4
Dinâmica da Bóia de Superfície e Avaliação dos Esforços

O sistema físico considerado neste estudo caracteriza-se por uma bóia de superfície presa ao fundo marinho através de um cabo extensível. O sistema bóia-cabo tem o seu movimento restrito a um único plano e está sujeito a incidência de ondas marítimas de superfície, das correntes marítimas e dos esforços de peso e de empuxo, todos atuantes neste plano. Estes geram esforços na estrutura excitando-a.

Inicialmente, para caracterizar o movimento resultante da dinâmica da bóia acoplada à linha, obtêm-se, na seção 4.1, as equações de movimento de corpo rígido da bóia que devem ser integradas numericamente no domínio do tempo, associadas à representação estrutural e hidrodinâmica da linha, que no presente estudo, é considerada através do método de elementos finitos, como descrito no capítulo 2.

Na seção 4.2, a avaliação dos esforços sobre a estrutura flutuante é descrita. A obtenção destas forças é uma das importantes etapas da análise da dinâmica de uma estrutura flutuante, que envolve a complexidade da interação do fluido com a estrutura. A natureza randômica dos efeitos do fluido sobre estruturas, causados por ondas marítimas, e as dificuldades inerentes ao procedimento de representá-los, até mesmo com modelos matemáticos sofisticados, tornam o problema desafiador do ponto de vista numérico e computacional.

4.1.
Equações de Movimento

O movimento da bóia é descrito utilizando-se dois sistemas de coordenadas: um inercial e outro solidário à bóia, conforme mostrado na figura 4.1. O sistema fixo $Oxyz$ tem a origem situada no plano da superfície média da água com o eixo z vertical e o eixo x é paralelo à direção de propagação da onda. O sistema $O_b x_b y_b z_b$ tem o eixo z_b na direção da linha longitudinal do corpo e a origem O_b no centro de massa do corpo rígido (bóia).

No caso de movimento bi-dimensional, a definição da posição inicial do sistema $O_b x_b y_b z_b$, que é solidário à bóia, em relação ao sistema $Oxyz$ é obtida através do vetor posição da origem O_b em relação ao sistema fixo e o ângulo de inclinação da bóia representado pela posição relativa dos eixos x e x_b.

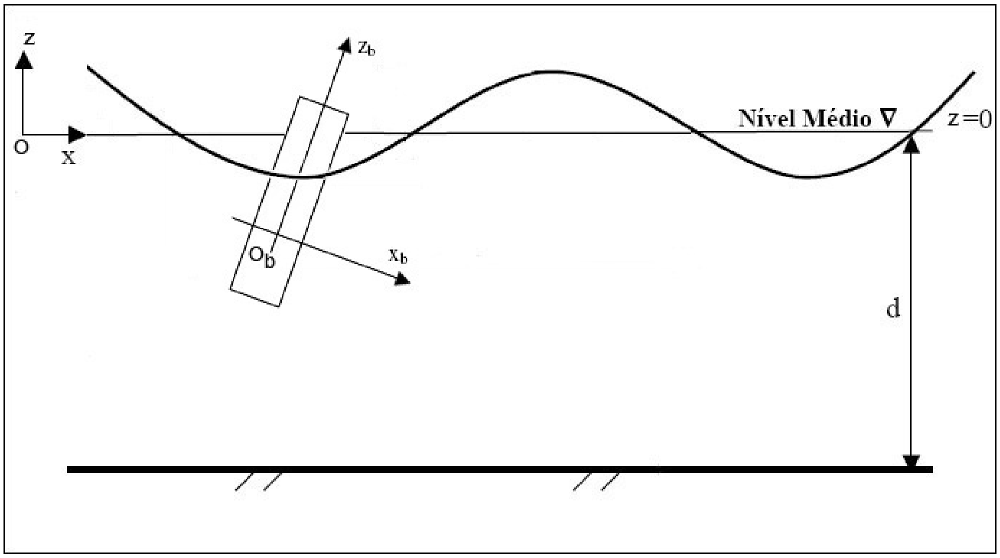

Figura 4.1 - Sistemas de coordenadas inercial $Oxyz$ e estrutural $O_b x_b y_b z_b$.

O movimento plano de corpo rígido da bóia de superfície caracteriza-se pelo vetor deslocamento $\vec{U}$, que expressa a variação da posição da origem do sistema estrutural $O_b x_b y_b z_b$ medido em relação ao sistema inercial $Oxyz$, e o movimento de rotação, caracterizado pelo ângulo β medido entre os eixos x e x_b.

As coordenadas X_b de um vetor escrito no sistema de coordenadas estrutural ($O_b x_b y_b z_b$) são transformadas para o sistema de coordenadas inercial ($Oxyz$), utilizando-se a expressão:

$$\vec{X} = T\vec{X}_b - \vec{U} \tag{4.1.1}$$

com a matriz transformação

$$T = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

associada ao ângulo de rotação β, em relação ao eixo y.

