2
O problema de atribuição de árbitros

Neste capítulo é apresentado em detalhes o problema de atribuição de árbitros a partidas esportivas. A próxima seção traz uma descrição detalhada do problema, discutindo possíveis variantes dependendo do contexto a que se insere o problema. A Seção 2.2 traz uma breve revisão dos trabalhos relacionados a este tema encontrados na literatura. Em seguida, na Seção 2.3, propõe-se uma formulação para uma versão simplificada do PAA, denominada versão básica ou simplesmente PAA básico, comum a várias ligas esportivas amadoras e que servirá como ponto de partida para o estudo realizado nesta tese. Posteriormente, na Seção 2.4 segue a demonstração de que a versão de decisão do problema básico é NP-completa. Com o intuito de explorar uma abordagem de resolução exata, a Seção 2.5 apresenta três formulações por programação inteira. Os resultados da aplicação destas formulações na resolução de algumas instâncias teste são apresentados na Seção 2.6.

2.1
Descrição do problema

Uma partida esportiva é regulada por um conjunto de regras que varia dependendo do esporte e do torneio a que esta partida está vinculada. A *equipe de arbitragem* (EA) é um grupo de árbitros que são responsáveis por assegurar que as regras são respeitadas em uma determinada partida. O número de árbitros que compõem cada EA pode variar, dependendo do esporte, da competição ou até mesmo da importância da própria partida: jogos de futebol em geral requerem três árbitros, enquanto que no basquete cada partida necessita de apenas dois. Cada membro de uma EA ocupa uma posição que por sua vez está associada a alguma função nesta equipe de arbitragem. Por exemplo, num jogo de futebol profissional uma EA é formada por um árbitro principal e dois auxiliares, totalizando três posições a serem preenchidas: uma posição associada à função de árbitro principal e duas posições associadas à função de árbitro auxiliar ou bandeirinha. Cada EA é reunida para trabalhar em uma partida específica, de forma que seus integrantes não necessariamente precisam trabalhar sempre juntos, ou seja, podem formar equipes de arbitragens com outros árbitros para trabalhar em outras partidas.

A atribuição de árbitros é um problema que surge no contexto da organização de competições esportivas. A diversidade de situações nas quais árbitros devem ser atribuídos a partidas resulta em um grande número de variantes possíveis para este problema. No caso do campeonato brasileiro de futebol profissional, as EA's são definidas a cada rodada da competição através de sorteios. O número de árbitros disponíveis é sempre maior que o número de posições nas partidas de cada rodada, de forma que cada árbitro é designado a no máximo uma partida por rodada. Assim, o problema de atribuição de árbitros para as partidas do campeonato brasileiro claramente não apresenta dificuldade de resolução. Em contrapartida, algumas ligas regionais amadoras nos Estados Unidos promovem centenas de jogos todas as semanas, que devem ser arbitrados por centenas de árbitros certificados. Como, em geral, o número de árbitros certificados disponíveis nestas ligas é inferior ao número total de posições a serem preenchidas em EA's, muitos dos árbitros têm que trabalhar em várias partidas no mesmo dia. Neste contexto, várias restrições são incorporadas ao PAA, como por exemplo, a impossibilidade de se atribuir um mesmo árbitro a partidas com horários conflitantes. Tais requisitos tornam o problema de atribuição de árbitros mais difícil, em termos de tempo e esforço para sua resolução. Esta tese tem como principal objetivo o estudo de problemas inéditos de atribuição de árbitros e sua resolução por meio de técnicas de otimização combinatória.

Exemplos concretos de aplicações do PAA podem ser encontrados em algumas ligas regionais amadoras nos Estados Unidos. Ligas de diversos esportes, tais como beisebol, basquete e futebol, organizam jogos subdivididos em diferentes divisões, de acordo com a idade e sexo dos atletas. Em uma única liga da Califórnia, podem ocorrer até 500 jogos de futebol num final de semana, os quais demandam um grande número de árbitros certificados. Na liga MOSA (Monmouth & Ocean Counties Soccer Association) em Nova Jersey, meninos e meninas com idades entre 8 e 18 anos são agrupados em até seis divisões por idade e sexo e com seis equipes por divisão, totalizando 396 jogos realizados todos os domingos. Estas ligas são alguns exemplos de aplicações concretas que demandam a atribuição de árbitros a centenas de partidas esportivas.

Diversas regras devem ser observadas ao se atribuir árbitros a partidas. Primeiramente, partidas de diferentes ligas ou divisões podem ter diferentes graus de importância, resultando naturalmente em diferentes níveis de exigência com relação à capacitação dos respectivos árbitros. Cada função nas respectivas EA's deve ser associada a um nível mínimo de qualificação que um árbitro deve atender para que possa ser designado a uma posição de arbitragem associada a tal função. Da mesma forma, cada árbitro deve ser avaliado e classificado para que se possa definir a que posições e em que equipes de arbitragem ele pode ser atribuído.

Outros requisitos surgem devido ao pequeno número de árbitros certificados disponíveis em algumas ligas, fazendo com que muitos deles tenham que trabalhar em várias partidas no mesmo dia. Nesta situação, uma restrição natural é a de que um árbitro não pode ser designado a partidas que apresentem conflitos de horários. Além disso, é comum que os árbitros definam a priori o número desejado (alvo) e o número máximo de partidas por dia nas quais poderão trabalhar. Cada árbitro deve indicar, também antecipadamente, os dias e horários em que estará indisponível. O fato de um árbitro ser designado a várias partidas durante o mesmo dia implica também na consideração do tempo gasto nos deslocamentos entre os diferentes locais de partidas, nos casos de árbitros que são designados para atuar em diferentes localidades no mesmo dia. Além disso, alguns árbitros podem se declarar impossibilitados de se deslocarem para atuar em diferentes localidades num mesmo dia (por exemplo, por não possuírem carro ou outro meio de transporte).

Em algumas ligas amadoras, alguns jogadores podem atuar também como árbitros, normalmente em divisões inferiores àquelas em que jogam. Num caso típico, uma liga poderia ter jogadores de idades mais avançadas certificados para arbitrar partidas de divisões de idades inferiores. Outro caso comum neste tipo de liga é o de árbitros que são parentes de jogadores. Em ambas as situações, uma restrição natural é que um árbitro não pode ser designado a um jogo no qual ele (ou um parente) esteja escalado para jogar.

Outra situação que surge em algumas aplicações reais é a existência de grupos de árbitros que desejam trabalhar em conjunto com os mesmos parceiros em todos os jogos a que são designados. Tal exigência pode ocorrer, por exemplo, quando árbitros têm maior confiança em trabalhar com parceiros específicos ou quando desejam viajar ou arbitrar com familiares ou amigos. Dependendo do caso, um grupo de árbitros pode exigir que sejam designados sempre para os mesmos jogos ou pode apenas solicitar que atuem juntos sempre que possível, implicando assim na existência de restrições fortes ou fracas.

