

1

Introdução

O objetivo principal desse trabalho é estudar os resultados obtidos por Paris e Harrington acerca da não demonstrabilidade de uma versão do teorema de Ramsey na Aritmética de Peano. Apresentaremos também uma demonstração por Teoria dos Modelos devida a Bovykin.

O teorema de Ramsey afirma que, dados e , r e k , existe um M tal que para toda função que associe e -uplas não ordenadas de M a um dentre r elementos, existe um conjunto H , contendo pelo menos k elementos, que é homogêneo para tal função. A versão de Paris e Harrington acrescenta ao teorema a hipótese de que a cardinalidade de H deve ser maior ou igual ao seu menor elemento. Bovykin propõe uma outra versão na qual a cardinalidade de H deve ser maior ou igual a $f(\min H)$ para uma certa função f .

Para estudar esses resultados de não demonstrabilidade faz-se necessária uma introdução à lógica de primeira ordem, aos fundamentos da teoria de conjuntos e aos teoremas de Gödel.

O trabalho se divide em quatro capítulos. Apresentamos inicialmente, no Capítulo 1, uma breve introdução à teoria axiomática de conjuntos, aos teoremas de incompletude de Gödel e observamos propriedades possíveis em modelos não-*standard* de PA.

No Capítulo 2 seguimos demonstrando em PA o teorema de Ramsey finito e, em ZF, demonstramos os teoremas de Ramsey e as versões de Bovykin e Paris-Harrington.

No Capítulo 3 apresentamos os resultados de não demonstrabilidade sob o ponto de vista de Teoria de Modelos: esta apresentação é baseada no trabalho de Bovykin (2). A versão modificada é de demonstração mais fácil. As duas demonstrações envolvem a obtenção de um elemento indiscernível de

um modelo não-*standard* de $I\Delta_0 + \text{exp}$ e a construção de um modelo de PA contido nesse elemento.

No Capítulo 4 demonstramos novamente a indecidibilidade em PA da versão Paris-Harrington do Teorema de Ramsey, dessa vez seguindo o esquema proposto em (4), construindo uma teoria T , demonstrando que consistência de T implica na consistência de PA e concluimos a prova demonstrando que a versão Paris-Harrington do teorema de Ramsey implica na consistência de T .