As equações de movimento do bóia, para o caso tridimensional, são obtidas em função das forças e momentos externos e das propriedades de massa e inércia do corpo, fazendo-se uso das equações de movimento de Newton e Euler. Desta forma, tem-se (Ma & Patel, 2001):

$$M\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \tag{4.1.3}$$

$$I\frac{d\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\Omega}\times I\vec{\Omega} = \vec{N} \tag{4.1.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{U}}}{\mathrm{dt}} = \vec{V} \tag{4.1.5}$$

$$B\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{\Omega} \tag{4.1.6}$$

onde as equações (4.1.3) e (4.1.4) são, respectivamente, a equações de movimento do centro de massa e a equação de quantidade de movimento angular, $\vec{\mathrm{U}}$ e $\vec{V}$ são os vetores deslocamento e velocidade da origem do sistema de coordenadas $O_b x_b y_b z_b$, $\vec{\theta}$ é o vetor composto pelos ângulos de Euler $\left(\vec{\theta} = \{\alpha, \beta, \gamma\}\right)$, $\vec{\Omega}$ é o vetor velocidade angular, $\vec{F}$ é o vetor força externa, $\vec{N}$ é o momento externo em relação ao centro de massa da bóia, M é a matriz de massa e I a matriz de inércia. A matriz B relaciona a velocidade angular com as derivadas temporais dos ângulos de Euler (β e γ) e é representada por (Ma & Patel, 2001):

$$B = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ \sin\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por conveniência, as equações de translação (4.1.3) e (4.1.5) encontram-se escritas em função de componentes vetoriais em $Oxyz$ enquanto as equações de rotação (4.1.4) e (4.1.6) estão escritas em função de componentes em $O_b x_b y_b z_b$, onde a matriz de inércia I, referida a eixos de simetria (principais de inércia) da bóia, é diagonal e constante ao longo da análise no tempo com $I_{xx} = I_{yy}$ (bóia cilíndrica).

As equações em (4.1.3) a (4.1.6) representam um sistema de doze equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas sendo $\vec{\mathrm{U}}$, $\vec{V}$, $\vec{\theta}$ e $\vec{\Omega}$ as variáveis de estado. As não-linearidades presentes devem-se: a) à matriz transformação B, que possui termos que são produtos de funções trigonométricas dos ângulos de Euler; b) a presença do produto $\vec{\Omega} \times I\vec{\Omega}$; e c) às forças e momentos do fluido, que dependem, de forma não-linear, da elevação das ondas e das velocidades das partículas do fluido e às forças devido ao deslocamento da estrutura também dependem de termos não-lineares da cinemática do corpo e do fluido. No entanto, quando reduzidas a problemas bi-dimensionais, estas equações são simplificadas e passam a apresenta-se da seguinte forma:

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \tag{4.1.7}$$

$$I_{yy} \frac{d\Omega_y}{dt} = N_y \tag{4.1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{U}}}{\mathrm{dt}} = \vec{V} \tag{4.1.9}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \Omega_y \tag{4.1.10}$$

com as não-linearidades anteriormente descritas presentes apenas na obtenção das forças e dos momentos.

A bóia utilizada nas análises é um cilindro com uma distribuição uniforme da massa. Eventualmente inclui-se um lastro, de forma a aumentar a estabilidade, este modelado como massa pontual, e localizado em sua extremidade inferior. Desta forma o elemento m_T da matriz de massa M na diagonal principal, equação (4.1.7), é a soma da massa do lastro (m_l) com a massa do cilindro (m_c).

$$m_T = m_c + m_l \tag{4.1.11}$$

O emprego do lastro move o centro de massa do centro geométrico da bóia. Assim, a coordenada da nova posição do centro de massa da bóia, relativamente ao sistema $O_b x_b y_b z_b$ é obtida para o lastro localizado no fundo da bóia:

$$\bar{z} = \frac{m_l + (h/2)}{m_T} \tag{4.1.12}$$

onde $\bar{z}$ é a coordenada do centro geométrico do cilindro em relação ao centro de massa do conjunto cilindro-lastro, e h é a altura do cilindro.

Desta forma, o momento de inércia I_{yy} na equação (4.1.8), é definido em relação ao centro de massa da bóia, é obtido:

$$I_{yy} = \underbrace{\frac{1}{4} m_c r^2 + \frac{1}{12} m_c h^2}_{1} + \underbrace{m_c \bar{z}^2}_{2} + \underbrace{m_l \left(\frac{h}{2} - \bar{z} \right)^2}_{3} \tag{4.1.13}$$

onde a parcela 1 da equação (4.1.13) é o momento de inércia do cilindro com distribuição uniforme de massa em relação ao seu centro de geométrico, a parcela 2 é a correção deste momento de inércia para o centro de gravidade da bóia levando em consideração o lastro através do teorema dos eixos paralelos (Merian, 2003) e a parcela 3 é o momento de inércia do lastro, uma massa pontual, em relação ao centro de massa da bóia.

4.2. Avaliação dos Esforços

As teorias disponíveis na literatura para avaliação dos esforços resultantes da ação de ondas sobre estruturas *offshore*, verificadas e calibradas através de resultados experimentais obtidos de monitoramentos no mar, reproduzem com boa acuidade as forças que o fluido exerce em diferentes tipos de estruturas *offshore* (Chakrabarti, 1987). A avaliação destas forças depende do tipo e das dimensões da estrutura considerada e do regime do escoamento definido ao redor da mesma. Assim, diferentes tipos de formulações deverão são utilizadas; Chakrabarti (1987) reporta três maneiras distintas para esta representação: a formulação de Morison, a

Teoria de Froude-Krylov e a Teoria da Difração. Neste trabalho, utiliza-se uma combinação dos dois primeiros, como será demonstrado na seção 4.2.4.

