

5 Procedimento Numérico

A análise numérica da dinâmica da bóia, conforme proposta do presente estudo, requer a solução simultânea de dois problemas dinâmicos: o primeiro trata da dinâmica não-linear de um corpo interagindo com ondas marítimas de superfície, e o segundo de um cabo em movimento arbitrário submetido a grandes deslocamentos planos, onde os efeitos de rigidez longitudinal e flexional são dependentes dos deslocamentos transversais e longitudinais. Através de um procedimento numérico, obtém-se a simulação coordenada do modelo de interação não-linear bóia-onda com o modelo de elementos finitos desenvolvido para a resposta não-linear do cabo. Os dois modelos numéricos interagem através do ponto de conexão bóia-linha, onde os deslocamentos, acelerações e velocidades de ambas as estruturas são compatibilizadas, além da força de tração da linha \vec{F}_l . O procedimento numérico, implementado nos programas MATLAB Versão 7.2 e SIMULINK Versão 6.4, pode ser descrito pelos seguintes passos principais:

- (1) Considera-se um estado inicial, no instante de tempo $t = t_0$, onde o deslocamento e velocidade da bóia são conhecidos e os parâmetros de onda são fornecidos.
- (2) Para o instante $t = t_0$, obtém-se a configuração estática inicial da linha considerando-se a posição da extremidade superior de fixação igual à posição inicial do centro de massa da bóia (ponto de conexão bóia-linha). Com esta condição, obtém-se a força inicial de tração \vec{F}_l que atua na extremidade superior da linha, solidária à bóia.
- (3) Com o esforço na extremidade da linha, igual e em sentido contrário na bóia, obtém-se o comprimento molhado da bóia de superfície.
- (4) Forças e momentos restantes são obtidos através da integração numérica.

- (5) Resolve-se as equações de movimento (4.1.7) a (4.1.10) da unidade flutuante para a obtenção da posição, velocidade e aceleração da bóia no instante $t = t + h$, onde h é um intervalo de tempo fixo e, na primeira iteração, $t = t_0 + h$.
- (6) Passa-se à análise dinâmica da linha no incremento de tempo h através da prescrição da posição, velocidade e aceleração obtidas em (5) à extremidade da linha. A força \vec{F}_l que a linha efetua sobre a bóia no instante $t = t + h$ é obtida para esta nova configuração.
- (7) Retorna-se ao passo (3) e repete-se o procedimento.

5.1. Configuração Estática Inicial da Linha

No início da análise dinâmica do conjunto bóia-linha, faz-se necessária a obtenção das forças que atuam sobre a bóia de superfície no instante inicial t_0 . Neste instante, a parcela da força devido à ação da linha é obtida através da configuração estática da mesma.

Numa primeira etapa, obtém-se, por diferenças finitas, uma aproximação para a configuração inicial da linha utilizando-se a solução das equações de equilíbrio de uma catenária elástica, sem rigidez à flexão onde são considerados apenas os efeitos do peso próprio e empuxo (Lustosa, 2000). Considerando-se esta aproximação, efetua-se a análise estática da linha considerando-se a rigidez à flexão da estrutura e aplica-se, incrementalmente, a ação da correnteza, e, se presente, a ação de flutuadores, de forma a facilitar a convergência numérica.

As equações de equilíbrio da estrutura, discretizada por elementos finitos e representadas na sua forma incremental iterativa pela equação (2.11.4), não consideram os efeitos de inércia nesta etapa.

5.2. Comprimento Submerso da Bóia de Superfície

Para a correta avaliação das forças hidrodinâmicas, faz-se necessária a obtenção do comprimento submerso instantâneo da bóia de superfície. Para isto,

encontra-se o ponto comum entre o eixo longitudinal da bóia, e a superfície livre. Este procedimento é equivalente a encontrar-se o ponto comum entre uma superfície bi-dimensional curva e uma linha reta no espaço. Como a superfície livre move-se com o tempo, e a posição da bóia é obtida durante o processo de solução, este ponto comum é determinado em cada instante de tempo. Desta forma, tem-se que a superfície livre e o eixo longitudinal da bóia são, respectivamente, expressos pelas equações

