

2

Formulação Estrutural e Hidrodinâmica da Linha pelo Método de Elementos Finitos

2.1.

O Método dos Elementos Finitos

Uma grande variedade de problemas físicos em engenharia é hoje analisada empregando-se o método dos elementos finitos na representação de sólidos, estruturas, fluidos e transferência de calor. O método consiste em impor-se as condições de equilíbrio de um sistema contínuo através de sua discretização empregando-se um número finito de graus de liberdade. No caso da análise estrutural, a discretização da estrutura é considerada através de sub-domínios (elementos), e que as condições de equilíbrio são estabelecidas em termo das variáveis de estado a partir das hipóteses cinemáticas adotadas. Por fim, o conjunto de equações correspondente ao equilíbrio do sistema discretizado é obtido, levando-se em conta as condições da continuidade entre os elementos e de contorno da estrutura. Em problemas estáticos e lineares, estas equações são representadas algebricamente, e o resultado é obtido diretamente, fornecendo os deslocamentos da estrutura. As deformações e tensões são então obtidas através das relações de compatibilidade geométrica e constitutiva, respectivamente. No presente trabalho o problema da análise dinâmica de linhas flexíveis é não-linear e a linearização das equações de equilíbrio requer o emprego de um método iterativo para a resolução do sistema de equações algébricas obtido. Este, através de sucessivas aproximações lineares, fornece a solução aproximada do sistema, segundo um critério de convergência numérica. Neste caso realiza-se uma análise incremental onde o carregamento é progressivamente aplicado, e, para cada incremento, obtém-se uma solução intermediária por processo iterativo que, considerada na solução do passo seguinte, permite acumular-se o carregamento até que este seja integralmente aplicado.

Para o caso de problemas dinâmicos, faz-se necessária a representação nas equações de equilíbrio das forças de dissipação e de inércia; estas incluem termos

contendo a primeira e segunda derivadas temporais das variáveis de estado, respectivamente. Para a solução numérica deste sistema de equações diferenciais ordinárias, resultantes da expressão de equilíbrio da estrutura discretizada, é necessário considerar-se um processo de integração numérica incremental passo-a-passo onde considerações de discretização no tempo são aplicadas. Analogamente ao problema estático, o equilíbrio é obtido em cada passo de forma iterativa.

2.2. Não-Linearidades Presentes no Comportamento Estrutural de Risers e Linhas de Ancoragem

Para um problema linear estático, as equações de equilíbrio obtidas através do método de elementos finitos são representadas pela equação:

$$KU = R \quad (5.2.1)$$

O sistema de equações acima, para a matriz rigidez independente do deslocamento, corresponde a análise linear de um determinado problema estrutural, e o deslocamento U é uma função linear do carregamento R aplicado. Na análise estrutural, a resposta linear do sistema é baseada em algumas hipóteses, como a presença de pequenos deslocamentos, material linear elástico, e condições de contorno fixas.

No presente estudo, considera-se a não-linearidade geométrica devido aos grandes deslocamentos a que a linha de ancoragem está sujeita e ao acoplamento entre os mecanismos de rigidez à tração e à flexão. Na teoria linear de vigas retas, os efeitos de esforços de tração e flexão estão desacoplados; porém, na presença de grandes deslocamentos, o aumento no esforço de tração causa o enrijecimento da estrutura à flexão. Nesta condição a matriz rigidez K é dependente da configuração geométrica da estrutura a cada instante. Apesar dos grandes deslocamentos a que a linha está sujeita, na análise incremental as equações de equilíbrio são linearizadas e apenas deformações infinitesimais são consideradas, sem perda de precisão, devido a sua esbeltez característica.

Um procedimento numérico adotado para análises não-lineares consiste em dividir o carregamento externo e aplicá-lo, incrementalmente, em uma série de iterações lineares, visando a melhor aproximação para cada incremento.

Para o problema em questão, uma análise estática não seria satisfatória, devido principalmente aos efeitos de inércia na linha além dos movimentos induzidos à linha pela bóia de superfície. Portanto, os efeitos da cinética devidos à velocidade e à aceleração da linha não devem ser desprezados.

2.3. Análise Incremental Não-Linear

Considerando-se que as forças externas aplicadas à estrutura são variáveis no tempo, as condições de equilíbrio para uma representação de elementos finitos podem ser escritas na forma:

$${}^t R - {}^t F = 0 \quad (2.3.1)$$

onde o vetor ${}^t R$ representa as forças nodais externas aplicadas no instante de tempo t , e o vetor ${}^t F$ representa as forças nodais internas devido às tensões nesta configuração. No caso de uma análise dinâmica, o vetor ${}^t R$ também deverá incluir as forças de inércia e amortecimento. A solução incremental passo-a-passo assume que a solução no instante de tempo t é conhecida e necessária para o cálculo da solução no instante $t + \Delta t$. Então, para este instante tem-se:

$${}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F = 0 \quad (2.3.2)$$

A análise pressupõe que a solução no instante t seja conhecida, e, portanto,

$${}^{t+\Delta t} F = {}^t F + F \quad (2.3.3)$$

onde F é o incremento da força nodal na estrutura correspondente aos incrementos dos deslocamentos e das tensões entre os instantes t e $t + \Delta t$. Neste

intervalo, pode-se aproximar este vetor utilizando-se a matriz rigidez tangente tK , correspondente às condições geométricas e do material no instante t :

$$F \cong {}^tKU \quad (2.3.4)$$

onde U é o vetor de incrementos dos deslocamentos nodais no intervalo Δt considerado. Substituindo (2.3.3) e (2.3.4) em (2.3.2) obtém-se:

$${}^tKU \cong {}^{t+\Delta t}R - {}^tF \quad (2.3.5)$$

e, uma aproximação para os deslocamentos no instante $t + \Delta t$ é assim obtida:

$${}^{t+\Delta t}U \cong {}^tU + U \quad (2.3.6)$$

O valor exato do vetor incremental U é aquele correspondente às cargas aplicadas ${}^{t+\Delta t}R$, porém, o valor calculado em (2.3.5), é apenas uma aproximação do vetor incremento dos deslocamentos nodais. A partir do vetor incremental U , uma aproximação para o incremento das componentes das tensões e das forças nodais são obtidas e adicionadas aos valores conhecidos no instante t , obtendo-se assim os valores no instante de tempo $t + \Delta t$. Em seguida, marcha-se no tempo para os cálculos no instante de tempo seguinte. O emprego da aproximação em (2.3.4) pode levar a uma solução com erros significativos. Assim, iterações da equação de equilíbrio devem ser efetuadas até que uma resposta com exatidão satisfatória para a equação (2.3.2) seja obtida.

O método iterativo de Newton-Raphson é uma extensão da técnica incremental representada por (2.3.5) e (2.3.6), e as equações usadas na iteração deste método são, para cada iteração i ($i= 1, 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}K^{(i-1)}U^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t}U^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + U^{(i)} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}U^{(0)} &= {}^tU \\
 {}^{t+\Delta t}K^{(0)} &= {}^tK \\
 {}^{t+\Delta t}F^{(0)} &= {}^tF
 \end{aligned}
 \tag{2.3.8}$$

onde deve-se calcular uma nova matriz rigidez tangente em cada iteração. A figura 2.1 ilustra o processo de solução para um sistema com uma característica não-linear de resposta que favoreça uma rápida convergência do resultado:

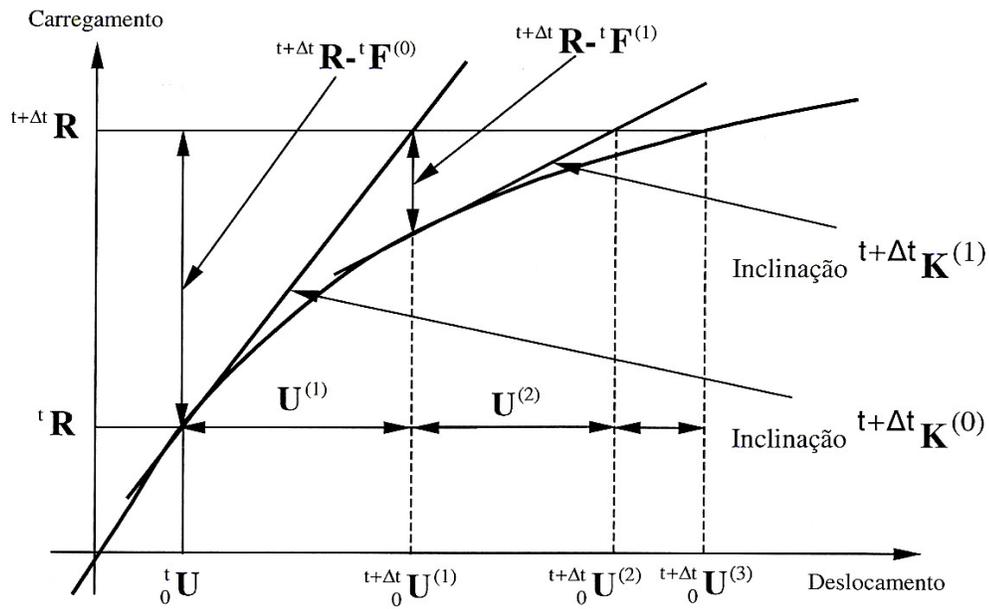


Figura 2.1 - Procedimento Incremental Iterativo.