4.2.1.
Formulação de Morison

A formulação de Morison (1950) foi desenvolvida com o intuito de descrever a força horizontal que atua em um cilindro vertical fixo ao fundo marinho e que se estende até a superfície livre, sujeito à ação de ondas. Esta força resulta da composição de duas componentes: inércia e arrasto.

O princípio físico envolvido na avaliação da força de inércia é de que uma partícula de água movendo-se devido à passagem de uma onda adquire uma certa quantidade de movimento. Esta partícula, ao ser desviada pela presença de uma estrutura cilíndrica, é acelerada para depois desacelerar-se. Este movimento requer a realização de trabalho pela aplicação de uma força no cilindro capaz de variar a sua quantidade de movimento. A força incremental de inércia, atuando em um segmento dl do cilindro, é proporcional à aceleração da partícula fluida no centro do cilindro, considerando que o corpo esteja ausente. Esta parcela diferencial é obtida através da seguinte equação:

$$df_m = C_m \rho \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\partial u}{\partial t} dl \qquad (4.2.1)$$

onde C_m é o coeficiente de inércia, $\frac{\partial u}{\partial t}$ é a componente horizontal da aceleração da partícula do fluido, D é o diâmetro do cilindro e ρ é a massa específica do fluido em que o corpo encontra-se submerso.

A força de arrasto é causada pela diferença entre a pressão na superfície frontal do cilindro, em que as ondas incidem, e a pressão no seu dorso. Como conseqüência do escoamento viscoso, temos, ao redor do cilindro, a separação da camada limite, o que resulta em uma região de baixa pressão à jusante do cilindro. Deste diferencial de pressão resulta uma força que atua no cilindro na direção da velocidade instantânea da partícula de água. Observe-se que a presença de ondas de superfície causa o movimento oscilatório das partículas de água e, na ausência de correnteza, provoca a inversão da região de baixa pressão a cada meio ciclo de onda. A diferencial da parcela de arrasto é obtida através da equação:

$$df_d = \frac{1}{2} C_d \rho D^2 |u| u dl \qquad (4.2.2)$$

onde C_d é o coeficiente de arrasto, u é a velocidade horizontal do fluido e $|u|$ é o seu valor absoluto, utilizado de modo que a força resultante atue sempre no sentido da velocidade.

Nas equações (4.2.1) e (4.2.2), C_m e C_d são coeficientes adimensionais obtidos experimentalmente.

A formulação de Morison foi estendida por Chitrapu (1998) para o caso de membros inclinados e de cilindros que efetuam um movimento oscilatório sujeito à ação de ondas e correntezas. Neste caso, cada componente é obtida considernado-se o movimento relativo do fluido em relação à superfície do flutuante,

$$F = \underbrace{C_m \rho \frac{\pi}{4} D^2 \left(\frac{du_l}{dt} - \dot{v} \right)}_{f_m} + \underbrace{C_d \frac{1}{2} \rho D |u_l \pm U - v| (u_l \pm U - v)}_{f_d} \qquad (4.2.3)$$

onde:

u_l = Velocidade da partícula do fluido normal ao cilindro

$\frac{du_l}{dt}$ = Aceleração da partícula do fluido normal ao cilindro

v_l = Velocidade da estrutura

$\dot{v}_l$ = Aceleração da estrutura

U = Velocidade da correnteza

C_m = Coeficiente de massa adicional

C_d = Coeficiente de arrasto

Na equação (4.2.3), o termo quadrático para a força de arraste f_d resulta não-linear e é expresso em função da velocidade relativa entre o fluido e o corpo. Nesta equação, apenas as componentes normais ao eixo do corpo das velocidades e acelerações relativas são consideradas. Desta forma, considera-se a estrutura alinhada com a direção do fluxo incidente, e, portanto, efeitos como vibrações induzidas por vórtices (VIV) e forças de sustentação (LIFT), não são consideradas. Na literatura são propostas extensões da formulação de Morison (Senra, 2004) que consideram também as componentes axiais do fluxo incidente no cálculo da força tangencial que atua no corpo, porém estas não foram consideradas no presente trabalho.

A formulação de Morison é adequada às situações em que a componente do arrasto é importante. Este é o caso em que a dimensão da estrutura na direção de propagação da onda é menor do que o correspondente comprimento da onda, condição em que os efeitos viscosos do escoamento não devem ser desconsiderados.

4.2.2. Teoria de Froude-Krylov

O modelo de Froude-Krylov se aplica quando o escoamento ao redor da estrutura não apresenta separação considerável da camada limite e nem grandes alterações no campo de pressão do fluido através da reflexão de ondas (Chakrabarti, 1987). Nesta condição, os efeitos da inércia são dominantes relativamente aos viscosos, e o corpo ainda é relativamente esbelto, e, portanto, o fluxo das partículas fluidas não é alterado significativamente.

