



**Selma Fontes de Araujo Andrade**

**Modelo Assintótico para Escoamento  
Monofásico em Bombas de Cavidades  
Progressivas**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio

Orientador : Prof. Márcio da Silveira Carvalho, PhD.  
Co-Orientador: Prof. Juliana Vianna Valério, Dra.

Rio de Janeiro  
Agosto de 2008



**Selma Fontes de Araujo Andrade**

**Modelo Assintótico para Escoamento  
Monofásico em Bombas de Cavidades  
Progressivas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica do Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho, PhD.**

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

**Prof. Juliana Vianna Valério, Dra.**

Co-Orientador

Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. Valdir Estevam, Dr.**

PETROBRAS/E&P

**Prof. Luis Fernando A. Azevedo, PhD.**

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

**Prof. Geraldo Afonso Spinelli Martins Ribeiro, PhD.**

PETROBRAS/E&P

**Prof. José Eugênio Leal, PhD.**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de Agosto de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Selma Fontes de Araujo Andrade**

Graduou-se em Engenharia Química na Universidade Federal de Sergipe e especializou-se em Engenharia de Petróleo na Petrobras, onde trabalha no segmento de produção, na atividade de elevação artificial de petróleo.

#### Ficha Catalográfica

Andrade, Selma F. A.

Modelo Assintótico para Escoamento Monofásico em Bombas de Cavidades Progressivas / Selma Fontes de Araujo Andrade; orientador: Márcio da Silveira Carvalho, PhD.; co-orientador: Juliana Vianna Valério, Dra.. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 2008.

v., 116 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Mecânica – Tese. 2. Elevação artificial de petróleo. 3. Bomba de cavidades progressivas. 4. Teoria da lubrificação. 5. Modelo Assintótico. I. Carvalho, Márcio S.. II. Valério, Juliana Vianna. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Ao Professor Marcio Carvalho cujos brilhantismo e compreensão são garantia de sucesso para seus orientandos, aos quais não poupa atenção e incentivo.

À Professora Juliana Valério cujas dedicação, amizade e entusiasmo tornaram possível a realização deste trabalho.

À Petrobras pelo patrocínio e à PUC-Rio pela infraestrutura, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao meu marido Jocélio Fróes que foi infinitamente compreensivo e solidário e me deu toda segurança e apoio necessários ao sucesso desta jornada.

À minha irmã Nilma Fontes que contribuiu louvavelmente com os desenhos.

Aos meus colegas da Petrobras pelo companheirismo e pela ajuda diária.

Aos meus colegas da PUC-Rio que me fizeram adorar esse lugar.

## Resumo

Andrade, Selma F. A.; Carvalho, Márcio S.; Valério, Juliana Vianna. **Modelo Assintótico para Escoamento Monofásico em Bombas de Cavidades Progressivas**. Rio de Janeiro, 2008. 116p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O conhecimento do escoamento no interior das Bombas de Cavidades Progressivas (BCP) é de grande importância para aprimorar o desenho e a aplicação destas bombas em poços de petróleo. A simulação do escoamento na BCP é extremamente complexa devido ao seu caráter transiente, à presença de paredes móveis e à diferença de escala do tamanho da folga entre o estator e o rotor. Esta complexidade torna impraticável o uso da simulação como ferramenta de projeto. Esta dissertação apresenta um modelo assintótico do escoamento no interior de BCP monobular com estator metálico. O modelo foi desenvolvido para fluido Newtoniano e utiliza a teoria da lubrificação para reduzir as equações tridimensionais de Navier-Stokes a uma equação de Poisson bidimensional, para o campo de pressão. As equações diferenciais do modelo, escritas com coordenadas cilíndricas, foram resolvidas numericamente pelo método de diferenças finitas de segunda ordem. O programa desenvolvido em Matlab® oferece resultados que reproduzem satisfatoriamente os dados experimentais, com tempo de processamento e capacidade computacional significativamente inferiores aos modelos que resolvem o sistema completo de equações. Os resultados obtidos mostram o efeito de parâmetros geométricos e operacionais, tais com folga estator-rotor, número de estágios, viscosidade e densidade do fluido, rotação e diferencial de pressão, nas curvas de desempenho da bomba.

## Palavras-chave

Elevação artificial de petróleo. Bomba de cavidades progressivas. Teoria da lubrificação. Modelo Assintótico.