O método de Newton-Raphson e sua variante modificada será descrito de forma mais detalhada na seção 2.11.3.

2.4. Descrição do Movimento

A equação (2.3.6) corresponde a uma abordagem Lagrangeana da descrição de movimento, em que a configuração em um determinado instante é utilizada como referência para os demais instantes. Na formulação Lagrangeana Total, as grandezas estáticas e cinemáticas são referidas a configuração indeformada da estrutura enquanto na formulação Lagrangeana Atualizada estas grandezas são

referidas à configuração da estrutura no instante imediatamente anterior ao instante considerado ($t + \Delta t$).

No presente estudo, utiliza-se a formulação Lagrangeana co-rotacionada (Lustosa, 2000). Por esta formulação, as grandezas estáticas e cinemáticas são referidas a uma configuração indeformada obtida de transformações de coordenadas espaciais associadas à translação e à rotação da configuração indeformada, para uma posição próxima daquela no instante analisado removidos todos os movimentos de corpo rígido, como pode ser observado na figura 2.2. Esta formulação possui a característica de ser pouco suscetível ao tamanho do incremento dos deslocamentos nodais da estrutura, pois as deformações admitidas são infinitesimais e os movimentos de corpo rígido são removidos, possibilitando desta forma o uso de intervalos de tempo maiores na análise dinâmica do problema.

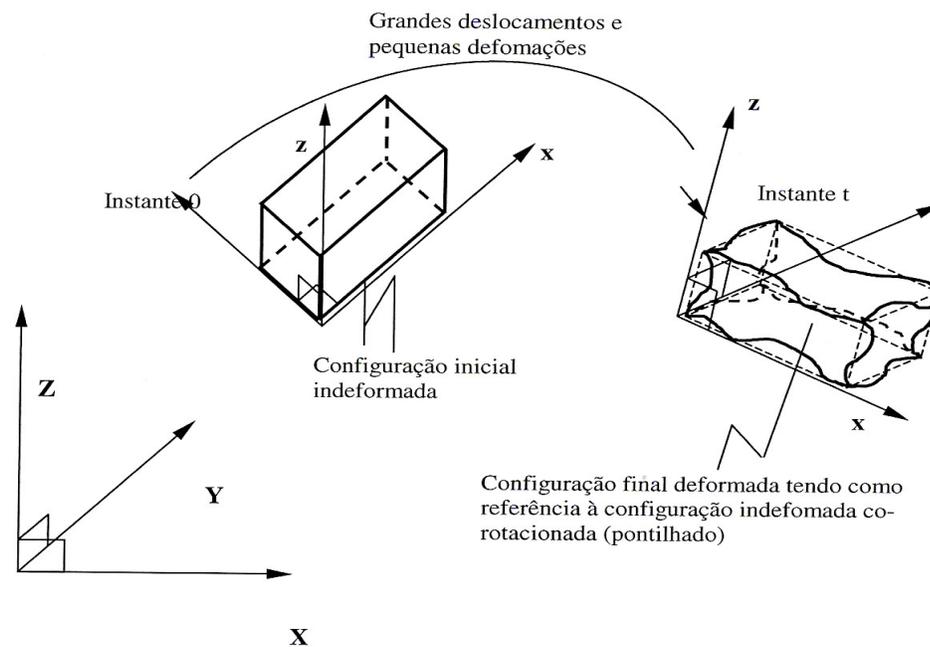


Figura 2.2 - Descrição do Movimento Usando-se um Sistema de Coordenadas Convectivo Co-Rotacionado.

2.5. Equação de Equilíbrio

As equações de equilíbrio de uma estrutura qualquer, sujeita a grandes deslocamentos e pequenas deformações, pode ser obtida a partir da estacionaridade do Potencial Total π em relação a correspondentes variáveis de estado considerando-se a análise dinâmica da estrutura. O potencial, em um determinado instante t , é representado por:

$$\pi = \int_0^t (E_{def} - E_{cin} - W_{ext}^B - W_{ext}^s - W_{ext}^c) dt \quad (2.5.1)$$

onde:

$$E_{def} = \frac{1}{2} \int_{\forall} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\tau} d\forall : \text{Energia de deformação elástica, onde } \boldsymbol{\varepsilon} \text{ e } \boldsymbol{\tau} \text{ são os vetores}$$

de deformações e de tensões definidos pontualmente na estrutura;

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \int_{\forall} \rho \dot{U}^T \dot{U} d\forall : \text{Energia cinética, onde } \rho \text{ é a função distribuição de}$$

massa específica no volume da estrutura

$$W_{ext}^B = \int_{\forall} U^T f^B d\forall : \text{Trabalho das forças de corpo } f^B, \text{ distribuídas no volume}$$

da estrutura;

$$W_{ext}^s = \int_S U^T f^s dS : \text{Trabalho das forças de superfície } f^s, \text{ distribuídas na}$$

superfície da estrutura;

$$W_{ext}^c = \sum_{i=1}^m U_c^{(i)T} R_c^{(i)} : \text{Trabalho das forças concentradas } R_c^{(i)} \text{ atuantes nos}$$

pontos $i = 1, \dots, m$.

Na representação da parcela da energia de deformação, é necessária a obtenção das equações de compatibilidade geométrica da estrutura e constitutivas do material.

As equações de compatibilidade geométrica relacionam o campo de deslocamentos considerado com o campo de deformações de uma estrutura. Essas equações podem ser lineares ou não-lineares, dependendo do seu grau de generalidade. Quando hipóteses da ocorrência de pequenos deslocamentos e pequenas deformações são consideradas, as relações lineares são adequadas para representar o movimento. No entanto, relações não-lineares ocorrem nas seguintes situações:

- a) Presença de grandes deslocamentos e grandes deformações: representa o caso mais geral do comportamento estrutural;
- b) Presença de grandes deslocamentos e pequenas deformações: condição correspondente à presença de pequenas deformações apenas;

Na análise do problema em estudo, o segundo caso é o mais apropriado, já que as deformações medidas no sistema de coordenadas fixo ao corpo são infinitesimais, enquanto este sistema de coordenadas está submetido a grandes translações e rotações de corpo rígido. Desta forma as equações de compatibilidade geométrica podem ser divididas em duas parcelas: a parcela linear \mathbf{e} , e não-linear $\boldsymbol{\eta}$,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta} \quad (2.5.2)$$

Estas parcelas serão descritas em termos das variáveis de estado na seção 2.7.

As equações constitutivas do material relacionam o campo de deformações com aquelas do campo de tensões:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5.3)$$

onde a matriz \mathbf{C} , que depende de propriedades do material da estrutura, é denominada matriz de elasticidade ou constitutiva do material. No caso de um material linear elástico, \mathbf{C} é independente das componentes de deformações da estrutura.

Assim, substituindo-se (2.5.3) em (2.5.1), e impondo-se a condição de estacionaridade do potencial π , obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int_0^t \int_{\forall} \delta\epsilon^T \mathbf{C} \epsilon d\forall dt - \int_0^t \int_{\forall} \rho \dot{U}^T \delta U d\forall dt - \int_0^t \int_{\forall} \rho \delta U f^B d\forall dt - \int_0^t \int_S \delta U^{sT} f^S dS - \\ & - \int_0^t \sum_{i=1}^m \delta U_c^{(i)T} R_c^{(i)} dt = 0 \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Empregando-se (2.5.3) em (2.5.4), e após algumas manipulações algébricas, o segundo termo do lado direito da equação (2.5.4) (Lustosa, 2000) resulta em

$$\int_{\forall} [\rho \dot{U}^T \partial U]_b d\forall = 0 \quad (2.5.5)$$

$$\int_{\forall} \rho \delta U^T \ddot{U} d\forall + \int_{\forall} \delta \epsilon^T \boldsymbol{\pi} d\forall - \int_{\forall} \delta U^T f^B d\forall - \int_S \rho \delta U^{sT} f^S dS - \sum_{i=1}^m \delta U_c^{(i)T} R_c^{(i)} = 0 \quad (2.5.6)$$

onde a equação (2.5.5) representa as condições de contorno temporais e a equação (2.5.6) representa a condição de equilíbrio da estrutura.