Diversos objetivos são relevantes quando deseja-se atribuir árbitros a partidas. Nas aplicações em que os árbitros definem um valor alvo para o número de jogos que desejam arbitrar, um objetivo natural seria minimizar a soma sobre todos os árbitros do valor absoluto das diferenças entre os números de jogos a que foram designados e que gostariam de arbitrar. Nas aplicações em que alguns árbitros têm que se deslocar entre alguns de seus jogos, penalizações para o número de viagens podem ser incorporadas à função objetivo. Também pode haver interesse na minimização da distância ou do tempo total de viagem. A minimização do tempo total de espera entre partidas consecutivas também pode ser relevante.

Adicionalmente, os organizadores de torneios esportivos podem querer priorizar atribuições que satisfaçam algumas preferências pessoais (suas ou dos árbitros) com respeito a locais, divisões e horários em que cada árbitro vai atuar. Outros requisitos podem surgir, dependendo do contexto específico em que se insere cada PAA. A exigência de que árbitros com maior qualificação sejam designados a mais partidas do que os menos capacitados, a possibilidade de se manter árbitros em reserva para cobrir eventuais ausências e a preferência de alguns árbitros por arbitrar (ou não) jogos em sequência (sem que tenham tempo de descanso entre um jogo e o próximo) são exemplos de requisitos que podem ser relevantes no processo de atribuição de árbitros.

A próxima seção apresenta uma breve revisão dos trabalhos relacionados ao PAA encontrados na literatura.

2.2
Revisão da literatura

Apesar de ainda pouco explorado, o problema de atribuição de árbitros foi estudado em outros contextos em (10, 24, 23, 25, 48, 49, 74).

Dinitz e Stinson (10) consideraram um problema teórico de atribuição de árbitros às partidas de torneios balanceados e apresentaram uma abordagem de resolução baseada em matrizes conhecidas como *room squares*. Este tipo particular de matriz também pode ser utilizado para programar tabelas para torneios *round-robin*, que são aqueles nos quais cada equipe enfrenta todas as demais. Uma matriz quadrada M de dimensões $n \times n$ é denominada um *room square* de ordem n baseado no conjunto S de símbolos caso satisfaça as seguintes propriedades: (1) toda célula de M ou está vazia ou contém um par não ordenado de símbolos do conjunto S; (2) todo símbolo de S aparece exatamente uma vez em cada coluna e em cada linha de M; (3) todo par não ordenado de símbolos ocorre em exatamente uma célula de M.

Evans (24) propõe um sistema interativo de apoio à decisão com o objetivo de auxiliar na resolução de um problema multi-critério de atribuição de árbitros para a liga americana de beisebol (MLB). Nesta liga, os confrontos são organizados em séries de duas, três ou quatro partidas e o problema consiste em atribuir equipes de arbitragem a cada série, respeitando-se restrições relacionadas às viagens que cada equipe de arbitragem deverá fazer, minimizando-se os custos com estas viagens e mantendo-se um balanceamento nos encontros entre cada time e cada equipe de arbitragem durante a temporada. O sistema de apoio à decisão proposto baseia a resolução do problema de atribuição em algoritmos para geração de rotas para as equipes de arbitragem, partição de conjuntos e escalonamento das séries de confrontos. Testes foram realizados sobre os problemas associados às temporadas de 1985 e 1986. Pôde-se perceber que o uso do sistema propiciou uma redução na distância total viajada bem como a melhoria no balanceamento dos encontros entre as equipes de arbitragem e os times durante estas temporadas.

Farmer et al. apresentaram em (25) um problema de atribuição de árbitros presente em torneios profissionais de tênis. Uma partida profissional de tênis pode necessitar de até 10 árbitros no total, sendo um árbitro de cadeira e nove árbitros de linha. O problema de atribuição dos árbitros às partidas de um grande torneio em geral não é uma tarefa fácil, uma vez que até 18 partidas podem ser disputadas ao mesmo tempo e diversos critérios devem ser levados em consideração no momento da atribuição. A escolha dos árbitros de cadeira é baseada principalmente na nacionalidade, histórico dos jogadores envolvidos no confronto e na experiência dos árbitros. Já a escolha dos árbitros de linha se baseia no nível de qualificação e experiência desses árbitros em cada função particular. Adicionalmente, é comum a exigência de que para todas as partidas sejam designados um certo número mínimo de árbitros do sexo masculino e também um número mínimo do sexo feminino. Restrições quanto a períodos mínimos de descanso para os árbitros entre partidas consecutivas também se fazem presentes em diversas aplicações. Uma formulação por programação inteira foi proposta e aplicada à resolução do problema associado ao torneio aberto dos Estados Unidos de 2003 por um resolvedor comercial de programação inteira. Com o intuito de se prescindir do resolvedor de programação linear inteira, foi proposta uma abordagem de resolução aproximada composta por um algoritmo para construção de soluções iniciais e uma heurística aprimorante, baseada na metaheurística *simulated annealing*. Resultados computacionais da aplicação desta abordagem aproximada foram apresentados e comparados com os resultados da resolução por programação inteira e pela ferramenta utilizada até aquele momento pela associação de tênis dos Estados Unidos (USTA).

Lamghari e Ferland consideraram em (48, 49) um problema de atribuição de árbitros a uma competição internacional de estudos de casos chamada *John Molson International Case Competition*. Esta competição trata-se de um desafio anual promovido pela Universidade de Concordia em Montreal (Canadá) e reúne equipes formadas por estudantes de administração de empresas de várias universidades que competem entre si. Na primeira fase do torneio, as equipes são divididas em grupos, dentro dos quais todos competem contra todos (*round-robin*), totalizando-se, somente nessa primeira fase, 75 confrontos entre pares de equipes que debatem e propõem soluções para um estudo de caso. Os árbitros são responsáveis por julgar as soluções apresentadas pelas equipes participantes de cada confronto e decidir qual equipe é a vencedora. A cada confronto devem ser atribuídos três ou cinco árbitros, dependendo do número de árbitros disponíveis no momento. Diversas restrições (fortes e fracas) estão envolvidas. Os objetivos são maximizar o número de confrontos aos quais cinco árbitros foram atribuídos e designar a cada confronto árbitros tão heterogêneos quanto possível, com relação a um conjunto pré-definido de qualificações. Em (48), é apresentada uma formulação por programação inteira quadrática para este problema. Em virtude da alta complexidade de resolução do modelo apresentado, uma abordagem heurística de resolução é também proposta. Três diferentes técnicas são introduzidas e comparadas numericamente. Em (49), os autores propõem uma abordagem aproximada de resolução em três fases para o problema de atribuição de árbitros descrito acima. O processo de resolução começa com uma solução inicial e na primeira fase aplica-se um algoritmo de busca tabu com o objetivo de aumentar o número de confrontos com 5 árbitros. A segunda etapa consiste em uma outra heurística de busca tabu que é utilizada para aumentar a diversidade dos árbitros associados a um mesmo confronto. Finalmente, a terceira fase representa uma estratégia de diversificação usada para gerar uma nova solução inicial para que todo o processo possa ser re-iniciado. Quatro variantes de algoritmos são comparadas numericamente pela resolução de problemas teste gerados aleatoriamente.