$$z = \eta(x, t) \quad (5.2.1)$$

$$z = A_1(t)x + C_1(t) \quad (5.2.2)$$

e as coordenadas do ponto comum (x_p, z_p) devem então satisfazer à equação

$$T(x_p, t) = \eta(x_p, t) - [A_1(t)x_p + C_1(t)] \quad (5.2.4)$$

equivalente a encontrar-se o zero de $T(x_p, t)$. Neste processo emprega-se um algoritmo que é combinação de métodos de interpolação da bissecção, secante e inverso quadrado (Brent, 1973), onde encontra-se um ponto x_p no qual a função $T(x_p, t)$ muda de sinal, que também será um ponto próximo de zero, caso $T(x_p, t)$ seja uma função contínua. Por ser um algoritmo iterativo, este se torna mais eficiente com uma boa estimativa inicial para x_p . Neste caso, escolhe-se as coordenadas do ponto de intersecção do eixo longitudinal do cilindro com a superfície média como uma estimativa para este valor inicial (figura 5.1). Obtida a coordenada x_p , o limite superior de integração L_{sup} , utilizado nas integrais descritas nas seções 4.2.4.1 a 4.2.4.3, fica definido através da seguinte relação:

$$\begin{cases} L_{sup} = \frac{x_p - x_{cm}}{\sin \alpha}, \beta \neq 0 \\ L_{sup} = \eta(x_{cm}, t) - z_{cm}, \beta = 0 \end{cases} \quad (5.2.5)$$

onde β é o ângulo de inclinação da bóia cilíndrica com a vertical.

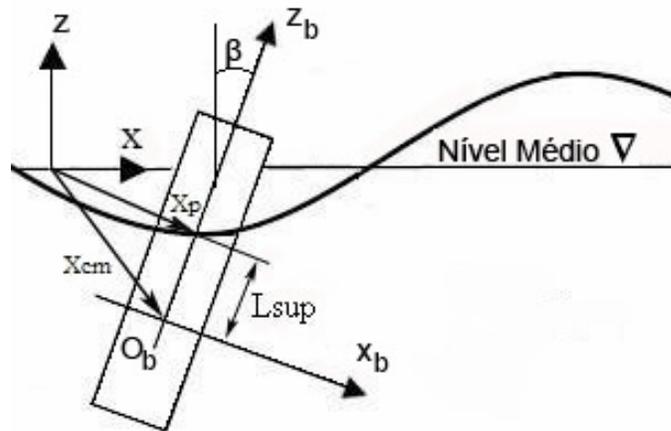


Figura 5.1 - Vetores posição X_{cm} e X_p utilizados no cálculo de L_{sup} .

5.3. Integração Numérica de Forças e Momentos

Da obtenção do comprimento molhado da bóia, são avaliados as forças e momentos hidrodinâmicos, através de integração numérica nas coordenadas espaciais. No presente estudo emprega-se a regra da quadratura recursiva de Simpson (Gander, 2000), onde o número de subdivisões ao longo da bóia é dobrado caso uma tolerância de erro ε_1 seja ultrapassada.

Considerando-se, por exemplo, a integral na forma

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (5.3.1)$$

uma primeira estimativa para I é efetuada aplicando-se a regra de Simpson no intervalo $h = b - a$, através da relação:

$$I_1 = \frac{h}{6} (f(a) + 4f(c) + f(b)) \quad (5.3.2)$$

onde a função $f(x)$ é calculada nos pontos a , b e no ponto intermediário $c = a + b/2$. A seguir, uma nova estimativa I_2 é obtida aplicando-se o mesmo procedimento em dois subdomínios de mesmo comprimento $[a, c]$ e $[c, b]$ do intervalo h , considerando-se os pontos intermediários $d = a + c/2$ e $e = c + b/2$. Desta forma obtém-se

$$I_2 = \frac{h}{6}(f(a) + 4f(d) + 2f(c) + 4f(e) + f(b)) \quad (5.3.3)$$

Da combinação de I_1 e I_2 , uma estimativa com maior acurácia (Moler, 2004) pode ser obtida

$$Q = I_2 + (I_2 - I_1)/15 \quad (5.3.4)$$

e, caso a relação

$$|I_2 - Q| \leq \varepsilon_1 \quad (5.3.5)$$

seja satisfeita, o valor de Q é adotado como a aproximação da integral I . Caso contrário, o intervalo h é subdividido em dois outros e o procedimento descrito é mais uma vez aplicado a cada intervalo, separadamente, até que a relação (5.3.5) seja satisfeita.

No presente estudo, a tolerância de erro ε_1 , necessária para o controle deste processo, foi escolhida de maneira que uma redução de seu valor resulte em uma variação desprezível nos resultados.