2.6. Decomposição Incremental e Linearização da Equação de Equilíbrio

A relação constitutiva do material da estrutura no instante $t + \Delta t$, tendo como referência a configuração da estrutura no instante t (formulação Lagrangeana Atualizada), assume a seguinte forma

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot [{}^{t+\Delta t}{}^t\boldsymbol{\varepsilon} + {}^t\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{C} \cdot {}^{t+\Delta t}{}^t\boldsymbol{\varepsilon} + {}^t\boldsymbol{\tau} \quad (2.6.1)$$

onde o índice inferior do vetor de deformações indica o instante de referência e o superior o instante onde os vetores de tensões e deformações estão representados.

Utilizando-se a seguinte simplificação na nomenclatura,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{t+\Delta t}{}^t\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.6.2)$$

e as seguintes simplificações para pequenos intervalos de tempo Δt ,

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{e} \quad \text{e} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \mathbf{e} ,$$

a equação de equilíbrio (2.5.6) reescrita na forma incremental resulta em

$$\begin{aligned} & \int_{\forall} {}^t\rho \delta U^T \cdot {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \cdot d^t\forall + \int_{\forall} \delta \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e} \cdot d^t\forall + \int_{\forall} \delta \boldsymbol{\eta}^T \cdot {}^t\boldsymbol{\tau} \cdot d^t\forall = \\ & = \int_{\forall} \delta U^T \cdot {}^{t+\Delta t}f^B \cdot d^t\forall + \int_{S} \delta U^S \cdot {}^{t+\Delta t}f^S \cdot d^tS + \sum_{i=1}^m \delta U_C^{(i)T} \cdot {}^{t+\Delta t}R_C^{(i)} - \\ & - \int_{\forall} \delta \mathbf{e}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot d^t\forall \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

2.7. Discretização da Estrutura

Na discretização da estrutura utiliza-se elementos com dois nós. O campo dos deslocamentos de um elemento (m), no instante $t + \Delta t$, é obtido em relação a configuração co-rotacionada e indeformada do elemento no instante t , na forma

$${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\hat{\mathbf{u}}^{(m)}(x, y, z) = {}^t\mathbf{u}^{(m)} + \mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \cdot \left({}^t{}_{(t)}\hat{\mathbf{u}}^{(m)} + \hat{\mathbf{u}}^m \right) \quad (2.7.1)$$

onde o índice inferior, representado entre parênteses, indica a utilização do referencial co-rotacionado, $H^{(m)}$ representa a matriz de interpolação (ou de funções de forma) do elemento (m), ${}^t_{(t)}u^{(m)}$ é o vetor de deslocamentos nodais medido no instante t em relação a configuração co-rotacionada e indeformada neste mesmo instante, e \hat{u}^m é o vetor incremento dos deslocamentos nodais no instante Δt medido em relação a configuração co-rotacionada no instante t.

Na formulação do elemento unidimensional utilizado, as seguintes hipóteses são consideradas:

- O material é linear elástico;
- Na estrutura ocorrem apenas pequenas deformações;
- A estrutura está submetida a grandes deslocamentos o que resulta na matriz rigidez tangente da estrutura dependente da configuração geométrica em cada instante, e conseqüentemente no acoplamento entre os efeitos de esforços de tração e flexão.

- As seções transversais inicialmente planas permanecem planas e perpendiculares à fibra neutra quando sujeitas a flexão. Por esta hipótese as deformações devido aos esforços cisalhantes são nulas. Essa é uma aproximação bastante satisfatória no problema em estudo, poque a estrutura em análise é considerada suficientemente esbelta.

Desta forma, a condição de equilíbrio do elemento é descrita em função das seguintes variáveis de estado, representadas no referencial co-rotacionado, e referidas aos deslocamentos da fibra neutra:

1. $u^{(m)}(x)$ – Distribuição dos deslocamentos axiais da linha neutra ao longo do elemento (m).
2. $v^{(m)}(x)$ – Distribuição dos deslocamentos transversais da linha neutra na direção y ao longo do elemento (m).
3. $w^{(m)}(x)$ - Distribuição dos deslocamentos transversais da linha neutra na direção z ao longo do elemento (m).

4. $\theta^{(m)}(x)$ – Distribuição da rotação da seção reta em torno do eixo x ao longo do elemento (m).

Estes campos de deslocamento ao longo do elemento (m) são obtidos através de interpolações dos deslocamentos e rotações dos nós que compõem este elemento. Estas interpolações são obtidas através das funções de Hermite para as deflexões, e funções lineares para os deslocamentos axiais e rotações devidos à torção. Com isto temos

$${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\mathbf{u}^{(m)} = {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}u_x^1\Phi_1^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}u_x^2\Phi_2^{(m)}(x)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}v^{(m)} = {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}u_y^1\Phi_3^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}u_y^2\Phi_4^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\beta_z^1\Phi_5^{(m)}(x) - {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\beta_z^2\Phi_6^{(m)}(x)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}w^{(m)} = {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}u_z^1\Phi_3^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}u_z^2\Phi_4^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\beta_y^1\Phi_5^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\beta_y^2\Phi_6^{(m)}(x)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\theta^{(m)} = {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\beta_x^1\Phi_1^{(m)}(x) + {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\beta_x^2\Phi_2^{(m)}(x) \quad (2.7.2)$$

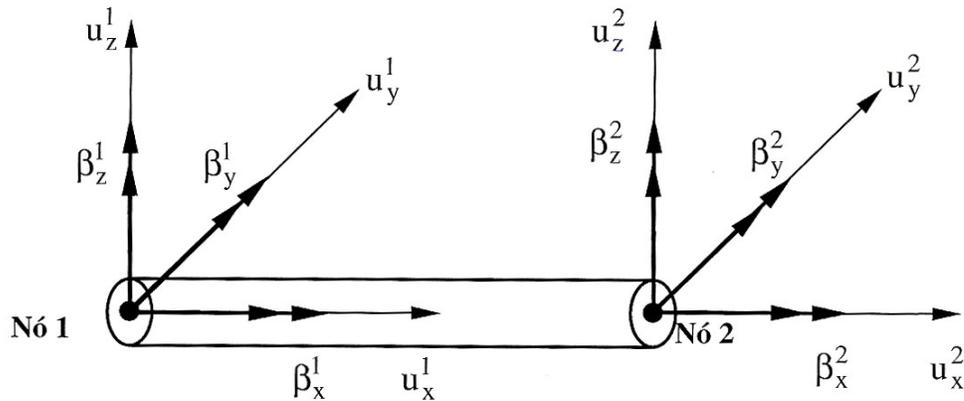


Figura 2.3 - Elemento (m) e suas variáveis de estado para o caso tri-dimensional.

onde:

$u_{x,y,z}^{1,2}$ - são os deslocamentos dos nós 1 e 2 ao longo dos eixos x,y e z no sistema de coordenadas co-rotacionado.

$\beta_{x,y,z}^{1,2}$ - são as rotações dos nós 1 e 2 em relação aos eixos x, y e z no sistema de coordenadas co-rotacionado.

As funções de interpolação utilizadas têm a forma:

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(m)}(x) &= 1 - a; & \Phi_2^{(m)}(x) &= a \\ \Phi_3^{(m)}(x) &= 1 - 3a^2 + 2a^3; & \Phi_4^{(m)}(x) &= 3a^2 + 2a^3 \\ \Phi_5^{(m)}(x) &= x - eb + ab; & \Phi_6^{(m)}(x) &= b - ab\end{aligned}\quad (2.7.3)$$

$$a = \frac{x}{L^{(m)}} \quad \text{e} \quad b = \frac{x^2}{L^{(m)}}$$

onde $L^{(m)}$ é o comprimento do elemento (m). Reescrevendo-se a equação (2.7.1) na sua forma matricial para a coordenada x no sistema de referencia co-rotacionado obtemos:

$${}^{t+\Delta t} \hat{u}^{(m)}(x) = H^{(m)}(x) \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{u}^{(m)} \quad (2.7.4)$$

onde $H^{(m)}$ é a matriz de interpolação dos deslocamentos nodais referidas ao sistema co-rotacionado descrita por:

$$H^{(m)} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_3 & 0 & 0 & 0 & \Phi_5 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 & 0 & -\Phi_6 \\ 0 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_5 & 0 & 0 & 0 & \Phi_4 & 0 & \Phi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As relações de compatibilidade geométrica relacionam o campo de deslocamentos definido em (2.7.4) com o campo das deformações e podem ser decompostas em: uma parcela linear \mathbf{e} , e uma parcela não-linear $\boldsymbol{\eta}$. Para as

hipóteses de cinemática de deformação adotadas, estas parcelas estão descritas a seguir:

1. Componentes Lineares

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon}_{xx}^{(m)}(x, y, z) = \frac{d}{dx} \left({}^{t+\Delta t} u(x) \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left({}^{t+\Delta t} v(x) \right) y + \frac{d^2}{dx^2} \left({}^{t+\Delta t} w(x) \right) z \quad (2.7.5)$$

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\gamma}_{\theta x}^{(m)} = r \frac{d}{dx} {}^{t+\Delta t} \theta(x) \quad (2.7.6)$$

onde ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\epsilon}_{xx}^{(m)}$ é a deformação linear na direção x ao longo do elemento (m) devido aos efeitos de tração e flexão do elemento, e ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\gamma}_{\theta x}^{(m)}$ é a deformação angular ao longo do elemento (m) devido à torção.