## Abstract

Andrade, Selma F. A.; Carvalho, Márcio S.; Valério, Juliana Vianna. **Asymptotic Model for Monophasic Flow Through Progressive Cavities Pump**. Rio de Janeiro, 2008. 116p. MsC Thesis — Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The fundamental understanding of the flow inside Progressive Cavities Pumps (PCP) represents an important step to improve the efficiency of these pumps in the petroleum artificial lift industry. The simulation of the flow in the PCP is extremely complex due to the transient character of the flow, the moving boundaries and the difference in length scale of the channel height between the stator and rotor. This complexity makes the use of CFD as an engineering tool almost impossible. This dissertation presents an asymptotic model to describe a single phase flow through progressive cavities pumps, using the lubrication theory approach. The model was developed for Newtonian fluid and the lubrication theory was used to reduce the three-dimensional Navier-Stokes equations to a two-dimensional Poisson's equation for the pressure field. The model's differential equations were written in cylindrical coordinates and were numerically solved by the finite difference method. A program was developed in Matlab® and the results reproduce the experimental data, with a significantly shorter processing time, which is orders of magnitude faster than the model that solves the complete set of equations. The results show the effect of geometry and operational parameters, such as the clearance between stator and rotor, the number of pitches, viscosity and density of the fluid, rotation and differential pressure, in the pump performance curves.

## Keywords

Petroleum artificial lift. Progressive cavity pumps. Lubrication theory. Asymptotic model.

# Sumário

1	Introdução	12
2	Levantamento Bibliográfico	16
3	Modelamento Matemático	21
3.1	Modelo para Estator e Rotor com Simetria Axial	25
3.1.1	Regime Permanente	26
3.1.2	Regime Transiente	29
3.2	Modelo para BCP com Estator Rígido e Lóbulo Único	31
3.2.1	Geometria da BCP	32
3.2.2	Descrição da Cinemática	38
3.2.3	Desenvolvimento do Modelo	40
4	Solução Numérica e Pós-Processamento	44
4.1	Solução Numérica das Equações Diferenciais	44
4.1.1	Discretização	44
4.2	Pós-Processamento	48
4.2.1	Vazão	49
4.2.2	Eficiência Volumétrica	50
5	Resultados	51
5.1	Resultados da geometria simplificada	51
5.1.1	Convergência de Malha	51
5.1.2	Comparação com a solução analítica de geometria anular	53
5.1.3	Regime Permanente	55
5.1.4	Regime Transiente	60
5.2	Resultados da BCP Metálica	63
5.2.1	Convergência de Malha	64
5.2.2	Validação do Modelo	65
5.2.3	Análise dos parâmetros operacionais para a BCP	71
6	Conclusão e trabalhos futuros	85
	Sumário das notações	87
	Referências Bibliográficas	89
A	Apêndice: Análise Dimensional	91
A.1	Definições	91
A.2	Equação da Continuidade	92
A.3	Equações de Navier-Stokes	93
B	Apêndice: Programa	97

## Lista de figuras

1.1	Componentes da BCP	12
1.2	Gamboa [8]: seções transversais de BCP mono e multilobular	13
2.1	Olivet <i>et al</i> [10]: esquema do aparato de testes de BCP	18
2.2	Olivet <i>et al</i> [10]: pontos de posicionamento dos sensores de pressão e temperatura	18
2.3	Gamboa <i>et al</i> [7]: representação do modelo de escorregamento	19
2.4	Paladino <i>et al</i> [11]: topologia de blocos usada na geração da malha	20
3.1	Escorregamento entre cavidades da BCP	21
3.2	Geometria simplificada: tubos concêntricos, sendo o externo de perfil reto e o interno de perfil senoidal	23
3.3	Geometria axisimétrica: perspectiva dos cilindros concêntricos	25
3.4	Geometria simplificada, com movimento axial do estator	26
3.5	Geometria simplificada, com movimento axial do rotor	29
3.6	Seção longitudinal de BCP <i>singlelobe</i>	33
3.7	Seção transversal da BCP <i>singlelobe</i>	33
3.8	Translação do rotor na seção transversal da BCP	34
3.9	Elementos geométricos da seção transversal de BCP <i>singlelobe</i>	35
3.10	Regiões da seção transversal da BCP	35
3.11	Região 1 da seção transversal da BCP	36
3.12	Região 2 da seção transversal da BCP	36
3.13	Região 3 da seção transversal da BCP	37
3.14	Região 4 da seção transversal da BCP	37
3.15	Movimentação transversal do rotor	38
3.16	Variáveis para descrever o movimento do rotor	39
4.1	Domínio de solução do campo de pressão	45
4.2	Domínio de solução do campo de pressão	45
4.3	Representação esquemática da matriz	47
5.1	Convergência da malha no cálculo da vazão, variando NZ	52
5.2	Convergência da malha no cálculo da vazão, variando $N\theta$	53
5.3	Gradiente de pressão em anular de tubos concêntricos	54
5.4	Gradiente de pressão em escoamento anular de tubos concêntricos com interno senoidal (canal com entrada larga - esquerda- e entrada estreita - direita)	56
5.5	Gradiente de pressão em ângulos opostos (geometria axisimétrica)	56
5.6	Vazão adimensional versus velocidade do estator	57
5.7	Relação entre parâmetros operacionais e geométricos	58
5.8	Vazão adimensional versus $\Delta P$ adimensional, em função do parâmetro geométrico $\delta$	59
5.9	Vazão X $\Delta P$ , em função da viscosidade	59
5.10	Perfil de pressão e movimento do rotor - 1º tempo	60
5.11	Perfil de pressão e movimento do rotor - 2º tempo	60



