

4

Solução Numérica e Pós-Processamento

4.1

Solução Numérica das Equações Diferenciais

No presente modelo, a equação de Navier-Stokes tridimensional é transformada em uma equação de Poisson para o campo de pressão, em duas dimensões, e é resolvida pelo método de diferenças centrais.

A equação 3-4 constitui-se numa equação diferencial parcial de segunda ordem, conhecida como equação de Poisson, e descreve o campo de pressão no interior de uma BCP. Esta equação é resolvida numericamente pelo método de diferenças finitas, que aproxima as derivadas pela diferença central dos valores que a função assume em determinados pontos do domínio. Assim, obtém-se uma solução aproximada em um número finito de pontos, determinados por uma malha inserida no programa, desenvolvido em ambiente Matlab®, apresentado no Apêndice B.

4.1.1

Discretização

Foi usado o método numérico de diferença central de segunda ordem para discretizar a equação de Poisson bidimensional, assumindo uma discretização espacial uniforme. Utilizou-se uma malha retangular, com nós igualmente espaçados ao longo das direções axial (NZ nós) e tangencial ($N\theta$ nós) para discretizar o domínio, conforme indicado na figura 4.1.

As incógnitas do problema correspondem às pressões nos nós da malha. A equação algébrica de cada nó relaciona a pressão no mesmo com seus quatro vizinhos. O sistema de equações algébricas decorrente da discretização tem dimensão dada pelo produto de NZ por $N\theta$. No método numérico adotado, o gradiente de pressão é aproximado pela diferença dos valores nos nós, dividido pela distância entre estes nós. Os coeficientes das equações 3-22, 3-32 e 3-56 são calculados pelas médias nas "faces" (ou fronteiras), cuja representação esquemática pode ser vista na figura 4.2.

A seguir apresenta-se a discretização dos termos das equações diferenciais relacionados à pressão (equações 3-22, 3-32 e 3-56).

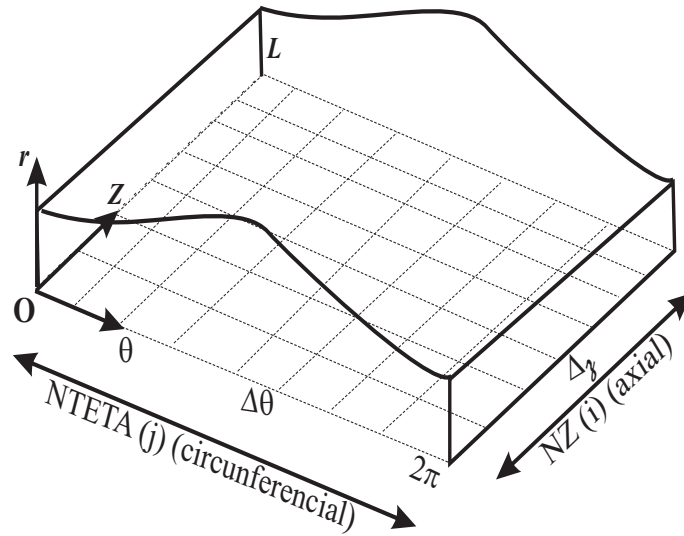


Figura 4.1: Domínio de solução do campo de pressão

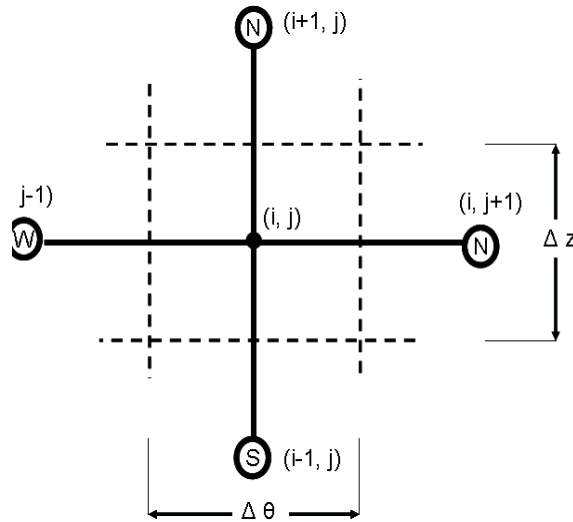


Figura 4.2: Domínio de solução do campo de pressão

Fazendo $F_1 = C_1(z, \theta) \frac{\partial p}{\partial \theta}$, aproxima-se a derivada por :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta} = \frac{F_1^E - F_1^W}{\Delta \theta}$$