Um problema de atribuição de árbitros para a liga americana de beisebol (MLB), similar ao tratado em (24), foi também abordado por Ordones e Knowles (54). Um estudo sobre a aplicabilidade de uma abordagem por programação em lógica por restrições (*constraint logic programming*) foi proposto. O problema foi também formulado por programação linear inteira e resolvido pelo aplicativo LINGO. É apresentada uma comparação entre os resultados obtidos pela resolução por programação linear inteira e pela resolução do problema reformulado por programação em lógica por restrições.

Em (74), Wright aborda um problema multi-objetivo de atribuição de árbitros a partidas de críquete no Reino Unido. Cada partida de críquete requer dois árbitros em geral e as principais restrições associadas ao problema estão relacionadas ao balanceamento nos encontros entre os árbitros e as equipes que disputam a competição. Vários objetivos são considerados, como por exemplo, a minimização da distância total viajada pelos árbitros e a minimização dos pares de árbitros que nunca atuam juntos, entre outros. Penalizações são associadas às atribuições que privilegiem um árbitro em especial, de forma que a atribuição final seja o mais balanceada possível. Propõe-se a resolução do problema através de uma heurística construtiva e de um procedimento de busca local. Resultados computacionais mostraram que esta abordagem obteve maior sucesso que uma abordagem de resolução por uma heurística de *simulated annealing* proposta anteriormente. O tratamento dos múltiplos objetivos foi feito por meio da soma ponderada de várias funções objetivo.

A seguir é apresentada uma descrição da versão básica do PAA tratada nesta tese e sua formulação como um problema de otimização. Ressalta-se que o problema estudado nesta tese ainda não havia sido referenciado na literatura.

2.3
Formulação do PAA básico

Considera-se inicialmente uma versão básica do problema de atribuição de árbitros, comum a várias ligas esportivas amadoras. Assume-se que todas as partidas são agendadas a priori, de forma que seus locais e horários são conhecidos previamente. Na abordagem adotada, árbitros são atribuídos às posições nas equipes de arbitragem (EA's), que por sua vez, não possuem números fixos de componentes. Dessa maneira, pode-se tratar do problema de atribuição de árbitros em esportes com diferentes números de árbitros por partida e em competições nas quais diferentes partidas do mesmo esporte podem necessitar de um número diferente de árbitros em virtude da sua divisão ou de sua importância. Partidas com posições preenchidas a priori em suas EA's também podem ser tratadas com esta abordagem. Cada posição de uma EA a ser atribuída a um árbitro será denominada *posição de arbitragem* (PA).

Seja $S = \{1, \ldots, n\}$ o conjunto de índices associados às PA's. Cada posição de arbitragem j deve ser preenchida por um árbitro com um nível de qualificação maior ou igual a q_j, $j = 1, \ldots, n$. O valor q_j é denominado de nível mínimo de qualificação associado à PA indexada por j. Seja $R = \{1, \ldots, m\}$ o conjunto de índices representando árbitros. Cada árbitro i tem um certo nível de qualificação p_i, $i = 1, \ldots, m$, que determina para quais PA's ele está apto a ser designado. Os árbitros podem se declarar indisponíveis para arbitrar em certos dias e horários. Representa-se por $U(i) \subseteq S$ o conjunto de PA's aos quais o árbitro indexado por i não pode ser atribuído por incapacidade técnica ou por indisponibilidade, $i = 1, \ldots, m$. Além disso, a cada árbitro está associado um número M_i, que representa o número máximo de jogos que ele pode arbitrar e um número alvo T_i de jogos que ele deseja arbitrar numa rodada, $i = 1, \ldots, m$. Viagens não são permitidas, ou seja, árbitros que estejam designados a mais de uma partida no mesmo dia devem necessariamente atuar na mesma localidade. Além disso, árbitros que são também jogadores devem arbitrar sempre no mesmo local em que jogam. No restante deste trabalho, por abuso de linguagem, as expressões “árbitro indexado por i” e “PA indexado por j” serão substituídas por “árbitro i” e “PA j”, respectivamente.

O *Problema de Atribuição de Árbitros* (PAA) consiste em atribuir árbitros a todas as PA’s associadas às partidas agendadas para um certo intervalo de tempo (tipicamente, um dia ou um final de semana), de modo a satisfazer às restrições abaixo:

(a) todas as PA’s devem ser preenchidas;

(b) nenhum árbitro pode ser designado a PA’s com horários conflitantes;

(c) nenhum árbitro pode ser designado a PA’s em horários nos quais se declarou indisponível;

(d) a atribuição de árbitros deve respeitar o nível mínimo de qualificação estabelecido para cada PA;

(e) nenhum árbitro pode ser designado a mais jogos do que o número máximo definido previamente; e

(f) nenhum árbitro pode ser designado a PA’s em mais de uma localidade no mesmo dia.

A função objetivo considerada inicialmente consiste na minimização da soma, sobre todos os árbitros, do valor absoluto da diferença entre o número de partidas a que foram atribuídos e o número de partidas que gostariam de arbitrar. A próxima seção apresenta a demonstração de que a versão de decisão do PAA básico é um problema NP-completo.

2.4 Complexidade

Seja o problema de decisão:

Problema: ATRIBUIÇÃO DE ÁRBITROS

Entrada: Conjunto S de PA’s, conjunto R de árbitros e o número máximo de jogos que cada árbitro pode arbitrar.

Pergunta: Existe uma atribuição de árbitros de R às PA’s em S que satisfaça às restrições (a) a (f)?

Teorema 2.1 ATRIBUIÇÃO DE ÁRBITROS é NP-completo.

Prova. O conjunto de PA’s às quais os árbitros devem ser atribuídos e suas relações de incompatibilidade de horários podem ser representados por um grafo de conflitos. Cada vértice deste grafo representa uma PA e cada aresta uma sobreposição de horários entre as PA's representadas pelas extremidades desta aresta. Uma vez que existe uma correspondência um-para-um entre os vértices do grafo resultante e um conjunto de intervalos de tempo (relativos aos horários e durações dos jogos associados a cada PA), este grafo é um grafo de intervalos (6).