Para reduzir os efeitos transientes causados pela natureza impulsiva do carregamento no início da análise dinâmica, os valores das forças são gradualmente aumentados, até alcançarem seus valores reais nos primeiros 50 segundos da análise. Para isto, multiplica-se o módulo das forças e momentos atuais por uma função polinomial suavizadora de segunda ordem, freqüentemente referida como função rampa (Mekha & Roesset, 1998). Os coeficientes desta função são definidos de modo que o valor de sua derivada seja igual a zero no

instante inicial da análise ($t = t_0$), e que possua o valor unitário em $t = t_0 + 50s$. Este procedimento foi utilizado para garantir um início de movimento suave, facilitando a convergência numérica e minimizando eventuais vibrações axiais transientes sofridas pela linha devido a um carregamento do tipo degrau resultante da inclusão dos novos esforços no modelo numérico.

5.4. Solução das Equações de Movimento

As equações de movimento da unidade flutuante em (2.2.7) a (2.2.10) são um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares, onde \vec{U} , β , \vec{V} e Ω_y são as variáveis de estado a serem obtidas. No presente trabalho, as equações de movimento da unidade flutuante foram implementadas no programa Simulink através de um diagrama de blocos (figura 5.2), onde utiliza-se o método de Runge-Kutta de quinta ordem com controle de passo adaptável (Shampine, 1994) para a solução do sistema. Deseja-se obter a posição, a velocidade e a aceleração da bóia de superfície no instante de tempo $t = t + h$, conhecendo-se a configuração no instante de tempo t . Para isto, o intervalo de tempo escolhido h é fixo ao longo da análise, e é dividido em sub-intervalos de diferentes tamanhos, calculados iterativamente pelo método de modo a atingir-se a acurácia desejada. As equações de movimento da bóia são impostas em cada sub-intervalo, e as diversas forças recalculadas, com exceção da força de tração da linha, mantida constante neste processo. Atingido o instante de tempo $t = t + h$, efetua-se então a análise da dinâmica da linha flexível do instante de tempo t ao instante de tempo $t = t + h$, em um único passo, através do método de Newmark acoplado ao método iterativo de Newton-Raphson, descritos no capítulo 2. Obtém-se a nova configuração da linha e a força de tração no ponto de fixação à bóia é atualizada no modelo da bóia de superfície.

A relação entre o tamanho do subintervalo de tempo dh e o erro estimado é dado pela equação (Dormand & Prince, 1980)

$$dh_0 = \mu dh_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.2} \quad (5.4.1)$$

onde μ é um coeficiente escolhido artificialmente – adotado como 0.8 no presente estudo para todas análises - e Δ_1 é o erro produzido quando o subintervalo de tempo é assumido como dh_1 . A cada subintervalo de tempo, o método fornece o valor das variáveis de estado e o erro local - erro estimado para estas variáveis de estado. O erro local é obtido da diferença entre as soluções do método de Runge-Kutta de quinta ordem e o método de quarta ordem para as diversas variáveis de estado, e Δ_1 é obtido do maior erro destas variáveis. Δ_0 é a acurácia desejada na análise e o seu valor é fornecido pela relação

$$\Delta_0 = \max(\varepsilon_2 \times |x|, 10^{-6}) \quad (5.4.2)$$

onde $|x|$ é a variável de estado que apresentou o maior erro local. Na equação (5.4.2) ε_2 é a tolerância relativa e mede o erro relativo ao valor da variável de estado. Logo, é uma porcentagem do valor da variável de estado. O valor de 10^{-6} representa o erro absoluto, maior erro aceitável quando a variável $|x|$ se aproxima de zero. Escolheu-se o valor de ε_2 através de testes numéricos.