2. Componentes não-lineares

Estes componentes resultam da elongação adicional da fibra neutra causada pelos deslocamentos transversais $v(x)$ e $w(x)$. Sua formulação é obtida através da variação do comprimento de um elemento infinitesimal unidimensional em deflexão. Através da figura 5.4 e após algumas manipulações (Lustosa, 2000), obtém-se:

$$\frac{ds}{dx} = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + 2 \frac{du}{dx} - 1} \right) \quad (2.7.7)$$

considerando-se

$$\xi = \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + 2 \frac{du}{dx} \quad (2.7.8)$$

e usando a aproximação da expansão em série de Taylor para os termos até a primeira ordem da função $f(\xi) = \sqrt{1+\xi}$, obtém-se

$$\sqrt{1+\xi} = 1 + \frac{1}{2}\xi$$

e, adicionando-se ainda o efeito dos deslocamentos transversais w na direção z , a equação (2.7.7) se torna:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \quad (2.7.9)$$

A equação (2.7.9) representa a medida de deformação devido à elongação da linha neutra. O primeiro termo do lado direito equivale à parcela linear da deformação representada pela equação (2.7.5) e o segundo termo equivale à parcela não-linear, definida como:

$${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\eta_{xx}^{(m)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dx} {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}u \right)^2 + \left(\frac{d}{dx} {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}v \right)^2 + \left(\frac{d}{dx} {}^{t+\Delta t}{}_{(t)}w \right)^2 \right] \quad (2.7.10)$$

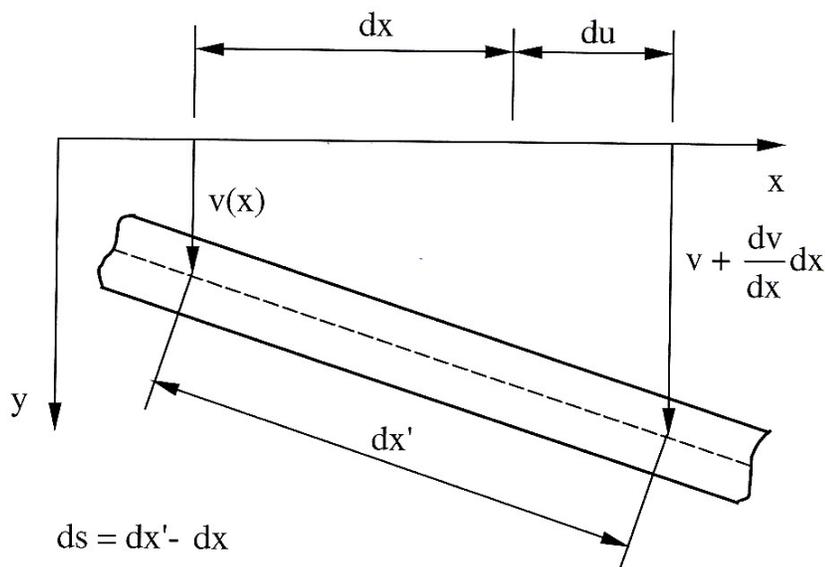


Figura 2.4 - Elongação da linha neutra devido ao deslocamento transversal $v(x)$.

A deformação do elemento (m) na direção x co-rotacionada é composta pelas equações (2.7.5) e (2.7.10), que representam as parcelas linear e não-linear, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{(m)}(x, y, z) = {}^{t+\Delta t} e_{xx}^{(m)} + {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\eta}_{xx}^{(m)} \quad (2.7.11)$$

Utilizando-se as equações (2.7.2), o campo de deformações no volume do elemento (m) em função dos deslocamentos nodais é obtido, na forma

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \mathbf{B}_L^{(m)} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \cdot \mathbf{B}_{NL}^{(m)T} \cdot \mathbf{B}_{NL}^{(m)} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \\ 0 \end{array} \right] \quad (2.7.12)$$

onde $\mathbf{B}_L^{(m)}$ é a matriz que relaciona os deslocamentos nodais com a parcela linear do campo de deformações do elemento (m). Esta matriz pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$\mathbf{B}_L^{(m)} (2 \times 2) = \mathbf{B}_{u_L}^{(m)} + y \cdot \mathbf{B}_{v_L}^{(m)} + z \cdot \mathbf{B}_{w_L}^{(m)} + r \cdot \mathbf{B}_{\theta_L}^{(m)} \quad (2.7.13)$$

e a matriz $\mathbf{B}_{NL}^{(m)}$ é descrita por:

$$\mathbf{B}_{NL}^{(m)} (3 \times 12) = \left[\begin{array}{c} \frac{d}{dx} H_u^{(m)} \\ \frac{d}{dx} H_v^{(m)} \\ \frac{d}{dx} H_w^{(m)} \end{array} \right] \quad (2.7.14)$$

onde

$$H_u^{(m)} = [\Phi_1^{(m)}(x) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ \Phi_2^{(m)}(x) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$H_v^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_3^{(m)}(x) & 0 & 0 & 0 & \Phi_5^{(m)}(x) & | & 0 & \Phi_4^{(m)}(x) & 0 & 0 & 0 & -\Phi_6^{(m)}(x) \end{bmatrix}$$

$$H_w^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_3^{(m)}(x) & 0 & -\Phi_5^{(m)}(x) & 0 & | & 0 & 0 & \Phi_4^{(m)}(x) & 0 & \Phi_6^{(m)}(x) & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_\theta^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Phi_1^{(m)}(x) & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \Phi_2^{(m)}(x) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e as matrizes que compõem $B_L^{(m)}$ são definidas por

$$B_{u_L}^{(m)} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx}\Phi_1^{(m)}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{d}{dx}\Phi_2^{(m)}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7.15)$$

$$B_{v_L}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dx}\Phi_3^{(m)}(x) & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx}\Phi_5^{(m)}(x) & | & 0 & \frac{d}{dx}\Phi_4^{(m)}(x) & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx}\Phi_6^{(m)}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7.16)$$

$$B_{w_L}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d}{dx}\Phi_3^{(m)}(x) & 0 & -\frac{d}{dx}\Phi_5^{(m)}(x) & 0 & | & 0 & 0 & \frac{d}{dx}\Phi_4^{(m)}(x) & 0 & \frac{d}{dx}\Phi_6^{(m)}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7.17)$$

$$B_{\theta_L}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx}\Phi_1^{(m)}(x) & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx}\Phi_2^{(m)}(x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7.18)$$

$$B_{NL}^{(m)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L^{(m)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left| & \frac{1}{L^{(m)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & b_2 & \left| & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & 0 & -b_1 & 0 & -b_2 & 0 & \left| & 0 & 0 & b_1 & 0 & b_3 & 0 \right. \end{bmatrix} \quad (2.7.19)$$

onde $b_1 = 6\left(\frac{x}{L^{(m)^2}} - \frac{x^2}{L^{(m)^3}\right)$; $b_2 = 1 - 4\frac{x}{L^{(m)}} + 3\frac{x^2}{L^{(m)^2}$; $b_3 = 4\frac{x}{L^{(m)}} + 3\frac{x^2}{L^{(m)^2}$.

Com o resultado obtido em (2.7.1), o vetor de deformações é decomposto nas parcelas

$${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = {}^t{}_{(t)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \quad (2.7.20)$$

onde apenas o vetor incremento das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$ é desconhecido. As parcelas da equação (2.7.20) são descritas por:

$${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = B_L^{(m)} \cdot {}^t{}_{(t)}\hat{\boldsymbol{u}}^{(m)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot {}^t{}_{(t)}\hat{\boldsymbol{u}}^{(m)T} \cdot B_{NL}^{(m)T} \cdot B_{NL}^{(m)} \cdot {}^t{}_{(t)}\hat{\boldsymbol{u}}^{(m)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^{t+\Delta t}{}_{(t)}\hat{\boldsymbol{u}}^{(m)} = {}^t{}_{(t)}\hat{\boldsymbol{u}}^{(m)} + \boldsymbol{u}^{(m)}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = B_L^{(m)} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}^{(m)} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}^{(m)T} \cdot B_{NL}^{(m)T} \cdot B_{NL}^{(m)} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}^{(m)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{u}}^{(m)T} \cdot B_{NL}^{(m)T} \cdot B_{NL}^{(m)} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}^{(m)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7.21)$$