ATRIBUIÇÃO DE ÁRBITROS pertence a NP, uma vez que a viabilidade de uma atribuição pode ser verificada em tempo polinomial em $|R|$ e $|S|$. A demonstração de sua NP-completude baseia-se na redução de um problema NP-completo (partição de grafos). Dados um grafo não direcionado $G = (V, E)$ e números naturais k e k', o problema de partição de grafos em conjuntos independentes de vértices com cardinalidades limitadas consiste em decidir se existe uma partição de V em k conjuntos independentes $I_1, \ldots, I_k$, com $|I_i| \leq k'$ para $1 \leq i \leq k$. Este problema é NP-completo mesmo que G seja um grafo de intervalos (5).

Seja uma instância do problema ATRIBUIÇÃO DE ÁRBITROS, na qual o conjunto S tem exatamente uma PA associada a cada partida e o número de partidas é igual a $n = |S|$. Todas as partidas estão agendadas para a mesma data e local. O nível mínimo de qualificação de cada PA é definido como $q_j = 1$, para $j = 1, \ldots, n$. Seja $R = \{1, \ldots, m\}$ o conjunto de árbitros disponíveis. Define-se $M_i = k'$, $p_i = 1$ e $U(i) = \emptyset$, para $i = 1 \ldots, m$. O algoritmo de reconhecimento de complexidade linear de Corneil et al. (9) é utilizado para a construção de um grafo de intervalos G, no qual cada vértice é associado a um PA. Existe uma aresta em G para cada par de PA's com horários conflitantes.

Demonstra-se então que dados o grafo de intervalos G e os números naturais k e k', existe uma partição de V nos conjuntos independentes de vértices $I_1, ..., I_k$ com $|I_i| \leq k'$ para $1 \leq i \leq k$ se, e somente se, existe uma atribuição viável dos árbitros em R ao conjunto S de PA's, respeitando as restrições (a) a (f).

Inicialmente, suponha-se a partição de $G = (V, E)$ nos conjuntos independentes de vértices $I_1, \ldots, I_k$, com $|I_i| \leq k'$ para $1 \leq i \leq k$. As PA's atribuídas ao árbitro i são exatamente aqueles correspondentes aos vértices em I_i, para $i = 1, \ldots, m$. Esta associação garante que as restrições (a) e (b) são respeitadas. As restrições (c) e (f) são trivialmente satisfeitas, uma vez que $U(i) = \emptyset$, para $i = 1, \ldots, m$, e que todos os jogos são realizados no mesmo local. Uma vez que $p_i = 1$, para $i = 1, \ldots, m$, e $q_j = 1$, para $j = 1, \ldots, n$, a restrição (d) é também trivialmente satisfeita. Finalmente, a restrição (e) é satisfeita, pois $|I_i| \leq k' = M_i$ para $i = 1, \ldots, m$.

Considera-se agora uma solução viável para o problema de ATRIBUIÇÃO DE ÁRBITROS. Pode-se construir o grafo de intervalos $G = (V, E)$

associando-se cada PA a um vértice $j \in V$, $j = 1, \ldots, n$. Adiciona-se uma aresta (j, j') a E para cada par j e j' de PA's cujos horários apresentem conflito. A partição de V em conjuntos independentes de vértices $I_1, \ldots, I_k$ é tal que o vértice j pertence ao conjunto independente I_i caso o árbitro i esteja atribuído à PA j. Como o número de PA's atribuídos a cada árbitro está limitado por k', esta partição em conjuntos independentes de vértices e de cardinalidade limitada é viável. ■

2.5 Modelos de programação inteira

O problema descrito na Seção 2.3 pode ser formulado por programação inteira. São propostas três formulações para o problema de atribuição de árbitros a partidas esportivas.

2.5.1 Modelo com número polinomial de variáveis

Seja d_i o valor absoluto da diferença entre o número de partidas desejadas pelo árbitro i (T_i) e o número de partidas efetivamente arbitradas por ele, para $i = 1, \ldots, m$. As variáveis de decisão utilizadas na formulação são definidas por:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o árbitro } i \text{ está atribuído à PA } j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Adicionalmente, $C(j) \subseteq S$ denota o conjunto de PA's em conflito com aquela indexada por j, para $j = 1, \ldots, n$, ou seja, PA's associadas a jogos que acontecem em localidades diferentes ou com horários em conflito com j. Como descrito na Seção 2.3, $U(i) \subseteq S$ representa o conjunto de PA's aos quais o árbitro i, para $i = 1, \ldots, m$, não pode ser atribuído por incapacidade técnica ou por indisponibilidade. Segue o modelo de programação inteira para o PAA:

$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^{m} d_i \tag{2-1}$$

sujeito a:

$$d_i = |T_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}| \quad i = 1, \ldots, m \tag{2-2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \tag{2-3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M_i \quad i = 1, \ldots, m \tag{2-4}$$

$$x_{ij} + x_{ij'} \leq 1 \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \forall j' \in C(j) \tag{2-5}$$

$$\sum_{j \in U(i)} x_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, m \tag{2-6}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2-7}$$

A função objetivo (2-1) estabelece que é minimizada a soma sobre todos os árbitros do valor absoluto da diferença entre o número desejado de partidas e o número de partidas arbitradas. As restrições (2-2) definem, para cada árbitro, o valor absoluto da diferença entre o número desejado de partidas e o número de partidas arbitradas. As restrições (2-3) garantem que toda PA deve ser atribuída a exatamente um árbitro. As restrições (2-4) estabelecem o limite superior para o número de partidas atribuídas a cada árbitro. As restrições (2-5) garantem que PA's com conflitos de horários ou associadas a partidas que ocorrem em diferentes localidades não podem ser designadas ao mesmo árbitro. As restrições (2-6) impedem atribuições que violem o nível mínimo de qualificação e eventuais indisponibilidades (alternativamente, todas as variáveis x_{ij} com $j \in U(i)$ podem ser removidas do modelo). As restrições (2-7) estabelecem a integralidade das variáveis de decisão.

As restrições (2-2) podem ser substituídas pelas desigualdades lineares (2-8) e (2-9):

$$d_i \geq T_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad i = 1, \dots, m \tag{2-8}$$

$$d_i \geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - T_i \quad i = 1, \dots, m \tag{2-9}$$

Vale ressaltar que as restrições (2-3) e (2-4) caracterizam o PAA como um problema de atribuição generalizado (30) com restrições adicionais.