Pela teoria de Froude Krylov, assume-se que as forças atuantes na estrutura são obtidas da integração da pressão dinâmica no fluido, gerada pela passagem da onda incidente na superfície do corpo. A pressão dinâmica é obtida considerando-se o modelo de ondas em que a presença do corpo não é considerada. As equações necessárias para o cálculo das componentes horizontal e vertical da força, nas direções x e z, são:

$$F_x = C_H \iint_S p n_x dS \tag{4.2.4}$$

e

$$F_z = C_V \iint_S p n_z dS \tag{4.2.5}$$

onde C_H e C_V são, respectivamente, os coeficientes horizontal e vertical de força, n_x e n_z são, respectivamente, as componentes nas direções x e z do vetor normal à superfície do corpo, e dS é uma área infinitesimal da estrutura submersa. Devido às hipóteses utilizadas, esta teoria apresenta aplicações práticas limitadas porque o efeito da difração de onda é considerado pequeno, e assim, é possível considerá-lo na forma de termo de correção através dos coeficientes de força (C_H e C_V).

4.2.3.
Teoria da Difração

Nos escoamentos em que as dimensões da estrutura são comparáveis ou maiores em relação ao comprimento de onda, a presença da estrutura provoca alterações significativas no fluxo das partículas do fluido devido à difração, à interferência e à radiação de ondas pelo corpo. Desta forma, as hipóteses adotadas nas teorias descritas anteriormente não se aplicam a este caso e um método de solução que considere estes efeitos deve ser utilizado.

Pela teoria de ondas considerada anteriormente, os campos de velocidade, da aceleração e da pressão no domínio do fluido são obtidos sem considerar-se a presença do corpo. Já na teoria da difração, as dimensões e forma do corpo são consideradas através da condição de contorno: a componente da velocidade da partícula fluida normal à superfície do corpo é igual à velocidade do corpo naquele ponto. Este é um caso mais geral da teoria de ondas desenvolvida no capítulo 3.

De maneira similar ao que foi demonstrado na teoria de ondas, o problema deve ser resolvido para o potencial de velocidade Φ e, neste caso, o potencial de velocidade Φ é composto do potencial de velocidade Φ_0 devido às ondas incidentes e do potencial Φ_s devido às ondas difratadas pela superfície da estrutura,

$$\Phi = \Phi_o + \Phi_s \,.$$

O potencial de velocidade devido às ondas incidentes é obtido sem levar-se em consideração a presença do corpo; e pode ser obtido empregando-se o mesmo procedimento descrito no capítulo 3. Soluções completas para o potencial de velocidade Φ podem ser obtidas analiticamente apenas para alguns casos que se encontram disponíveis na literatura (Chakrabarti, 1987). Nos casos mais gerais, a teoria deve ser resolvida através de métodos numéricos distintos.

4.2.4.
Forças e Momentos Hidrodinâmicos

As formulações brevemente apresentadas nas seções 4.2.1 a 4.2.3 não são exclusivas, e podem ser utilizadas concomitantemente. As forças e momentos que atuam na estrutura flutuante, e utilizados no presente trabalho, baseiam-se na hipótese de corpos esbeltos, isto é, quando a dimensão característica da estrutura é pequena em relação ao comprimento de onda. Sua grande vantagem é o menor custo computacional exigido e o fato de poder ser implementado em uma análise no domínio do tempo.

Com esta formulação, as forças atuantes na estrutura são obtidas da integração das forças que atuam em cada pequeno segmento do corpo esbelto. É importante salientar que esta formulação apresenta resultados com erros da ordem de $\left(\frac{D}{L}\right)^3$, onde D é o diâmetro do cilindro e L é o comprimento de onda, quando aplicada ao tipo de estrutura em questão, segundo considerações efetuadas por Rainey (1989). Assim, enquanto a relação $\frac{D}{L}$ for pequena o suficiente, a aplicação da teoria de corpos esbeltos apresenta resultados satisfatórios.

Resultados provenientes da aplicação deste tipo de abordagem foram comparados por Kim e Chen (1994) com os obtidos utilizando a teoria da difração para o caso de uma plataforma fixa reticulada (*jaquetas*). É mostrado que para uma escala do comprimento característico da estrutura relativamente pequena (menor que 20%) em relação ao comprimento de onda, os resultados obtidos com o uso de ambos os modelos são muito próximos.

Uma típica formulação utilizando a abordagem de corpos esbeltos é o emprego das equações de Morison descritas anteriormente, onde a força atuante em cada segmento do corpo é decomposta em duas parcelas: uma de inércia e outra de arraste, esta associada aos efeitos viscosos do escoamento.

Neste trabalho, utiliza-se uma formulação similar à empregada em Chitrapu et al. (1998), onde a parcela viscosa da força é considerada igual à parcela de arraste da formulação de Morison, e a parcela não viscosa da força é considerada a soma de uma força de Froude-Krylov com a parcela de inércia da fomulação de Morison.