Após a discretização dos termos da equação de equilíbrio da estrutura (2.6.3) e representação no sistema de coordenadas co-rotacionado, chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
& \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \int_{t \nabla^{(m)}} \left(H_u^{(m)T} \cdot H_u^{(m)} + H_v^{(m)T} \cdot H_v^{(m)} + H_w^{(m)T} \cdot H_w^{(m)} + r^2 \cdot H_\theta^{(m)T} \cdot H_\theta^{(m)} \right) d^t \nabla^{(m)} \cdot {}^{t+\Delta t} \ddot{\hat{\mathbf{u}}}^{(m)} \right) + \\
& + \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \int_{t \nabla^{(m)}} \left(B_{u_L}^{(m)T} \cdot C \cdot B_{u_L}^{(m)} + y^2 B_{v_L}^{(m)T} \cdot C \cdot B_{v_L}^{(m)} + z^2 B_{w_L}^{(m)T} \cdot C \cdot B_{w_L}^{(m)} + r^2 B_{\theta_L}^{(m)T} \cdot C \cdot B_{\theta_L}^{(m)} \right) d^t \nabla^{(m)} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \right) + \\
& + \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \int_{t \nabla^{(m)}} \sigma_{xx}^{(m)} \cdot B_{NL}^{(m)T} \cdot B_{NL}^{(m)} d^t \nabla^{(m)} \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \right) = \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \int_{t \nabla^{(m)}} H^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} f^B d^t \nabla^{(m)} \right) + \\
& + \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \int_{t S^{(m)}} H^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t} f^S d^t S^{(m)} \right) + \\
& + \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(i)T} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{R}_C^{(i)} \right) - \sum_m \left(\delta \hat{\mathbf{u}}^{(m)T} \left(\int_{t \nabla^{(m)}} B_L^{(m)T} \cdot {}^t \boldsymbol{\tau}^{(m)} \cdot d^t \nabla^{(m)} + \int_{t \nabla^{(m)}} \sigma_{xx}^{(m)} \cdot B_{NL}^{(m)T} \cdot B_{NL}^{(m)} \cdot d^t \nabla^{(m)} \right) \cdot {}^t \hat{\mathbf{u}}^{(m)} \right)
\end{aligned} \tag{2.7.22}$$

onde

$$C = E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2(1+\nu) \end{bmatrix} \tag{2.7.22}$$

é a matriz constitutiva do material com E sendo o módulo de elasticidade do material. A partir da equação de equilíbrio (2.7.22) as matrizes de massa, rigidez elástica, rigidez geométrica e os vetores de esforços internos e externos são obtidos. Estas matrizes e vetores são posteriormente expressos no sistema de coordenadas globais, empregando-se transformações de base lineares.

2.8.

Matrizes e Vetores dos Esforços Internos e Externos

Devido à hipótese de que apenas pequenas (infinitesimais) deformações ocorrem, resultante dos pequenos incrementos temporais, as seguintes aproximações podem ser consideradas

$${}^t S^{(m)} = S^{(m)}, {}^t \nabla^{(m)} = \nabla^{(m)}, {}^t \rho^{(m)} = \rho^{(m)}$$

que resultam em simplificações nas avaliações numéricas da equação (2.7.22).

a) Matriz de Massa

A matriz de massa da estrutura é obtida através do primeiro termo da equação (2.7.22). Considerando-se a massa específica do material constante ao longo do elemento (m), a matriz de massa pode ser descrita na forma:

$$\hat{M}^{(m)} = \rho^{(m)} \left(A^{(m)} \int_0^{L^{(m)}} \left(H_u^{(m)T} H_u^{(m)} + H_v^{(m)T} H_v^{(m)} + H_w^{(m)T} H_w^{(m)} \right) dx + I_P^{(m)} \int_0^{L^{(m)}} H_\theta^{(m)T} H_\theta^{(m)} dx \right) \quad (2.8.1)$$

onde $A^{(m)}$ e $I_P^{(m)}$ são a área e o momento de inércia polar da seção reta, respectivamente.

b) Massa Adicional:

As forças do fluido sobre o elemento resultam da adição de uma força inercial e de uma força de arrasto. A parcela inercial atua em fase com a aceleração do fluido e pode ser interpretada fisicamente como a massa de fluido acelerada junto com a estrutura. A parcela de arrasto atua em fase com a velocidade do fluido e pode ser considerada como uma ação aplicada à estrutura. Uma característica importante da massa adicional é a de resultar sempre na direção normal aos elementos de cabos, barras ou linhas flexíveis. A massa adicional por unidade de comprimento de uma estrutura esbelta submersa em um fluido de densidade ρ_0 , movendo-se em direções perpendiculares a seu eixo, e de seção reta circular de raio externo r_0 é dado por:

$$m_a = \rho_0 \cdot \pi \cdot r_0^2 \quad (2.8.2)$$

Utilizando-se a equação (5.8.2) para representar esta inércia adicional do elemento (m), que se move juntamente com o elemento nas direções perpendiculares ao seu eixo longitudinal, resulta na seguinte matriz de inércia associada aos graus-de-liberdade locais:

$$\hat{M}_a^{(m)} = m_a^{(m)} \left(\int_0^{L^{(m)}} H_v^T H_v dx + \int_0^{L^{(m)}} H_w^T H_w dx \right) \quad (2.8.3)$$

que deve ser adicionada à matriz de massa local da estrutura.

c) Matriz de Rigidez Elástica:

Integrando o segundo termo da equação (2.7.22) obtemos:

$$\hat{K}_L^{(m)} = \int_0^{L^{(m)}} \left(A^{(m)} B_{u_L}^{(m)T} C B_{u_L}^{(m)} + I_{zz}^{(m)} B_{v_L}^{(m)T} C B_{v_L}^{(m)} + I_{yy}^{(m)} B_{w_L}^{(m)T} C B_{w_L}^{(m)} + I_P B_{\theta_L}^{(m)T} C B_{\theta_L}^{(m)} \right) dx \quad (2.8.4)$$

$$\text{onde } I_{zz} = \int_{A^{(m)}} y^2 dA, I_{yy} = \int_{A^{(m)}} z^2 dA \text{ e } I_P = \int_{A^{(m)}} r^2 dA$$

d) Matriz de Rigidez Geométrica:

Em estruturas esbeltas como cabos, eixos e vigas delgadas, o efeito do enrijecimento da estrutura devido aos esforços de tração é significativo, e é representado no método de elementos finitos pela matriz de rigidez geométrica, obtida de forma similar a matriz de rigidez elástica. Esse termo está representado na equação (2.7.22) por

$${}^t K_G^{(m)} = A^{(m)} \int_0^{L^{(m)}} {}^t \sigma^{(m)} B_{NL}^{(m)T} B_{NL}^{(m)} dx \quad (2.8.5)$$

onde ${}^t \sigma^{(m)}$ é a componente axial da tensão normal devida aos esforços de tração no instante t, cujos valores nodais no elemento (m) são obtidos

considerando-se as medidas da deformação axial nos elementos contíguos de mesmo material, com módulo de elasticidade E ,

$${}^t\sigma_{(1)}^{(m)}(x) = \frac{E}{2} \left(\frac{L^{(m-1)} - L_0^{(m-1)}}{L_0^{(m-1)}} + \frac{L^{(m)} - L_0^{(m)}}{L_0^{(m)}} \right) \quad (2.8.6)$$

$${}^t\sigma_{(2)}^{(m)}(x) = \frac{E}{2} \left(\frac{L^{(m)} - L_0^{(m)}}{L_0^{(m)}} + \frac{L^{(m+1)} - L_0^{(m+1)}}{L_0^{(m+1)}} \right)$$

onde $L^{(\dots)}$ e $L_0^{(\dots)}$ são os comprimentos dos elementos nas suas configurações deformadas no instante t e indeformadas, respectivamente. Considerando-se a variação linear ao longo do elemento, interpolam-se estes valores nodais ao longo da coordenada axial deste elemento, resultando em

$${}^t\sigma^{(m)}(x) = \left({}^t\sigma_{(1)}^{(m)} \cdot \left(1 - \frac{x}{L^{(m)}} \right) + {}^t\sigma_{(2)}^{(m)} \cdot \left(\frac{x}{L^{(m)}} \right) \right), \quad 0 \leq x \leq L^{(m)} \quad (2.8.7)$$

que substituindo-se em (2.8.5), permite obter a matriz rigidez geométrica.

e) Vetor de Esforços Externos

O vetor de esforços externos é o resultado da composição das forças que realizam trabalho externo e resulta do quarto, quinto e sexto termo da equação (5.7.22):

$${}^{t+\Delta t}\hat{R}^{(m)} = \int_{\forall^{(m)}} H^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t}f^B d\forall^{(m)} + \int_{S^{(m)}} H^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t}f^S dS^{(m)} + {}^{t+\Delta t}\hat{R}_C^{(i)} \quad (2.8.8)$$

onde $i = 1, 2$, e está associado aos graus-de-liberdade nodais do elemento (m).