2.5.2
Modelos com número exponencial de variáveis

O modelo descrito na seção anterior possui um número polinomial de variáveis e uma função objetivo específica definida pelas próprias restrições do modelo.A seguir são apresentadas duas formulações alternativas com número exponencial de variáveis, mas que oferecem maior flexibilidade no tratamento de outras funções objetivo.

Para cada árbitro $i = 1, \dots, m$, seja $K(i)$ o número de possíveis seqüências viáveis de PA's em que pode atuar, ou seja, seqüências de PA's que respeitam as restrições (b) a (f) para esse árbitro. Cada seqüência viável $k = 1, \dots, K(i)$ desse árbitro é associada a uma variável binária de decisão x_{ik} que assume o valor 1 caso a seqüência k seja a escolhida para o árbitro i; 0, caso contrário. Neste contexto, o problema de atribuição de árbitros passa a ser o de encontrar uma seqüência para cada árbitro de forma que cada PA apareça em exatamente uma seqüência:

$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K(i)} C_{ik} \cdot x_{ik} \tag{2-10}$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{K(i)} a_{ik}^{j} \cdot x_{ik} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \tag{2-11}$$

$$\sum_{k=1}^{K(i)} x_{ik} = 1 \quad i = 1, \ldots, m \tag{2-12}$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, m, \; k = 1, \ldots, K(i) \tag{2-13}$$

O custo C_{ik} associado à seqüência de índice k do árbitro i, $i = 1, \ldots, m$ e $k = 1, \ldots, K(i)$, pode representar, por exemplo, o valor absoluto da diferença entre o número desejado e o número de partidas arbitradas pelo árbitro i (como considerado na Seção 2.3), o tempo de espera entre partidas consecutivas desse árbitro ou a distância viajada entre partidas consecutivas, entre outras possibilidades. Como cada variável está associada a uma seqüência de PA's definida previamente, este modelo é flexível quanto à função de custo escolhida. A constante a_{ik}^{j} vale 1 caso a PA j faça parte da seqüência k, e 0 caso contrário, $i = 1, \ldots, m$ e $k = 1, \ldots, K(i)$.

A função objetivo (2-10) define que é minimizada a soma dos custos associados a todas as seqüências selecionadas. As restrições (2-11) garantem que cada PA deve aparecer em exatamente uma dentre as seqüências selecionadas. As restrições (2-12) estabelecem que, dentre as seqüências associadas a cada árbitro, exatamente uma deve ser utilizada. Observa-se que existe uma seqüência vazia, sem PA alguma, associada a cada árbitro. As restrições (2-13) estabelecem a integralidade das variáveis de decisão.

Neste modelo, o número de variáveis de decisão associadas a cada árbitro está relacionado com o número de combinações possíveis de PA's que resultem em seqüências viáveis em cada localidade que esse árbitro possa atuar. O modelo apresenta um número exponencial de variáveis. Entretanto, uma vez que um árbitro não pode ser designado a partidas que ocorrem em diferentes localidades, nem a partidas com horários em conflito e tampouco a PA's com nível mínimo de qualificação incompatível com o seu, o número de variáveis associadas a cada árbitro fica limitado e muito abaixo do número total de combinações possíveis.

Outra característica do modelo (2-10)-(2-13) é sua estrutura simétrica, uma vez que existem diferentes atribuições de árbitros a PA's que são indistinguíveis, do ponto de vista da qualidade da solução resultante. Considere duas PA's indexadas por j e j' tais que $q_j = q_{j'}$ e ambas estão associadas a partidas que ocorrem no mesmo horário e local. Neste caso, não faz diferença para um árbitro ser designado à PA j ou a j'. Estas atribuições resultam em soluções diferentes, mas que possuem o mesmo custo. Modelos com estrutura simétrica são, em geral, difíceis de serem resolvidos por algoritmos de *branch-and-bound*, uma vez que o problema praticamente não muda após cada operação de ramificação (46).

Como uma alternativa para contornar o problema causado pela simetria e reduzir o número de variáveis associadas a cada árbitro, propõe-se um novo modelo, que consiste em uma adaptação do modelo (2-10)-(2-13). Agrupam-se as PA's por horário de início e fim, por localidade onde a respectiva partida irá acontecer e pelo nível mínimo de qualificação exigido. Desta forma, ao invés de decidir se um árbitro será designado ou não a uma determinada PA, deve-se decidir se este árbitro deverá ou não arbitrar alguma partida em determinado horário e localidade. De forma a se garantir uma atribuição viável, para cada horário que represente o início de pelo menos uma partida, deve-se determinar o número necessário de árbitros a serem designados com cada nível de qualificação.

Seja (f, h_0, h_1, q) uma quádrupla cujas componentes representam, respectivamente, a localidade, o horário de início, o horário de fim e o nível mínimo de qualificação associados a uma ou mais PA's pertencentes à S. Como mencionado acima, com o novo modelo deseja-se determinar o conjunto de quádruplas do tipo (f, h_0, h_1, q) que serão designadas a cada árbitro. Seja então $L(i)$ o número de possíveis seqüências (combinações) viáveis de quádruplas para o árbitro i, para $i = 1, \ldots, m$:

A variável de decisão y_{ik} utilizada no modelo indica se a k-ésima seqüência associada ao árbitro i deve ser selecionada ou não.

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se a } k\text{-ésima seqüência associada ao árbitro } i \text{ foi selecionada} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sejam F o conjunto das localidades que abrigam partidas, de forma que $F(j)$ representa a localidade onde ocorre a partida associada à PA j; $Q(f) = \{q_j : F(j) = f\}$ o conjunto de valores dos níveis mínimos de qualificação dentre as PA's associadas a partidas que ocorrem na localidade $f \in F$; e $R(q) \subseteq R$ o conjunto de índices dos árbitros cujos níveis de qualificação sejam maiores ou iguais a q. Seja também $H(f)$ o conjunto de pares que representam os horários de início e fim das partidas que acontecem na localidade $f \in F$.