Fazendo $F_2 = C_2(z, \theta) \frac{\partial p}{\partial z}$, aproxima-se a derivada por:

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{F_2^N - F_2^S}{\Delta z}$$

Os termos independentes da pressão, representados pelos coeficientes C_{0W} e C_{0U} serão discretizados por:

$$\frac{\partial C_{0W}}{\partial \theta} = \frac{C_{0W}^N - C_{0W}^S}{\Delta \theta}$$

$$\frac{\partial C_{0U}}{\partial z} = \frac{C_{0U}^N - C_{0U}^S}{\Delta z}$$

Escrevendo-se os termos das equações diferenciais na forma discretizada tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[C_1 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{\Delta \theta} \left[C_{1(i,j)} \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta \theta} \right) - C_{1(i,j-1)} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta \theta} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[C_2 \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{1}{\Delta z} \left[C_{2(i,j)} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta z} \right) - C_{2(i-1,j)} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta z} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (C_{0W}) = \frac{[C_{0W(i,j)} - C_{0W(i,j-1)}]}{\Delta \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (C_{0U}) = \frac{[C_{0U(i,j)} - C_{0U(i-1,j)}]}{\Delta z}$$

As fronteiras de entrada e saída da bomba representam condições de contorno da equação discretizada (equação com índices i, j da malha). Nestes pontos são impostos os seguintes valores de pressão:

$$p(z = 0) = p(1, j) = P_e,$$

$$p(z = Lb) = p(NZ, j) = P_s.$$

As fronteiras da direita e da esquerda da malha não representam um contorno físico, mas apenas um artifício de corte para facilitar a implementação da solução numérica. Portanto, estes pontos assumem uma condição de periodicidade dada por:

$$p(\theta = 0) = p(\theta = 2\pi) \quad \text{que equivale a} \quad p(i, 1) = p(i, N\theta).$$

Nas aproximações por diferenças centrais nos nós localizados em $\theta = 2\pi$ deve-se considerar que:

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{j=N\theta} = \frac{p_{(i,2)} - p_{(i,N\theta-1)}}{2\Delta\theta}$$

A partir das equações acima monta-se um sistema linear:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{p}] = [\mathbf{C}_0]$$

onde a matriz \mathbf{A} é formada pelos coeficientes que multiplicam as pressões em cada ponto do domínio discreto, representadas pelo vetor \mathbf{p} de incógnitas, e o vetor do lado direito \mathbf{C}_0 são os termos independentes da pressão.

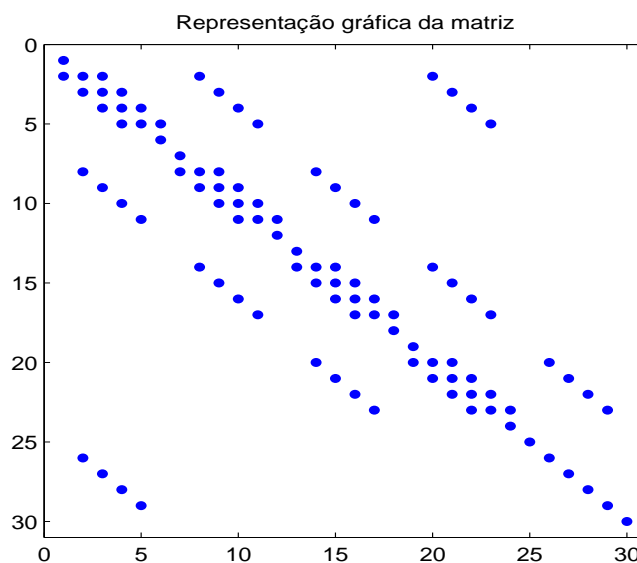


Figura 4.3: Representação esquemática da matriz

A matriz obtida tem o aspecto apresentado na figura 4.3. Observe que a matriz \mathbf{A} tem uma estrutura de banda, a menos da condição de periodicidade. Ao resolver o sistema linear com o método direto de decomposição $[\mathbf{A}] = [\mathbf{L}][\mathbf{U}]$, a banda da matriz cresce, tornando o problema muito menos esparsa e conseqüentemente necessitando mais memória computacional. O aumento de memória poderia ser evitado através da utilização de métodos iterativos, como o GMRES (*generalized minimal residual method*), porém perde-se precisão.

Neste trabalho optou-se por adotar um sistema de blocos, aproveitando-se a estrutura da matriz, sem perda de precisão. Independentemente do número de nós NZ e $N\theta$, a matriz pode ser dividida como:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right] \begin{array}{l} NT - NZ \\ NZ \end{array}$$

Os blocos \mathbf{A}_{11} e \mathbf{A}_{22} são quadrados de dimensão $(NT - NZ)$ e NZ respectivamente, sendo NT a dimensão total da matriz, dada por: $NT = NZ \cdot N\theta$.