A força de Froude-Krylov é estimada através da integração da pressão dinâmica do fluido sobre a superfície submersa do cilindro considerando-se o fluxo do fluido não sendo perturbado pela presença do corpo. Desta forma, a força total na bóia pode ser decomposta como:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_s + \vec{\boldsymbol{F}}_f + \vec{\boldsymbol{F}}_m + \vec{\boldsymbol{F}}_d + \vec{\boldsymbol{F}}_l \qquad (4.2.6)$$

onde $\vec{\boldsymbol{F}}_s$ é a força hidrostática (empuxo), $\vec{\boldsymbol{F}}_f$ é a força de Froude-Krylov, $\vec{\boldsymbol{F}}_m$ é a força de inércia devido à aceleração relativa entre a estrutura e o fluido, $\vec{\boldsymbol{F}}_d$ é a força de arrasto proporcional à velocidade relativa entre o fluido e a estrutura, e $\vec{\boldsymbol{F}}_l$ é a força da linha sobre a estrutura, que varia de acordo com o deslocamento da mesma.

4.2.4.1.
Componente Hidrostática $\left(\vec{\boldsymbol{F}}_s\right)$

É a parcela resultante devido à pressão hidrostática. A integral utilizada para o cálculo desta parcela é obtida da expressão:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_s = \iint_s p_h \hat{n} dS \qquad (4.2.7)$$

onde S é a área submersa do corpo, $\hat{n}$ é o vetor unitário normal à superfície, e p_h é a pressão hidrostática, obtida do primeiro termo da equação (3.3.17).

A integração na equação (4.2.7) é obtida sobre a superfície lateral e no tampo inferior da bóia cilíndrica. A ação da pressão hidrostática na superfície lateral corresponde ao empuxo estático transversal que resulta em forças e momentos restauradores para ângulos não-nulos do cilindro com a vertical. A ação da pressão no tampo inferior do cilindro resulta no empuxo axial que, juntamente com o empuxo estático transversal, resultará na força de restituição hidrostática (Ma et al., 2001).

Para a solução da integral na equação (4.2.7), utiliza-se o sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z_b) embarcado na estrutura (Fig 4.2). Para um cilindro com diâmetro D e uma altura h, as coordenadas cartesianas do sistema $O_b x_b y_b z_b$ resultam em:

$$x_b = \frac{D}{2}\cos\theta$$
$$x_b = \frac{D}{2}\sin\theta \qquad (4.2.8)$$
$$z_b = z_b$$

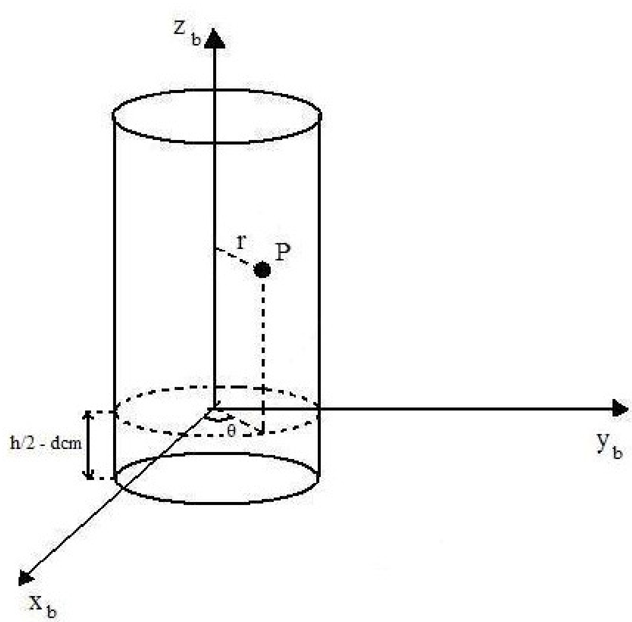

Figura 4.2 - Coordenadas cilíndricas utilizadas.

e a área infinitesimal dS da superfície lateral do cilindro é expressa por:

$$dS = \frac{D}{2} dz_b d\theta \qquad (4.2.9)$$

onde θ é o ângulo tomado a partir do eixo x_b. Da equação (3.3.17), p_h está expresso em função das coordenadas no referencial inercial $Oxyz$. Assim, duas transformações de coordenadas são necessárias para efetuar-se a integração da pressão p_h: a primeira é a transformação do sistema inercial $Oxyz$ para o sistema embarcado na estrutura $O_b x_b y_b z_b$ obtida da relação na equação (2.1.1), onde

$$x = x_b \cos\beta + z_b \sin\beta + x_{cm} \tag{4.2.10}$$

$$z = -x_b \sin\beta + z_b \cos\beta + z_{cm} \tag{4.2.11}$$

e a segunda é a transformação das coordenadas cartesianas $O_b x_b y_b z_b$ para o sistema de coordenadas cilíndricas obtida das equações (4.2.8) e (4.2.9). Desta forma, expressa-se a pressão p_h em função das coordenadas z_{cm}, β, θ e z_b, através da substituição de (4.2.11) e (4.2.8) no primeiro termo de (3.3.17)

$$p_h = -\rho g\left[-\frac{D}{2}\cos(\theta)\sin(\beta) + z_b\cos(\beta) + z_{cm}\right] \tag{4.2.12}$$

onde as variáveis de estado do cilindro z_{cm} e β caracterizam a posição relativa entre o sistema de coordenadas inercial (figura 4.3) e o sistema de coordenadas embarcado na estrutura em cada instante de tempo, e θ e z_b são as variáveis de integração das coordenadas cilíndricas. A componente de $\vec{\boldsymbol{F}}_s$ na direção x_b, devido à ação da pressão hidrostática na superfície lateral do cilindro, é obtida da integração em (4.2.7), com $\hat{n} = n_{x_b} = -\cos\theta$, em toda a parede lateral do cilindro entre 0 e 2π,