O problema de atribuição de árbitros pode então ser formulado como:

$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{L(i)} C_{ik} \cdot y_{ik} \quad (2\text{-}14)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in R(q)} \sum_{k=1}^{L(i)} b_{ik}^{f,h_0,h_1,q} \cdot y_{ik} \geq m_{f,h_0,h_1,q} \quad \forall f \in F,\ \forall (h_0,h_1) \in H(f),\ \forall q \in Q(f) - \{q_0(f)\} \quad (2\text{-}15)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{L(i)} b_{ik}^{f,h_0,h_1,q_0(f)} \cdot y_{ik} = m_{f,h_0,h_1,q_0(f)} \quad \forall f \in F,\ \forall (h_0,h_1) \in H(f) \quad (2\text{-}16)$$

$$\sum_{k=1}^{L(i)} y_{ik} = 1 \quad i = 1,\ldots,m \quad (2\text{-}17)$$

$$y_{ik} \in \{0,1\} \quad i = 1,\ldots,m,\ k = 1,\ldots,L(i) \quad (2\text{-}18)$$

onde $q_0(f)$ é o menor valor dentre os níveis mínimos de qualificação associados a PA's dentre as partidas que ocorrem na localidade f, $m_{f,h_0,h_1,q}$ é o número de PA's associados a partidas agendadas para a localidade f no horário h cujo nível mínimo de qualificação seja maior ou igual a q e $b_{ik}^{f,h_0,h_1,q}$ é uma constante que vale 1 caso a quádrupla (f, h_0, h_1, q) esteja presente na k-ésima seqüência associada ao árbitro i, $i = 1,\ldots,m$ e $k = 1,\ldots,L(i)$.

No modelo (2-14)-(2-18), assim como no modelo anterior, C_{ik} denota o custo associado à k-ésima seqüência do árbitro i. Para cada quádrupla (f, h_0, h_1, q), as restrições (2-15) estabelecem o número mínimo de árbitros com nível de qualificação maior ou igual a q que devem ser atribuídos a PA's na localidade f e horário dado por h_0 e h_1. Estas restrições são dadas por uma desigualdade, uma vez que não têm o intuito de definir o número exato de árbitros com certo nível mínimo de qualificação já que PA's com níveis mínimos exigidos menores podem também ser atribuídos a estes árbitros. As restrições (2-16) definem o número de árbitros, com nível de qualificação maior ou igual a $q_0(f)$, que devem ser designados a arbitrar alguma partida, para cada localidade f e horário (h_0, h_1). Como $q_0(f)$ é o menor dos níveis mínimos de qualificação, esta restrição determina o número exato de árbitros para cada par localidade e horário. As restrições (2-17) garantem que exatamente uma seqüência deve ser escolhida para cada árbitro. Observa-se que existe uma seqüência vazia associada a cada árbitro. As restrições (2-18) garantem a integralidade das variáveis de decisão.

A partir de uma solução do modelo (2-14)-(2-18), pode-se obter uma solução para o PAA da seguinte forma: dada a atribuição dos árbitros às tuplas (f, h_0, h_1, q), para cada horário (h_0, h_1), percorrem-se os árbitros selecionados para este horário (em ordem crescente de níveis de qualificação) e atribui-se à PA que exija o maior nível mínimo de qualificação que seja menor ou igual ao do árbitro em questão. Assim, uma vez que as restrições (2-15) e (2-16) garantem que se tenha um número suficiente de árbitros qualificados, para cada localidade e horário, a solução obtida é viável para o PAA.

2.6 Resultados obtidos pelos modelos de programação inteira

Os resultados experimentais reportados nesta seção foram obtidos com um processador Intel Pentium™2,8 GHz, com 2,0 GBytes de memória RAM e sistema operacional Windows XP™. Todos os algoritmos foram implementados em linguagem C. O resolvedor de programação inteira utilizado foi o CPLEX™versão 8.0.

2.6.1 Instâncias teste

Instâncias teste foram geradas artificialmente seguindo padrões similares aos observados em ligas reais de futebol da Califórnia, com até 500 partidas e 750 árbitros. No entanto, neste capítulo apenas as instâncias com até 80 partidas foram utilizadas, uma vez que foram as maiores instâncias que puderam ser resolvidas pela aplicação de todos os três modelos propostos em até duas horas de processamento. Para um mesmo número de partidas, tem-se instâncias com diferentes números de localidades e diferentes padrões para o número desejado de partidas a que cada árbitro deseja ser atribuído. Cada partida apresenta três PA's, representando um árbitro principal e dois auxiliares.

Dois diferentes padrões foram utilizados para a geração do número desejado de partidas T_i que cada árbitro deseja arbitrar, para $i = 1, \ldots, m$. De acordo com o padrão denotado por P_0, T_i é um inteiro selecionado aleatoriamente de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, M_i]$. Segundo o padrão P_1, T_i é proporcional a $1/p_i$, ou seja, quanto maior o nível de qualificação p_i do árbitro, menor é o seu número desejado de partidas T_i. Cada partida é associada a uma divisão representada por um número inteiro selecionado aleatoriamente de uma distribuição uniforme no intervalo $[1, 5]$. Quanto maior a divisão, maiores são os níveis mínimos de qualificação de suas PA's. À PA que representa o árbitro principal é associado um nível de qualificação duas unidades maior do que aquele atribuído às PA's associadas aos dois auxiliares.

A Tabela 2.1 apresenta os valores dos parâmetros utilizados na geração das instâncias teste. Cinco diferentes instâncias foram geradas para cada uma das 28 combinações dos parâmetros, num total de 140 instâncias teste utilizadas neste trabalho.

Partidas	Árbitros	Localidades		Padrões
40	80	4	5	P_0, P_1
50	100	5	6	P_0, P_1
60	120	6	8	P_0, P_1
80	160	8	12	P_0, P_1
100	200	10	15	P_0, P_1
120	240	12	15	P_0, P_1
500	750	65	85	P_0, P_1

Tabela 2.1: Combinações para as dimensões das instâncias.

2.6.2 Resultados numéricos

As Tabelas 2.2 a 2.9 apresentam os resultados numéricos relativos à comparação entre os três modelos de programação inteira apresentados neste capítulo. As Tabelas 2.2 a 2.5 exibem os tempos gastos para a resolução do problema inteiro e as Tabelas 2.6 a 2.9 apresentam informações sobre a resolução da relaxação linear.

Instância			Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
ℓ	padrão	id	tempo (s)	tempo (s)	tempo (s)
4	P_0	I_1	65,99	37,56	2,43
		I_2	16,46	6,50	2,14
		I_3	20,87	179,40	8,92
		I_4	15,72	9,64	2,92
		I_5	11,94	13,72	6,36
4	P_1	I_1	10,54	15,15	5,21
		I_2	15,81	8,77	3,92
		I_3	13,42	9,32	2,50
		I_4	12,25	8,96	3,86
		I_5	20,61	26,37	10,50
5	P_0	I_1	20,69	26,77	1,31
		I_2	27,83	83,17	2,58
		I_3	36,24	8,42	3,04
		I_4	75,22	4,33	1,51
		I_5	18,40	3,45	1,20

Tabela 2.2: Instâncias com 40 partidas e 80 árbitros.