Os esforços externos a serem considerados incluem o peso próprio, o empuxo hidrostático, as cargas concentradas, as cargas distribuídas

devido a presença de flutuadores, o arrasto hidrodinâmico e o amortecimento estrutural.

- Peso Próprio:

A força distribuída no elemento (m), equivalente ao peso próprio da estrutura, é representada no sistema de coordenadas global por:

$$f_p^{B(m)} = -\rho^{(m)} g \cdot A^{(m)} k \quad (2.8.9)$$

onde $\rho^{(m)}$ é a massa específica do material que compõe a estrutura no elemento (m), g é aceleração da gravidade e k é o vetor unitário na direção do eixo global Z, definido na direção vertical, sentido contrário ao da força peso. O vetor na equação (2.8.9) deve ser transformado para o sistema de coordenadas local antes de adicionado ao restante dos esforços externos para compor a equação (2.8.8).

- Fluido Interno e Pressão Hidrostática:

A estrutura considerada está submersa e contém um fluido em seu interior. Essa configuração resulta em duas forças atuantes sobre a estrutura: o peso próprio proporcional à massa específica do fluido em seu interior, e o empuxo, proporcional à massa específica do fluido em que está imersa. Estas são expressas por:

$$f_b^{B(m)} = g \cdot (A_0^{(m)} \rho_0 - A_i^{(m)} \rho_i) \cdot k \quad (2.8.10)$$

onde $A_0^{(m)}$ é a área da seção circular reta relativa ao raio externo, $A_i^{(m)}$ é a área da seção circular reta relativa ao raio interno, ρ_0 é a massa específica do fluido onde a estrutura está submersa (água do

mar), e ρ_i é a massa específica do fluido contido no interior da estrutura.

- Interação Fluido-Estrutura:

No presente trabalho a correnteza marítima, considerada constante ao longo da análise, é definida na análise do modelo através de um perfil poligonal, definido por valores de velocidade e ângulo de ataque correspondentes a valores de coordenada-z global do fundo para a superfície. O carregamento resultante da ação de uma correnteza de velocidade constante é usualmente aplicado incrementalmente à mesma.

Consideram-se as componentes da força de arrasto hidrodinâmico por unidade de comprimento, atuantes no nó i na direção normal e tangencial ao elemento (m), através da aplicação da equação de Morison (Lustosa, 2000):

$$f_{d_n}^{S(m,i)} = \frac{1}{2} \rho_0 D_0 C_{DN}^{(m,i)} \cdot V_{r_n}^{(m,i)} |V_{r_n}^{(m,i)}| \quad (2.8.10)$$

$$f_{d_x}^{S(m,i)} = \frac{1}{2} \rho_0 D_0 C_{DT}^{(m,i)} \cdot V_{r_x}^{(m,i)} |V_{r_x}^{(m,i)}|$$

onde $C_{DN}^{(m,i)}$ e $C_{DT}^{(m,i)}$ são respectivamente os coeficientes de arrasto hidrodinâmico medidos no nó i do elemento (m), correspondentes às direções tangencial e normal ao elemento e $V_{r_n}^{(m,i)}$ e $V_{r_x}^{(m,i)}$ são as componentes normal e tangencial da velocidade do fluido relativa à estrutura. Os esforços por unidade de comprimento, ao longo do elemento (m), são obtidos da interpolação dos valores nodais do elemento. Assim, considerando-se a variação linear, tem-se

$$f_{D_n}^{S(m)}(x) = \left(1 - \frac{x}{L(m)}\right) f_{D_n}^{S(m,1)} + \left(\frac{x}{L(m)}\right) f_{D_n}^{S(m,2)} \quad (2.8.10)$$

$$f_{D_x}^{S^{(m)}}(x) = \left(1 - \frac{x}{L^{(m)}}\right) f_{D_x}^{S^{(m,1)}} + \left(\frac{x}{L^{(m)}}\right) f_{D_x}^{S^{(m,2)}}$$

Para o caso de escoamento uniformemente acelerado e bi-dimensional de um fluido não-viscoso incidindo sobre uma seção circular, além destas atua a força de inércia por unidade de comprimento, também obtida pela equação de Morison:

$$F_I = C_m \rho_0 \frac{\pi D_o^2}{4} \dot{V}_w \quad (2.8.10)$$

onde C_m é o coeficiente de inércia e \dot{V}_w é a aceleração da partícula fluida normal à linha central do elemento.

f) Vetor Forças Internas

Considerando-se a componente da tensão do elemento obtida por

${}^t \boldsymbol{\tau}^{(m)} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_L^{(m)} ({}^t \hat{\mathbf{u}}^{(m)})$, obtém-se do último termo da equação (2.7.22):

$${}^t \hat{\mathbf{F}}^{(m)} = \left(\int_{{}^t \nabla^{(m)}} \mathbf{B}_L^{(m)T} \mathbf{C} \mathbf{B}_L^{(m)} d{}^t \nabla^{(m)} + \int_{{}^t \nabla^{(m)}} {}^t \sigma_{xx}^{(m)} \mathbf{B}_{NL}^{(m)T} \mathbf{B}_{NL}^{(m)} d{}^t \nabla^{(m)} \right) ({}^t \hat{\mathbf{u}}^{(m)})$$

ou ainda:

$${}^t \hat{\mathbf{F}}^{(m)} = \left({}^t \mathbf{K}_L^{(m)} + {}^t \mathbf{K}_G^{(m)} \right) ({}^t \hat{\mathbf{u}}^{(m)}) \quad (2.8.17)$$

2.9.

Matrizes e Vetores – Representação no Sistema Global

Para a obtenção das equações de equilíbrio da estrutura discretizada, é ainda necessário representar as matrizes e vetores de cada elemento no sistema

global de coordenadas. Esta operação ocorre empregando-se transformações lineares de mudança de base, descritas através das equações:

$$\begin{aligned}
 {}^t\hat{M}^{(m)} &= {}^tT^{(m)T} \cdot {}^t\hat{M}^{(m)} \cdot {}^tT^{(m)} \\
 {}^t\hat{K}_L^{(m)} &= {}^tT^{(m)T} \cdot {}^t\hat{K}_L^{(m)} \cdot {}^tT^{(m)} \\
 {}^t\hat{K}_G^{(m)} &= {}^tT^{(m)T} \cdot {}^t\hat{K}_G^{(m)} \cdot {}^tT^{(m)} \\
 {}^{t+\Delta t}\hat{R}^{(m)} &= {}^tT^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{R}^{(m)} \cdot {}^tT^{(m)} \\
 {}^{t+\Delta t}\hat{F}^{(m)} &= {}^tT^{(m)T} \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{F}^{(m)} \cdot {}^tT^{(m)}
 \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

onde ${}^tT^{(m)}$ é a matriz de mudança de base das coordenadas locais do elemento (m) no instante de tempo t, e é variável no tempo de acordo com a orientação do elemento (m) em relação ao sistema de coordenadas global.

2.10. Equações Incrementais de Movimento

Seguinte aos procedimentos descritos nas seções 2.8 e 2.9, e impondo-se condição de continuidade entre os elementos, obtém-se, para o instante $t + \Delta t$, a equação de movimento incremental discretizada da estrutura:

$${}^t\hat{M}^{t+\Delta t} \ddot{U} + {}^t\hat{K}_{ig} U = {}^{t+\Delta t}\hat{R} - {}^t\hat{F} \tag{2.10.1}$$

onde ${}^t\hat{K}_{ig} = {}^t\hat{K}_L + {}^t\hat{K}_g$.

2.11. Solução Incremental das Equações de Movimento

Os métodos de integração direta para a solução do sistema de equações de movimento baseiam-se em: a) A equação de equilíbrio é satisfeita em apenas alguns instantes discretos de tempo, e não ao longo de toda a análise. Assim, na integração temporal, emprega-se o mesmo procedimento utilizado na análise estática incremental, diferenciando-se apenas na inclusão dos efeitos da inércia e do amortecimento; e b) Para cada intervalo de tempo considerado, as variações nos deslocamentos, nas velocidades e nas acelerações são assumidas. O modo como cada método faz a previsão destas variações tem influência direta na sua estabilidade, exatidão e custo computacional da análise.

Os métodos de integração direta são classificados em explícitos e implícitos. Os métodos explícitos utilizam a condição de equilíbrio no instante atual t da análise para obter-se a resposta da estrutura no instante $t + \Delta t$ enquanto nos métodos implícitos, impõe-se a condição de equilíbrio no próprio instante $t + \Delta t$, onde a resposta da estrutura deve ser obtida.

No presente trabalho é utilizado o método implícito de integração direta de Newmark. Na seção 2.11.3, este método é aplicado à discretização temporal não-linear descrito nas seções anteriores.