$$F_{S_{x_b}} = \int_0^{2\pi}\int_{-\left(\frac{h}{2}-\bar{Z}\right)}^{L\text{sup}} p_h(-\cos\theta)\frac{D}{2}dz_b d\theta \tag{4.2.13}$$

com $\bar{Z}$ é definido pela equação (4.1.12) e $\left(\dfrac{h}{2}-\bar{Z}\right)$ é a distância do centro de gravidade da bóia, que coincide com a origem do sistema de coordenadas embarcado no corpo, ao centro do tampo inferior. A obtenção do limite superior de integração $L_{\sup}$ será descrito na seção 5.2.

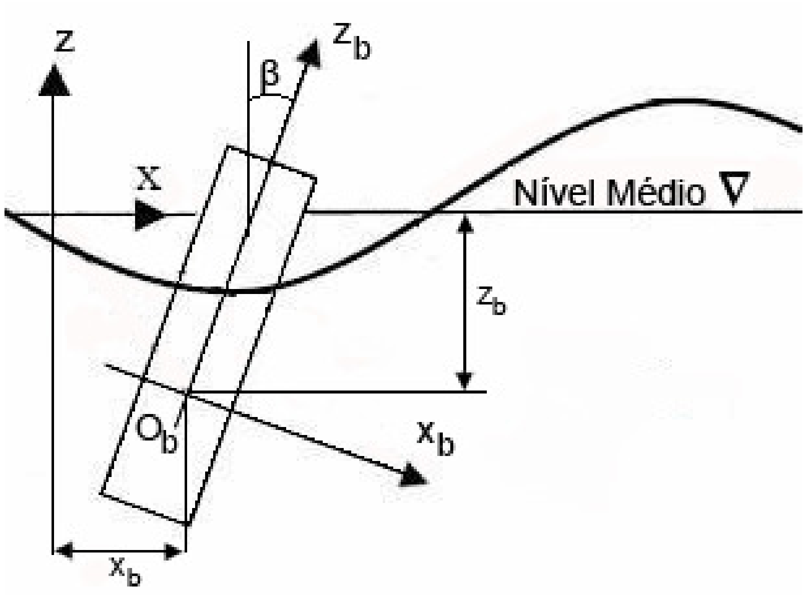

Figura 4.3 - Posição relativa entre os sistemas de coordenada caracterizado por x_{cm}, z_{cm} e β.

O momento em relação ao eixo y_b, que cruza o centro de gravidade da bóia, devido à ação da pressão hidrostática na superfície lateral do cilindro, é obtido da expressão

$$M_{S1y_b} = \int_0^{2\pi} \int_{-\left(\frac{h}{2}-\bar{Z}\right)}^{L\sup} p_h \left(-\cos\theta\right)\left(z_b\right) \frac{D}{2} dz_b d\theta \qquad (4.2.14)$$

Para integrar-se a equação (4.2.7) sobre o tampo inferior do cilindro, adota-se o mesmo procedimento empregado na integração sobre a superfície lateral. Para o emprego do sistema de coordenadas cilíndricas (Fig. 4.2), emprega-se a transformação de coordenadas:

$$x_b = r\cos\theta$$

$$y_b = r\sin\theta \qquad (4.2.15)$$

$$z_b = -\left(\frac{h}{2} - \bar{Z}\right)$$

e a área infinitesimal dS no tampo inferior do cilindro resulta em:

$$dS = rdrd\theta \tag{4.2.16}$$

onde θ é o ângulo tomado a partir do eixo x_b e r é a distância radial entre o centro do tampo inferior e o ponto de integração. Aplicando-se $\hat{n} = n_{z_b} = 1$ na equação (4.2.7), a decomposição da força $\vec{F}_s$ na direção z_b fornece

$$F_{s_{z_b}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} p_h rdrd\theta \tag{4.2.17}$$

O momento em relação ao eixo y_b gerado pela ação desta força é

$$M_{S2y_b} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} p_h \cos\theta rdrd\theta \tag{4.2.18}$$

e o momento total gerado pela parcela hidrostática é

$$M_h = M_{S1y_b} + M_{S2y_b} \tag{4.2.19}$$

4.2.4.2. Componente de Froude-Krylov $\left(\vec{F}_f\right)$

Esta componente é obtida da pressão dinâmica, resultante da passagem de uma onda incidente. No cálculo da pressão dinâmica, obtida do segundo termo da equação (3.3.16), desconsidera-se a perturbação que o corpo causa no fluxo ao seu redor. Por esta condição, conhecida como Hipótese de Foude-Krylov, a difração das ondas gerada pelo corpo é desprezada. No cálculo desta parcela emprega-se a seguinte expressão

$$\vec{\boldsymbol{F}}_f = \iint_S p_d \hat{n} dS \qquad (4.2.20)$$

onde S é a área submersa do corpo, $\hat{n}$ é o vetor unitário normal à superfície e p_d é a pressão dinâmica da onda incidente.