Nas Tabelas 2.2 a 2.4, exibem-se inicialmente o número de localidades (ℓ), o padrão usado para a geração do número desejado de partidas para cada árbitro e a identificação de cada instância (id). As três colunas seguintes mostram o tempo computacional, expresso em segundos, gasto pelo CPLEX

Instância			Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
ℓ	padrão	id	tempo (s)	tempo (s)	tempo (s)
		I_1	81,49	39,20	10,67
		I_2	46,91	37,28	7,83
5	P_0	I_3	67,44	53,55	9,92
		I_4	75,98	16,49	4,19
		I_5	78,48	161,40	5,81
		I_1	40,51	15,74	6,48
		I_2	130,41	56,63	16,34
5	P_1	I_3	40,43	11,44	6,31
		I_4	42,35	19,66	7,27
		I_5	46,68	97,87	7,30
		I_1	69,70	202,05	8,45
		I_2	2058,55	4,97	3,84
6	P_0	I_3	260,01	2113,43	6,78
		I_4	60,57	4,50	1,78
		I_5	141,88	33,92	18,75

Tabela 2.3: Instâncias com 50 partidas e 100 árbitros.

Instância			Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
ℓ	padrão	id	tempo (s)	tempo (s)	tempo (s)
		I_1	177,75	238,88	35,28
		I_2	2102,32	1113,64	10,41
6	P_0	I_3	1531,15	2429,70	41,14
		I_4	116,35	113,69	7,16
		I_5	5342,41	849,20	31,79
		I_1	315,78	117,42	37,01
		I_2	243,54	72,36	31,29
6	P_1	I_3	506,63	77,34	17,85
		I_4	259,92	56,57	20,63
		I_5	151,43	338,39	21,89
		I_1	492,14	140,19	10,92
		I_2	1348,12	366,54	20,32
8	P_0	I_3	536,86	88,11	14,99
		I_4	233,46	63,43	5,08
		I_5	797,75	54,23	22,33

Tabela 2.4: Instâncias com 60 partidas e 120 árbitros.

para encontrar a solução ótima utilizando cada um dos modelos descritos anteriormente (Modelo 1, Modelo 2 e Modelo 3, pela ordem).

A Tabela 2.5 traz uma coluna adicional para cada modelo, indicando a diferença percentual ($\Delta\%$) entre o valor da melhor solução encontrada e o valor ótimo (encontrado por pelo menos um modelo) nos casos em que a solução ótima não foi encontrada por algum dos modelos. $\Delta\%$ é dada por $100 * (v - v^*)/v^*$, onde v é o valor da solução encontrada pelo modelo em

Instância			Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3	
ℓ	padrão	id	tempo (s)	Δ%	tempo (s)	Δ%	tempo (s)	Δ%
		I_1	> 7200,00	51,0	memória	-	129,69	0,0
		I_2	5927,61	0,0	memória	-	79,39	0,0
8	P_0	I_3	> 7200,00	-	memória	-	176,53	0,0
		I_4	> 7200,00	-	5001,74	0,0	227,59	0,0
		I_5	3523,05	0,0	memória	-	77,40	0,0
		I_1	1771,55	0,0	> 7200,00	-	98,34	0,0
		I_2	4289,89	0,0	4431,35	0,0	69,09	0,0
8	P_1	I_3	2759,43	0,0	998,81	0,0	59,78	0,0
		I_4	2444,32	0,0	211,28	0,0	38,50	0,0
		I_5	636,68	0,0	memória	-	61,04	0,0
		I_1	3495,24	0,0	378,90	0,0	14,31	0,0
		I_2	> 7200,00	-	> 7200,00	2,0	18,54	0,0
12	P_0	I_3	> 7200,00	-	1362,65	0,0	21,20	0,0
		I_4	> 7200,00	-	237,16	0,0	> 7200,00	2,0
		I_5	> 7200,00	28,0	505,47	0,0	8,83	0,0

Tabela 2.5: Instâncias com 80 partidas e 160 árbitros.

questão e v^* é o valor ótimo. Indica-se por "> 7200,00" cada instância que não pôde ser resolvida dentro do limite de tempo (7200 segundos para cada modelo) e por "memória" cada instância que não pôde ser resolvida pela falta de memória disponível. O símbolo "-" indica que nenhuma solução inteira foi encontrada pelo resolvedor.

Pode-se observar que, o terceiro modelo apresentou-se de forma muito superior aos demais com relação aos tempos computacionais gastos para a resolução das instâncias utilizadas neste experimento. O Modelo 3 não encontrou a solução ótima apenas para a instância I_4 do conjunto com 80 partidas e 12 localidades (encontrada pelo Modelo 2) dentro do limite de tempo disponível. Nos demais casos, o tempo gasto pelo Modelo 3 foi muito inferior ao tempos gastos pelos dois primeiros modelos. Esta superioridade também é observada quando são comparados os tempos de processamento médios (excluindo-se as células assinaladas com "memória" e "> 7200") para cada modelo calculados sobre todas as instâncias: 804, 405 e 26 segundos, respectivamente.

Nas Tabelas 2.6 a 2.9, exibem-se inicialmente o número de localidades (ℓ), o padrão usado para a geração do número desejado de partidas para cada árbitro, a identificação de cada instância e o valor da solução ótima. As seis colunas seguintes mostram o tempo computacional, expresso em segundos, gasto pelo CPLEX e o valor da relaxação linear para cada um dos modelos (Modelo 1, Modelo 2 e Modelo 3, pela ordem).

Estes resultados mostram um comportamento sistemático, uma vez que,

Instância				Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3	
ℓ	padrão	id	ótimo	tempo (s)	valor	tempo (s)	valor	tempo (s)	valor
4	P_0	I_1	69	0,31	45,0	2,66	67,3	1,55	67,3
		I_2	66	0,22	66	1,95	66,0	1,34	66,0
		I_3	56	0,19	56	5,84	56,0	4,55	56,0
		I_4	72	0,25	48	2,58	71,5	1,87	71,5
		I_5	57	0,20	39	5,08	56,5	3,44	56,5
4	P_1	I_1	68	0,20	54,0	5,66	68,0	2,86	68,0
		I_2	84	0,20	76,0	4,45	82.5	2,11	82.5
		I_3	70	0,22	54,0	2,28	70,0	1,75	70,0
		I_4	66	0,22	53,5	3,22	66,0	2,30	66,0
		I_5	82	0,22	68,0	9,91	82,0	6,95	82,0
5	P_0	I_1	79	0,22	45,0	0,94	79,0	0,75	79,0
		I_2	66	0,19	66,0	1,98	66,0	1,53	66,0
		I_3	62	0,20	56,0	2,92	62,0	1,92	62,0
		I_4	98	0,23	48,0	1,47	98,0	1,00	98,0
		I_5	79	0,22	39,0	1,23	79,0	0,86	79,0

Tabela 2.6: Instâncias com 40 partidas e 80 árbitros.