5.12	Perfil de pressão e movimento do rotor - 3º tempo	61
5.13	Perfil de pressão e movimento do rotor - 4º tempo	61
5.14	Perfil de pressão e movimento do rotor - 5º tempo	61
5.15	Perfil de pressão e movimento do rotor - 6º tempo	62
5.16	Perfil de pressão em regime transiente	62
5.17	Vazão adimensional $\times$ tempo, variando a folga de 0,1mm a 1mm	63
5.18	Teste de convergência de malha	64
5.19	Comparação de resultados com fluido de 1cP @ 300rpm	67
5.20	Comparação de resultados com fluido de 1cP @ 400rpm	67
5.21	Comparação de resultados com fluido de 42cP @ 100rpm	67
5.22	Comparação de resultados com fluido de 42cP @ 300rpm	68
5.23	Comparação de resultados com fluido de 42cP @ 400rpm	68
5.24	Comparação de resultados com fluido de 433cP @ 300rpm e 400rpm	69
5.25	Figura 13 de Olivet <i>et al</i> [10]	69
5.26	Figura 13 de Olivet <i>et al</i> [10]	70
5.27	Pressão em cinco pontos do estator durante um giro do rotor (Óleo 42cP @ 400rpm, $\Delta P = 119.4\text{psi}$ )	71
5.28	Distribuição de pressão (Óleo 42cP @ 400rpm)	71
5.29	Gráficos de contorno de folga e pressão (1º tempo)	72
5.30	Gráficos de contorno de folga e pressão (2º tempo)	73
5.31	Gráficos de contorno de folga e pressão (3º tempo)	73
5.32	Gráficos de contorno de folga e pressão (4º tempo)	73
5.33	Gráficos de contorno de folga e pressão (5º tempo)	74
5.34	Gráficos de contorno de folga e pressão (6º tempo)	74
5.35	Gráficos de contorno de pressão e velocidade	75
5.36	Gráficos de contorno de pressão e velocidade	75
5.37	Gráficos de contorno de pressão e velocidade	75
5.38	Gráficos de contorno de pressão e velocidade	76
5.39	Detalhe dos vetores velocidade da figura 5.38	76
5.40	Gráficos de contorno de pressão e velocidade	76
5.41	Detalhe dos vetores velocidade da figura 5.40	77
5.42	Gráficos de contorno de pressão e velocidade	77
5.43	Detalhe dos vetores velocidade da figura 5.42	77
5.44	Pressão versus comprimento, para $\Delta P = 3kPa$	78
5.45	Pressão versus comprimento, para $\Delta P = 844kPa$	78
5.46	Vazão versus tempo	79
5.47	Vazão versus diferencial de pressão	80
5.48	Eficiência volumétrica versus diferencial de pressão	80
5.49	Vazão versus rotação	81
5.50	Vazão adimensional em função do parâmetro geométrico $\delta$	81
5.51	Vazão adimensional $\times$ $\Delta P$ , variando a folga	82
5.52	Vazão adimensional $\times$ comprimento do estágio	82
5.53	Vazão adimensional $\times$ comprimento da bomba	83
5.54	Vazão adimensional $\times$ comprimento da bomba	83
B.1	Principal	98
B.2	FuncRo (1a. parte)	99
B.3	FuncRo (2a. parte)	100
B.4	DifRo (1a. parte)	101

B.5 DifRo (2a. parte)	102
B.6 DifRo (3a. parte)	103
B.7 Geometria	104
B.8 CalculaCf (1a. parte)	105
B.9 CalculaCf (2a. parte)	106
B.10 EntradasA	107
B.11 CondCont	108
B.12 Bloco	109
B.13 Pospro (1a. parte)	110
B.14 Pospro (2a. parte)	111
B.15 Pospro (3a. parte)	112
B.16 Resultados (1a. parte)	113
B.17 Resultados (2a. parte)	114
B.18 Valores (1a. parte)	115
B.19 Valores (2a. parte)	116

## Lista de tabelas

5.1	Validação do modelo para canal de raio 6 mm	54
5.2	Validação do modelo para canal de raio 1 mm	54
5.3	Verificação da influência da rotação	55
5.4	Características dos óleos utilizados por Gamboa [8]	64
5.5	Números de pontos da malha para a BCP real	65
5.6	Número de Reynolds	66
5.7	Pontos selecionados para os gráficos de contorno de folga e pressão	72