A expressão da integral de superfície em (4.2.20), com a transformação pelo Teorema de Gauss, resulta na integral sobre a superfície lateral submersa do corpo em que o integrando é o gradiente de pressão ∇p_d aplicado sobre o volume submerso. Assim,

$$\vec{\boldsymbol{F}}_f = \int_V \nabla p_d dV \qquad (4.2.21)$$

onde V representa o volume submerso do corpo. Para o cálculo da integral em (4.2.21) utiliza-se o sistema de coordenadas $O_b x_b y_b z_b$, e a força na direção x_b é representada por

$$F_{f_{x_b}} = \int_V \frac{\partial p_d}{\partial x_b} dV \qquad (4.2.22)$$

e p_d, escrito em relação ao sistema $O_b x_b y_b z_b$ através da substituição de (4.2.10) e (4.2.11) no segundo termo de (3.3.16), assume a forma

$$p_d = \rho g \frac{H}{2} \frac{\cosh k\left[\left(-x_b \sin\beta + z_b \cos\beta + z_{cm}\right) + d\right]}{\cosh kd} \cos\left\{k\left[\left(x_b \cos\beta + z_b \sin\beta + x_{cm}\right) - ct\right]\right\}$$
(4.2.23)

Para um corpo esbelto ($D/h << 1$), o gradiente de pressão $\frac{\partial p_d}{\partial x_b}$ pode ser considerado constante na seção transversal e possui o mesmo valor ao calculado no eixo z_b. Com isto, a parcela de Froude-Krylov na direção x_b pode ser obtido, de maneira aproximada, através do produto da área da seção transversal A por uma integral ao longo do comprimento submerso do eixo z_b da estrutura, na forma

$$F_{f_{x_b}} \cong \int_{-\left(\frac{h}{2}-\bar{Z}\right)}^{L\sup} \frac{\partial p_d}{\partial x_b}\Big|_{x_b=0} A dz_b \tag{4.2.24}$$

e, o momento em relação ao eixo y_b, que passa pelo centro de gravidade da bóia, é obtido da expressão

$$M_{f1y_b} \cong \int_{-\left(\frac{h}{2}-\bar{Z}\right)}^{L\sup} \frac{\partial p_d}{\partial x_b}\Big|_{x_b=0} (z_b)\, A dz_b \tag{4.2.25}$$

Aqui utiliza-se, para a parcela de Froude-Krylov, o mesmo procedimento de mudança de coordenadas e integração da parcela hidrostática sobre tampo inferior apresentado na seção 4.2.4.1, obtendo-se a decomposição da força $\vec{F}_f$ na direção z_b:

$$F_{f_{z_b}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{D}{2}} p_d r dr d\theta \tag{4.2.26}$$

e o momento em relação ao eixo y_b, resultado da ação desta força no tampo inferior é:

$$M_{f2y_b} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{D}{2}} p_d r \cos\theta dr d\theta \tag{4.2.27}$$

e o momento total gerado por esta parcela será:

$$M_f = M_{f1y_b} + M_{f2y_b} \tag{4.2.28}$$

4.2.4.3. Componente das Forças de Morison: Arraste $\left(\vec{F}_d\right)$ e Inércia $\left(\vec{F}_m\right)$

A terceira e a quarta parcelas da equação (4.2.6) são obtidas da integração do primeiro e do segundo termo da equação (4.2.3), respectivamente. A integração destas parcelas deve ser realizada no comprimento submerso do eixo longitudinal z_b do cilindro (Chakrabarti, 1987), e, para isto, obtém-se as expressões das velocidades e das acelerações do fluido e da estrutura em relação ao sistema de coordenadas $O_b x_b y_b z_b$ através da transformação de coordenadas do sistema de coordenadas inercial para o sistema de coordenadas solidário ao corpo, representada pelas equações (4.2.10) e (4.2.11) que, para a integração no eixo longitudinal do cilindro $(x_b = 0)$, reduzem-se a

$$x = z_b \sin\beta + x_{cm} \tag{4.2.29}$$

$$z = z_b \cos\beta + z_{cm} \tag{4.2.30}$$

As velocidades e acelerações do fluido a serem consideradas na integração são obtidas através da teoria linear de Airy, desenvolvida no capítulo 3, e suas decomposições na direção normal ao eixo longitudinal z_b são:

$$u_l = u\cos\beta + w\sin\beta \tag{4.2.31}$$

$$\dot{u}_l = \dot{u}\cos\beta + \dot{w}\sin\beta \tag{4.2.32}$$

onde u e w são, respectivamente, a velocidade horizontal e vertical do fluido, enquanto $\dot{u}$ e $\dot{w}$ são a aceleração horizontal e vertical do fluido, respectivamente. Estas estão representadas em relação ao sistema de coordenadas inercial nas equações (3.3.9) a (3.3.12), que com as transformações (4.2.29) e (4.2.31), resultam em:

$$u = \frac{\pi H}{T}\frac{\cosh k\left[\left(z_b\cos\beta + z_{cm}\right) + d\right]}{\sinh kd}\cos\left\{k\left[\left(z_b\sin\beta + x_{cm}\right) - ct\right]\right\}$$

