinito homogêneo de cor $i+1$ para $P_{a_{(i+1)0}}$.

Cada vez que não for possível construir um X_{s+1}, passamos para a cor seguinte e se, em algum momento desse processo, conseguimos construir o conjunto infinito $\{a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$, podemos afirmar que esse conjunto é homogêneo de cor i para a partição P. Se chegamos à cor $n-1$, é porque o processo falhou seguidas vezes e, portanto, não existem conjuntos homogêneos nas cores $0, 1, 2, \ldots, n-2$ para X_s. Isso nos permite construir o conjunto $\{a_{(n-1)0}, a_{(n-1)1}, a_{(n-1)2}, \ldots\}$, que é infinito homogêneo de cor $n-1$ para P.
□

3.3
As versões de Bovykin e Paris-Harrington para o Teorema de Ramsey

Para demonstrar o Teorema de Ramsey e as afirmações **A** e **B** em ZF vamos, antes, enunciar e demonstrar o Lema de König.

Definição 16. Uma *árvore* é uma ordem parcial, $(T, <)$, tal que para cada $y \in T$, $\{x : x < y\}$ é bem ordenado por $<$.

Definição 17. O *α-ésimo nível* de T é $\{y : \{x : x < y\}$ tem tipo $\alpha\}$.

Definição 18. A *altura* de T é o primeiro α tal que o α-ésimo nível de T é vazio.

Definição 19. T' é uma *sub-árvore* de T se, e somente se, vale que $T' \subset T$.

Lema 20 (König). *Se T é uma árvore de altura ω e cada nível de T é finito, então existe um caminho através de T.*

Prova do Lema: Tome x_0 no nível 0 de T tal que a sub-árvore $T_0 = \{y \in T : y > x_0\}$ é infinita. Isso é possível uma vez que T é infinita e o nível 0 é finito. Agora, indutivamente, tome x_n $(n \in \omega)$ no nível n de T tal que para cada n, $x_{n+1} > x_n$, a sub-árvore $T_{n+1} = \{y \in T : y > x_{n+1}\}$ é infinita. Segue da indução que $\{x_n : n \in \omega\}$ é um caminho através de T. □

Usaremos o lema de König para, usando o Teorema de Ramsey infinito, demonstrar não só o Teorema de Ramsey, mas também as versões de Bovykin e Paris-Harrington. É conveniente citar, no entanto, que tanto o Lema de König quanto o Teorema de Ramsey infinito não são enunciáveis em PA, pois tratam de objetos infinitos em seu enunciado.

Prova do Teorema: Para provar o Teorema 4, fixamos e, r e k e supomos, por absurdo, que não exista um M do modo desejado. Dizemos que P é um contra-exemplo para M se P é uma partição de $[M]^e$ em r pedaços sem um conjunto homogêneo de tamanho pelo menos k. O conjunto desses contra exemplos pode ser visto como uma árvore T infinita, com níveis finitos. Assim, se P e P' são, respectivamente, contra-exemplos para M e M', colocamos P abaixo de P' em nossa árvore somente se $M < M'$ e P é a restrição de P' a $[M]^e$. Pelo Lema 20, existe um caminho através de T, ou seja, existe uma $P : [\omega]^e \to r$ tal que para todo M, a restrição de P a $[M]^e$ é um contra-exemplo para M. Pelo Teorema 13, existe um conjunto $H \subseteq \omega$ homogêneo infinito para P. Se tomamos M grande o bastante (em comparação com k) segue que $H \cap M$ é um conjunto homogêneo para $P|_{[M]^e}$ de tamanho pelo menos k. □

Seguimos demonstrando, para escolhas apropriadas de f, as afirmações **A** e **B**.

Prova da Afirmação: De maneira análoga à prova do Teorema 4, fixamos e, r e k e supomos que não exista um M do modo desejado, construindo assim a árvore T de contra-exemplos, dessa vez acrescentando a condição de que P é um contra-exemplo para M se P é uma partição de $[M]^e$ em r pedaços sem um conjunto homogêneo *f-relativamente grande* de tamanho pelo menos k. Usamos novamente o Lema 20 e o Teorema 13, dessa vez para afirmar que, se escolhemos M grande o bastante (agora em comparação com k e $\min H$), vemos que $H \cap M$ é um conjunto homogêneo f-relativamente grande para $P|_{[M]^e}$ de tamanho pelo menos k. $\square$