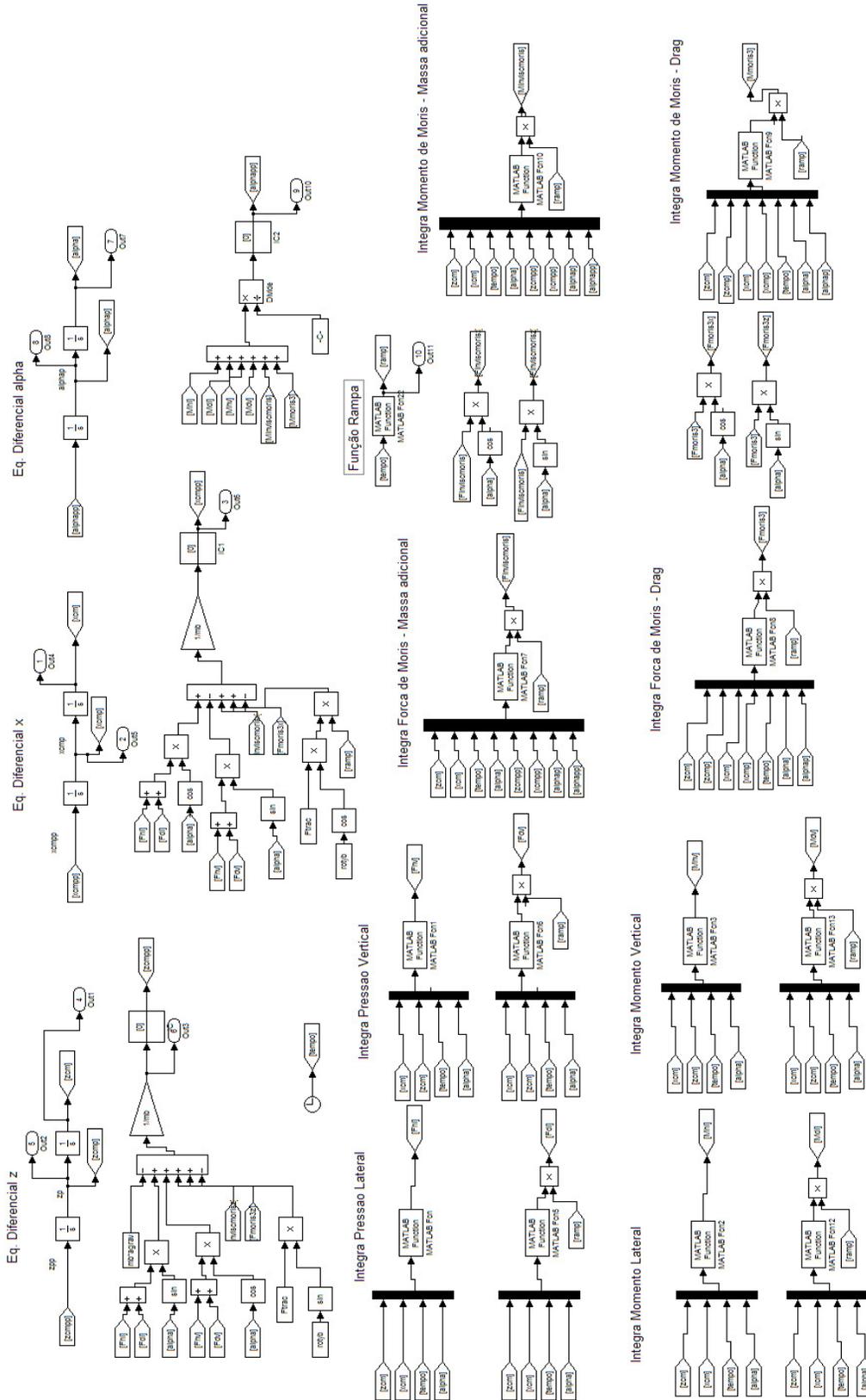


Figura 5.2 - Diagrama de blocos representativo do modelo dinâmico da bôia de superfície implementado no programa Simulink.

5.5. Análise Dinâmica da Linha

Na obtenção da força no cabo \bar{F}_l no instante de tempo $t = t + h$, efetua-se a análise dinâmica da linha a partir de sua última configuração, através do método de integração implícita de Newmark acoplado ao método iterativo de Newton-Raphson descritos no capítulo 2, no intervalo de tempo h , onde o deslocamento, a velocidade e a aceleração da bóia no instante $t = t + h$ são impostos à extremidade superior da linha. Este procedimento é descrito na seção 2.11.4 e se traduz na eliminação dos graus de liberdade que sofrem estas prescrições no modelo de elementos finitos, com a devida aplicação dos esforços equivalentes a esta prescrição.

Como critério de convergência numérica, adota-se o módulo do vetor desbalanceamento, na forma

$$tol \leq \|R - F\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{ngl} (R_i - F_i)^2} \quad (5.5.1)$$

onde ngl é o número de graus de liberdade do modelo de elementos finitos.

Após a convergência numérica, obtém-se a configuração da linha para o novo instante de tempo, e a força \bar{F}_l . Nesta etapa, consideram-se os efeitos de inércia nas equações de equilíbrio da estrutura.