Instância				Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3	
ℓ	padrão	id	ótimo	tempo (s)	valor	tempo (s)	valor	tempo (s)	valor
5	P_0	I_1	74	0,31	50,0	8,67	73,0	5,52	73,0
		I_2	85	0,28	85,0	5,55	85,0	3,37	85,0
		I_3	63	0,30	63,0	17,67	63,0	5,08	63,0
		I_4	79	0,34	61,0	5,95	79,0	3,09	79,0
		I_5	64	0,31	40,0	5,26	64,0	3,55	64,0
5	P_1	I_1	147	0,31	124,9	5,87	147,0	3,81	147,0
		I_2	96	0,31	76,0	13,09	95,5	9,61	95,5
		I_3	86	0,36	56,0	10,27	85,0	3,17	85,0
		I_4	154	0,30	142,0	6,83	154,0	4,61	154,0
		I_5	120	0,34	84,0	5,23	120,0	3,55	120,0
6	P_0	I_1	90	0,30	50,0	6,17	88,8	3,58	88,8
		I_2	95	0,31	85,0	4,09	94,9	1,91	94,9
		I_3	65	0,28	63,0	6,31	65,0	3,22	65,0
		I_4	105	0,30	61,0	2,69	105,0	1,12	105,0
		I_5	56	0,30	40,0	4,72	56,0	3,05	56,0

Tabela 2.7: Instâncias com 50 partidas e 100 árbitros.

em todos os casos, os Modelos 2 e 3 apresentam valores idênticos da relaxação linear, os quais nunca são inferiores aos obtidos com o Modelo 1. Adicionalmente, na maioria dos casos, os valores da relaxação linear dos Modelos 2 e 3 são muito superiores aos obtidos com o Modelo 1. Com relação aos tempos de processamento necessários para resolver o nó raiz, o Modelo 1 foi o que proporcionou os menores tempos, seguido pelos Modelos 3 e 2, nessa ordem. Estes

Instância				Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3	
ℓ	padrão	id	ótimo	tempo (s)	valor	tempo (s)	valor	tempo (s)	valor
6	P_0	I_1	63	0,47	47,0	47,59	62,1	17,37	62,1
		I_2	106	0,42	106,0	21,83	106,0	7,30	106,0
		I_3	74	0,44	74,0	37,28	74,0	15,17	74,0
		I_4	77	0,44	71,0	6,14	77,0	3,36	77,0
		I_5	50	0,47	48,0	18,94	49,3	11,67	49,3
6	P_1	I_1	150	0,39	143,0	37,39	150,0	18,44	150,0
		I_2	160	0,52	149,0	28,41	159,0	12,52	159,0
		I_3	107	0,52	91,0	34,03	107,0	10,37	107,0
		I_4	174	0,39	154,0	17,02	174,0	7,61	174,0
		I_5	118	0,52	93,5	43,67	118,0	11,83	118,0
8	P_1	I_1	79	0,48	47,0	22,75	79,0	5,92	79,0
		I_2	108	0,41	106,0	8,98	108,0	5,69	108,0
		I_3	80	0,44	74,0	23,34	80,0	9,34	80,0
		I_4	81	0,39	71,0	10,08	81,0	2,62	81,0
		I_5	58	0,44	48,0	23,17	57,1	10,39	57,1

Tabela 2.8: Instâncias com 60 partidas e 120 árbitros.

Instância				Modelo 1		Modelo 2		Modelo 3	
ℓ	padrão	id	ótimo	tempo (s)	valor	tempo (s)	valor	tempo (s)	valor
8	P_0	I_1	70	0,77	56,0	147,44	69,1	45,53	69,1
		I_2	101	0,75	101,0	94,17	101,0	29,30	101,0
		I_3	78	0,84	78,0	90,59	78,0	29,50	78,0
		I_4	99	0,75	99,0	55,61	99,0	15,36	99,0
		I_5	87	0,84	59,0	103,09	87,0	30,25	87,0
8	P_0	I_1	155	0,80	145,0	124,81	154,0	49,00	154,0
		I_2	115	0,77	115,0	139,95	115,0	25,61	115,0
		I_3	138	1,03	108,0	76,95	137,0	21,34	137,0
		I_4	186	0,76	176,0	79,09	186,0	17,59	186,0
		I_5	169	0,92	123,0	106,33	168,0	28,00	168,0
12	P_0	I_1	136	0,67	56,0	19,01	135,0	6,78	135,0
		I_2	117	0,67	101,0	32,51	115,4	7,66	115,4
		I_3	78	0,73	78,0	25,15	78,0	6,94	78,0
		I_4	103	0,66	99,0	25,47	102,5	6,28	102,5
		I_5	107	0,75	59,0	20,59	107,0	5,47	107,0

Tabela 2.9: Instâncias com 80 partidas e 160 árbitros.

resultados justificam o bom desempenho do Modelo 3, que apresenta valores da relaxação linear bem superiores aos obtidos com o Modelo 1 e tempos de processamento sempre inferiores aos necessários ao Modelo 2.

2.7
Conclusões

Como mostrado na Seção 2.4, o problema de atribuição de árbitros é equivalente a outros problemas encontrados na literatura. Desconsiderando-se as restrições quanto à qualificação dos árbitros (ou seja, assumindo-se que todo árbitro está apto a ser designado a qualquer posição de qualquer partida), o PAA é equivalente, por exemplo, a um problema de escalonamento de tarefas, considerando-se cada PA como uma tarefa e cada árbitro como um indivíduo capaz de realizá-la. Uma vez que o número de tarefas atribuídas a cada árbitro é limitado, este problema é equivalente a um problema de escalonamento com exclusões mútuas (4, 33, 45). Outro problema encontrado na literatura que pode ser equivalente ao PAA é o problema de coloração de grafos de intervalos com limites superiores para o número de vértices associados a cada cor (45).

Este capítulo apresentou uma descrição detalhada do Problema de Atribuição de Árbitros. Foram discutidas diversas variantes do problema, em especial sua versão básica, cuja versão de decisão demonstrou-se ser um problema NP-completo. O PAA foi formulado por três diferentes modelos de programação inteira, que foram comparados por meio de um estudo computacional com instâncias com até 80 partidas e 160 árbitros. Tais modelos, em particular o Modelo 3 que proporcionou os melhores resultados, permitem a resolução exata de instâncias de médio porte do PAA por um resolvedor comercial de programação linear inteira.

O próximo capítulo apresenta uma abordagem de resolução aproximada para a versão básica do PAA, com o objetivo de tratar instâncias reais com um grande número de partidas que não podem ser resolvidas de maneira exata pelos modelos propostos neste capítulo.