2.11.1. Método de Newmark

Considerando-se o sistema de equações de equilíbrio da estrutura escrito no instante de tempo $t + \Delta t$:

$$M {}^{t+\Delta t}\ddot{U} + C {}^{t+\Delta t}\dot{U} + K {}^{t+\Delta t}U = {}^{t+\Delta t}R \quad (2.11.1)$$

os valores das acelerações ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$, velocidades ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ e deslocamentos ${}^{t+\Delta t}U$ são desconhecidos. O método de Newmark considera a aceleração no intervalo Δt constante, e então podemos obter os valores das velocidades e deslocamentos no instante $t + \Delta t$ através de sua integração. As seguintes hipóteses são feitas:

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \left[(1 - \delta) {}^t\ddot{U} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \Delta t \quad (2.11.2)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{U} = {}^t\hat{U} + {}^t\dot{U} \cdot \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{U} + \alpha \cdot {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \Delta t^2 \quad (2.11.3)$$

onde δ e α são parâmetros característicos referentes à estabilidade e à precisão da integração temporal considerada. O método é incondicionalmente estável para as seguintes faixas dos parâmetros: $0.5 \leq \delta \leq 1.0$ e $0.25 \leq \alpha \leq 0.56$ (Andrews, 2004). Também, para $\delta = 1/2$ e $\alpha = 1/4$, o método reduz-se ao método da aceleração média, também chamado de regra trapezoidal (figura 2.5).

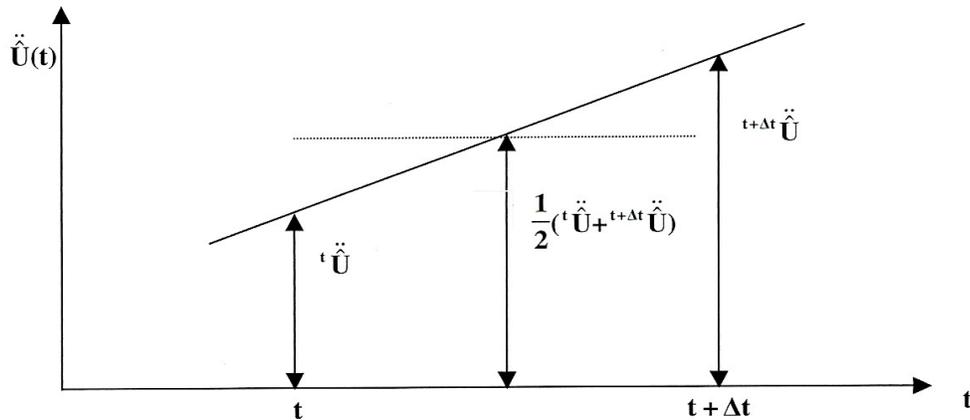


Figura 2.5 - Aceleração Considerada na Regra Trapezoidal.

Pode-se notar que nas equações (2.11.2) e (2.11.3) os vetores posição e velocidade dependem do vetor aceleração no instante $t + \Delta t$. Portanto, resolvendo (2.11.3) para ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ em termos de ${}^{t+\Delta t}\hat{U}$ e substituindo-se em (2.11.2), obtém-se ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ e ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ em função dos deslocamentos desconhecidos ${}^{t+\Delta t}\hat{U}$. Estas relações são substituídas em (2.11.1) que é resolvida para ${}^{t+\Delta t}\hat{U}$. Pode-se então calcular ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$ e ${}^{t+\Delta t}\dot{U}$ através das equações (2.11.2) e (2.11.3). Com este procedimento obtém-se:

$${}^t\hat{K}_{eq} \cdot \hat{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{R}_{eq} - {}^t\hat{F} \quad (2.11.4)$$

$${}^t\hat{K}_{eq} = {}^t\hat{K}_{tg} + a_0 {}^t\hat{M} + a_1 {}^t\hat{C} \quad (2.11.5)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}_{eq} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} + {}^t\hat{\mathbf{M}}(a_0 {}^t\mathbf{U} + a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) + {}^t\hat{\mathbf{C}}(a_1 {}^t\mathbf{U} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) \quad (2.11.6)$$

onde (Bathe, 1996):

$$a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}; a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}; a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}; \quad (2.11.7)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$$

2.11.2. Amortecimento Estrutural

Além dos efeitos de rigidez e inércia, o comportamento dinâmico de *risers* também apresenta no movimento efeitos de dissipação da energia. Esta está associada ao amortecimento causado pelas forças de arrasto hidrodinâmico, devidas à interação fluido-estrutura, e pelo atrito interno do tubo ou cabo, denominado de amortecimento estrutural. Segundo Lustosa (2000), para as vibrações transversais em estruturas *offshore* o amortecimento hidrodinâmico é significativamente maior que o interno enquanto nas vibrações axiais, de alta frequência e pequena amplitude, são pequenos os efeitos de amortecimento causado pelo arrasto hidrodinâmico.

Do modelo de Rayleigh obtém-se a matriz de amortecimento interno, modelada como combinação linear das matrizes de massa e rigidez da estrutura, na forma

$$\mathbf{C} = \alpha_d \cdot \mathbf{M} + \beta_d \cdot \mathbf{K} \quad (2.11.8)$$

onde α_d e β_d são parâmetros associados aos dois valores do fator de amortecimento crítico (ζ_1 e ζ_2) e suas respectivas frequências (ω_1 e ω_2), relativos a dois modos de vibração da estrutura e expresso por (Lustosa, 2000):

$$\alpha_d = \frac{2\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot (\zeta_1 \cdot \omega_2 - \zeta_2 \cdot \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (2.11.9)$$

$$\alpha_d = \frac{2(\zeta_2 \cdot \omega_2 - \zeta_1 \cdot \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (2.11.10)$$

A parcela $\alpha_d \cdot M$ contribui para o amortecimento às baixas frequências, enquanto a segunda parcela, $\beta_d \cdot K$, tem uma influencia dominante no comportamento à altas frequências (Lustosa, 2000).

2.11.3.

Método de Newton-Raphson na Análise Dinâmica Não-Linear

Considerando-se a não-linearidade apresentada por (2.10.1), é necessário o uso de um método iterativo para a obtenção do vetor incremento de deslocamento \hat{U} , correspondente ao equilíbrio da estrutura em cada instante de tempo. A seguir é apresentado o método de integração direta de Newmark, integrado ao método iterativo de Newton-Raphson. As equações (2.11.4) reescritas na forma iterativa, descrita na equação (2.3.7), resultam em:

$${}^t \hat{K}_{eq}^{(k-1)} \cdot \hat{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \hat{R}_{eq}^{(k)} - {}^t \hat{F}^{(k-1)} \quad (2.11.11)$$

onde

$${}^{t+\Delta t} \hat{K}_{eq}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t} \hat{K}_{tg}^{(k-1)} + a_0 {}^{t+\Delta t} \hat{M}^{(k-1)} + a_1 {}^{t+\Delta t} \hat{C}^{(k-1)} \quad (2.11.12)$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{R}_{eq}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \hat{R}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \hat{M}^{(k-1)} (a_0 {}^t U + a_2 {}^t \dot{U} + a_3 {}^t \ddot{U}) + {}^{t+\Delta t} \hat{C}^{(k-1)} (a_1 {}^t U + a_4 {}^t \dot{U} + a_5 {}^t \ddot{U}) \quad (2.11.13)$$

com:

$${}^{t+\Delta t} \hat{F}^{(0)} = {}^t \hat{F} ; \quad {}^{t+\Delta t} \hat{K}_{tg}^{(0)} = {}^t \hat{K}_{tg} ; \quad {}^{t+\Delta t} \hat{M}^{(0)} = {}^t \hat{M} \quad e \quad {}^{t+\Delta t} \hat{C}^0 = {}^t \hat{C}$$

2.11.4. Prescrição de Movimentos

Considerando-se a análise dinâmica da linha, não se conhece a força aplicada em sua extremidade pela unidade flutuante. Os dados disponíveis são do movimento da unidade flutuante onde a linha está acoplada, causado pela ação de ondas marinhas. Torna-se necessário, portanto, impor estes movimentos na extremidade superior da linha através da eliminação dos graus de liberdade que sofrem esta prescrição de movimento, e, adicionando-se esforços equivalentes a esta prescrição. Para a equação de equilíbrio dinâmico incremental da linha flexível, escrita em sua forma iterativa:

$${}^{t+\Delta t} \hat{M}^{(k-1)} {}^{t+\Delta t} \ddot{\hat{U}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \hat{C}^{(k-1)} {}^{t+\Delta t} \dot{\hat{U}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \hat{K}_{tg}^{(k-1)} {}^{t+\Delta t} \hat{U}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \hat{R}^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \hat{F}^{(k-1)} \quad (2.11.14)$$

e considerando uma malha de elementos finitos com n graus de liberdade, as multiplicações entre matrizes e vetores da equação (2.11.14) se apresentam da seguinte forma:

$$A \Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} & \delta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} & \delta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} & \delta_i \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} & \delta_n \end{bmatrix} \quad (2.11.15)$$

onde A representa as matrizes de massa, amortecimento ou rigidez e Δ representa os vetores de aceleração, velocidade ou incremento do deslocamento da equação

(2.11.14). Considerando-se o i -ésimo grau de liberdade prescrito, a linha e coluna da matriz A e do vetor Δ correspondente a este grau de liberdade são eliminados enquanto acrescenta-se um vetor de esforço equivalente a esta prescrição de ordem $(n-1) \times 1$ que é representado da seguinte forma:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{(i-2)i} \\ a_{(i-1)i} \\ a_{(i+1)i} \\ a_{(i+2)i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \cdot \delta_i \quad (2.11.16)$$

Com isto, para cada produto da equação (2.11.14) obtém-se um vetor esforço equivalente Γ a ser somado à equação de equilíbrio de ordem reduzida. Deve-se observar que o vetor de esforço equivalente relacionado com o produto ${}^{t+\Delta t} \hat{K}_{tg}^{(k-1)} \cdot {}^{t+\Delta t} \hat{U}^{(k)}$, só deverá ser somado a equação de equilíbrio na primeira iteração de cada passo de tempo, já que o deslocamento prescrito é imposto nesta iteração. Nas próximas iterações apenas os outros dois vetores deverão estar presentes.