Dada a condição de periodicidade, $p(i, 1) = p(i, N\theta)$, o bloco \mathbf{A}_{22} é exatamente a matriz identidade e a banda de \mathbf{A}_{11} é pequena. Dividindo da mesma forma os vetores \mathbf{p} e \mathbf{C}_0 , tem-se:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{I}_{NZ} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{01} \\ \mathbf{C}_{02} \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{p}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{p}_2 = \mathbf{C}_{01},$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{C}_{02}.$$

Assim, o sistema a ser resolvido torna-se:

$$\underbrace{(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21})}_{\mathbf{M}} \mathbf{p}_1 = \underbrace{\mathbf{C}_{01} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}_{02}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{M}\mathbf{p}_1 = \mathbf{b}$$

Uma vez encontrado \mathbf{p}_1 , pode-se substituir em $\mathbf{p}_2 = \mathbf{C}_{02} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{p}_1$ e obter todo o campo de pressão. Dessa forma o sistema é menor e pode-se utilizar o método direto de solução da matriz.

4.2

Pós-Processamento

Resolvido o sistema matricial decorrente da equação de Poisson, obtém-se o campo de pressão, a partir do qual determina-se o campo de velocidades para cada instante de tempo. A partir daí, são obtidas a vazão instantânea fornecida pela bomba, além de outras variáveis tais como a eficiência volumétrica e as velocidades, para um conjunto de parâmetros operacionais.

4.2.1

Vazão

A vazão nominal da BCP a uma dada rotação, definida pelo produto do deslocamento volumétrico pela rotação, é a vazão que ela deve teoricamente bombear contra um diferencial de pressão nulo, em bancada de teste com rotor de ajuste padronizado.

O deslocamento volumétrico da bomba (*pump displacement*) corresponde ao volume nominal produzido por rotação (ou revolução), sendo proporcional ao número de voltas do rotor (revoluções por minuto ou RPM).

O volume nominal é calculado pela expressão 4-1 e corresponde ao volume deslocado quando o rotor perfaz uma revolução, movimentando uma cavidade em um passo de estator. O volume deslocado numa rotação é igual à área de um passo multiplicada pelo passo do estator:

$$Volume = 4 \cdot E \cdot Dr \cdot Pst \quad (4-1)$$

A partir destas definições pode-se escrever a expressão para a vazão nominal da BCP:

$$Q_n = Volume \cdot RPM \quad (4-2)$$

A vazão instantânea de fluido fornecido pela bomba é obtida pela integração da velocidade na área de fluxo, conforme a equação 4-3:

$$Q_t = \int_A u \, dA = \int_0^{2\pi} \int_{R_r}^{R_o} ur \, dr \, d\theta \quad (4-3)$$

A integral de u em r é discretizada por:

$$\int_{R_r}^{R_o} ur \, dr = C_{2(i,j)} \left[\frac{p^{(i+1,j)} - p^{(i,j)}}{\Delta z} \right] - \rho g C_{2(i,j)} - C_{0U(i,j)} \quad (4-4)$$

Em seguida é feita a integração em θ , também numericamente, através de:

$$Q_t = \frac{\int_{R_r}^{R_o} ur \, dr_{(i,j+1)} - \int_{R_r}^{R_o} ur \, dr_{(i,j)}}{2} \quad (4-5)$$

O modelo fornece uma vazão instantânea, obtida da equação 4-5. Para se obter a vazão média de fluido fornecido pela bomba, integra-se a vazão instantânea como mostra a equação 4-6 :

$$Q_m = \frac{\int_0^{t_f} Q_t \, dt}{t_f} \quad (4-6)$$

Também foi estabelecida uma vazão adimensional, para avaliar os parâmetros operacionais de maneira mais abrangente, dada pela equação 5-2.

$$Q_{adim} = \frac{Q_m}{Q_n} \quad (4-7)$$

4.2.2

Eficiência Volumétrica

O escorregamento ou recirculação que ocorre na BCP quando submetida a um diferencial de pressão, faz com que a vazão real seja menor que a vazão nominal. Assim, estabelece-se uma eficiência volumétrica, geralmente expressa em percentagem, que é dada pela relação entre a vazão prevista pelo modelo e a vazão nominal, conforme apresentado na equação 4-8.

$$\eta_V = (Q_m/Q_n) \cdot 100\% \quad (4-8)$$