$$w = \frac{\pi H}{T}\frac{\sinh k\left[\left(z_b \cos\beta + z_{cm}\right)+d\right]}{\sinh kd}\sin\left\{k\left[\left(z_b \sin\beta + x_{cm}\right)-ct\right]\right\}$$

$$\dot{u} = \frac{2\pi^2 H}{T^2}\frac{\cosh k\left[\left(z_b \cos\beta + z_{cm}\right)+d\right]}{\sinh kd}\sin\left\{k\left[\left(z_b \sin\beta + x_{cm}\right)-ct\right]\right\}$$

$$\dot{w} = -\frac{2\pi^2 H}{T^2}\frac{\sinh k\left[\left(z_b \cos\beta + z_{cm}\right)+d\right]}{\sinh kd}\cos\left\{k\left[\left(z_b \sin\beta + x_{cm}\right)-ct\right]\right\}$$

Das derivadas temporais de primeira e segunda ordem de (4.2.29) e (4.2.31), obtém-se, respectivamente, os valores da velocidade e aceleração dos pontos da estrutura situados sobre seu eixo longitudinal z_b nas direções x e z escritos em função ao sistema de coordenadas embarcado na estrutura. As componentes dos vetores velocidade e aceleração destes pontos na direção normal à z_b, necessárias para obtenção de $\vec{\boldsymbol{F}}_m$ e $\vec{\boldsymbol{F}}_d$, são

$$v_l = \underbrace{\left[z_b \cos\left(\beta\right)\dot{\beta} + \dot{x}_{cm}\right]}_{\dot{x}}\cos\beta + \underbrace{\left[-z_b \sin\left(\beta\right)\dot{\beta} + \dot{z}_{cm}\right]}_{\dot{z}}\sin\beta \qquad (4.2.33)$$

$$\dot{v}_l = \underbrace{\left[-z_b \sin\left(\beta\right)\dot{\beta}^2 + z_b \cos\left(\beta\right)\ddot{\beta} + \ddot{x}_{cm}\right]}_{\ddot{x}}\cos\beta + \underbrace{\left[-z_b \cos\left(\beta\right)\dot{\beta}^2 - z_b \sin\left(\beta\right)\ddot{\beta} + \ddot{z}_{cm}\right]}_{\ddot{z}}\sin\beta$$

(4.2.34)

Note-se na equação (4.2.3), que a parcela f_d depende da velocidade da correnteza U, normal à z_b, a ser somada à v_l e à u_l para a correta avaliação da força de arraste. As forças $\vec{\boldsymbol{F}}_m$ e $\vec{\boldsymbol{F}}_d$, na direção x_b, são obtidas no sistema de coordenadas solidário ao corpo da integral:

$$F_{m_{x_b}} + F_{d_{x_b}} = \int_{-\left(\frac{h}{2}-\bar{Z}\right)}^{L\text{sup}} \left(f_m + f_d\right) dz_b \qquad (4.2.35)$$

onde f_m e f_d são representados pelo primeiro e segundo termo da equação (4.2.3), respectivamente. O momento em relação ao eixo y_b, que estas parcelas causam no corpo, é representado por:

$$M_{(m+d)y_b} = \int_{-\left(\frac{h}{2}-\bar{Z}\right)}^{L\mathrm{sup}} \left(f_m + f_d\right)\left(z_b\right) dz_b \tag{4.2.36}$$

4.2.4.4.
Componente da Força da Linha de Ancoragem $\left(\vec{F}_l\right)$

A magnitude e direção da força de tração da linha $\vec{F}_l$ é obtida utilizando-se o modelo de elementos finitos desenvolvido em (Lustosa, 2000) em que a dinâmica não-linear da linha, resultante dos efeitos do peso próprio, empuxo, carregamentos hidrodinâmicos das correntes marinhas e forças de inércia é considerada. Este modelo está discutido, em detalhes, no capítulo 2.

As projeções nas direções x_b e z_b das componentes da força na bóia, descritas na equação (4.2.6) e obtidas nas seções (4.2.4.1) a (4.2.4.3), devem ser decompostas nas direções x e z para a resolução das equações de movimento em (4.1.7), escritas em relação ao referencial inercial $Oxyz$. As componentes da força total $\vec{F}$ nas direções x e z, respectivamente, apresentam as formas

$$F_x = \underbrace{\left(F_{s_{x_b}} \cos\beta + F_{s_{z_b}} \sin\beta\right)}_{F_{s_x}} + \underbrace{\left(F_{f_{x_b}} \cos\beta + F_{f_{z_b}} \sin\beta\right)}_{F_{f_x}} + \underbrace{\left[\left(F_{m_{x_b}} + F_{d_{x_b}}\right)\cos\beta\right]}_{F_{m_x}+F_{d_x}} + F_{l_x}$$

$$F_z = \underbrace{\left(-F_{s_{x_b}} \sin\beta + F_{s_{z_b}} \cos\beta\right)}_{F_{s_z}} + \underbrace{\left(-F_{f_{x_b}} \sin\beta + F_{f_{z_b}} \cos\beta\right)}_{F_{f_z}} + \underbrace{\left[\left(F_{m_{x_b}} + F_{d_{x_b}}\right)\sin\beta\right]}_{F_{m_z}+F_{d_z}} + F_{l_z}$$

(4.2.37)