2.12.

Rotação de Corpo Rígido e Rotação de Deformação

A metodologia empregada para obter-se a matriz transformação de base ${}^t \hat{T}^{(m)}$, através das coordenadas nodais (X e Z) e seus respectivos vetores de incremento de deslocamento para o caso bi-dimensional é apresentada. As rotações nodais são decompostas em duas parcelas: uma associada a deformação e outra equivalente à rotação de corpo rígido.

Da solução da equação (2.11.4) é obtido para cada iteração o vetor incremento de deslocamentos que equivale a dois deslocamentos nodais

($U_x^1, U_z^1, U_x^2, U_z^2$) e uma rotação nodal (U_φ^1 e U_φ^2). Esses incrementos associados às coordenadas da iteração anterior resultam em:

$$\begin{bmatrix} t+\Delta t X_1^{(k)} \\ t+\Delta t Z_1^{(k)} \\ t+\Delta t \varphi_1^{(k)} \\ t+\Delta t X_2^{(k)} \\ t+\Delta t Z_2^{(k)} \\ t+\Delta t \varphi_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+\Delta t X_1^{(k-1)} \\ t+\Delta t Z_1^{(k-1)} \\ t+\Delta t \varphi_1^{(k-1)} \\ t+\Delta t X_2^{(k-1)} \\ t+\Delta t Z_2^{(k-1)} \\ t+\Delta t \varphi_2^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_x^1 \\ U_z^1 \\ U_\varphi^1 \\ U_x^2 \\ U_z^2 \\ U_\varphi^2 \end{bmatrix} \quad (2.12.1)$$

onde os índices do elemento (m) foram omitidos por simplicidade.

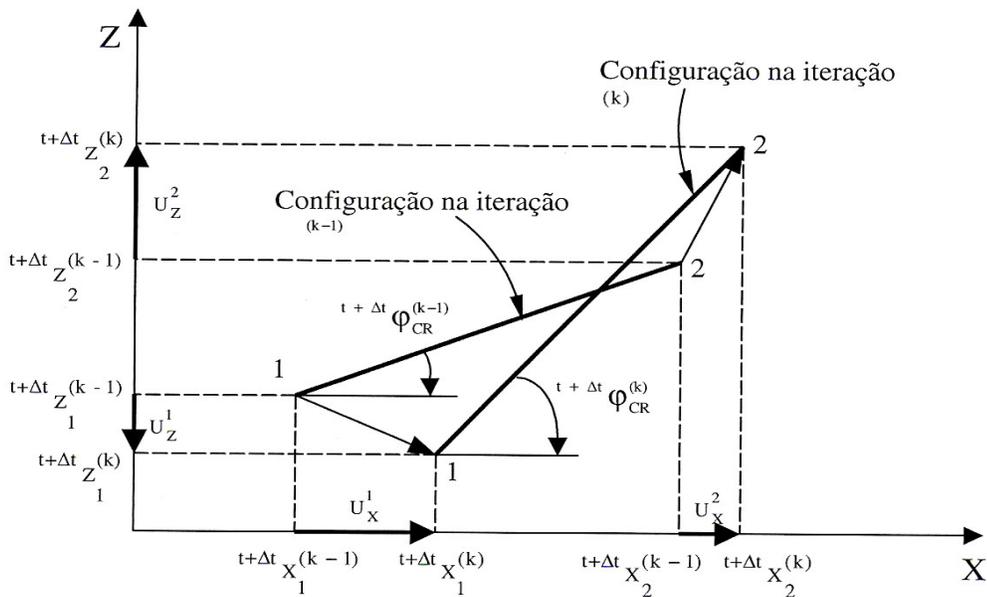


Figura 2.6 - Determinação da Rotação de Corpo Rígido do elemento (m) através das Rotações Nodais.

Através das coordenadas nodais atualizadas, a orientação do elemento (m) é obtida por considerações geométricas, considerando-se a figura 2.6:

$$\varphi_{CR}^{(k)} = -\sin^{-1} \left(\frac{t+\Delta t Z_2^{(k)} - t+\Delta t Z_1^{(k)}}{\sqrt{(t+\Delta t X_2^{(k)} - t+\Delta t X_1^{(k)})^2 + (t+\Delta t Z_2^{(k)} - t+\Delta t Z_1^{(k)})^2}} \right); \quad \text{se } t+\Delta t X_2^{(k)} > t+\Delta t X_1^{(k)}$$

ou

$$\varphi_{CR}^{(k)} = -\sin^{-1} \left(\frac{{}^{t+\Delta t} Z_2^{(k)} - {}^{t+\Delta t} Z_1^{(k)}}{\sqrt{({}^{t+\Delta t} X_2^{(k)} - {}^{t+\Delta t} X_1^{(k)})^2 + ({}^{t+\Delta t} Z_2^{(k)} - {}^{t+\Delta t} Z_1^{(k)})^2}} \right) - \pi; \text{ se } {}^{t+\Delta t} X_2^{(k)} \leq {}^{t+\Delta t} X_1^{(k)} \quad (2.12.2)$$

A parcela da rotação correspondente à deformação deste elemento é obtida subtraindo-se as coordenadas rotacionais nodais (${}^{t+\Delta t} \varphi_1^{(k)}$ e ${}^{t+\Delta t} \varphi_2^{(k)}$) do ângulo correspondente à orientação espacial do elemento (m) ($\varphi_{CR}^{(k)}$).

$$\beta^{1(k)} = {}^{t+\Delta t} \varphi_1^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \varphi_{CR}^{(k)} \text{ e } \beta^{2(k)} = {}^{t+\Delta t} \varphi_2^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \varphi_{CR}^{(k)} \quad (2.12.3)$$

onde $\beta^{1(k)}$ e $\beta^{2(k)}$ são as rotações nodais escritas em relação ao sistema de coordenadas co-rotacionado na iteração (k) e $\varphi_{CR}^{(k)}$ corresponde a rotação de corpo rígido ocorrido durante a análise acrescido da orientação inicial do elemento. O vetor deslocamentos, escrito em relação ao eixo de coordenadas co-rotacionado na iteração (k), resulta em:

$${}_{(t+\Delta t)}^{t+\Delta t} \hat{u}^{(k)T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta^{2(k)} & (\mathbf{L}^{(k)} - \mathbf{L}_0) & 0 & \beta^{2(k)} \end{bmatrix} \quad (2.12.4)$$

À exceção do deslocamento axial do segundo nó, que corresponde a alongação do elemento (m), pode-se observar que todas as translações nodais são ditas como nulas. Pode-se representar os esforços no instante de tempo $t + \Delta t$, em relação ao sistema de coordenadas co-rotacionado, na forma:

$${}^{t+\Delta t} \hat{F}^{(k)} = \left({}^{t+\Delta t} K_L^{(k)} + {}^{t+\Delta t} K_G^{(k)} \right) {}_{(t+\Delta t)}^{t+\Delta t} \hat{u}^{(k)} \quad (2.12.5)$$

Para cada elemento este vetor é obtido e transformado para o sistema global de referência através da transformação obtida em (2.9.1). A matriz transformação, para o problema bi-dimensional, é descrita por:

$${}^tT_{CR}^{(k)T} = \begin{bmatrix} \cos({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & \sin({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & \cos({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & \sin({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & \cos({}^{t+\Delta t}\varphi_{CR}^{(k)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12.6)$$

onde a matriz ${}^tT_{CR}^{(k)T}$ é definida para cada elemento. Após transformar-se o vetor forças internas de cada elemento para o sistema de coordenadas global, estes são somados, obtendo-se o vetor global das forças internas da estrutura.