5
DEPENDÊNCIA ENTRE RISCOS

'A natureza da dependência pode ter uma variedade de formas e, a não ser que algumas suposições específicas sejam feitas sobre a dependência, nenhum modelo estatístico significante pode ser contemplado.'Jogdeo (1982).

5.1.
Introdução à dependência entre variáveis

Uma distribuição multivariada de duas variáveis aleatórias (X,Y) é formada por um vetor aleatório (X,Y), com a função de distribuição conjunta bivariada, que captura a dependência entre estas duas variáveis.

A dependência pode ser total, ou seja, o conhecimento de uma variável aleatória determina a outra. Por exemplo, seja a um número real, conhecido o valor de X, pode-se dizer que $Y=X+a$ quase certamente. O outro extremo é independência estocástica. Neste caso as variáveis não têm nenhuma informação sobre a outra.

Existem muitas relações de dependência entre esses extremos. Entre estas, a mais estudada é a covariância de (X,Y) que é definida como o produto esperado das diferenças entre cada variável e a sua esperança, ou seja:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

A padronização desta medida pela raiz quadrada da variância de cada variável envolvida determina o coeficiente de correlação de Pearson, que captura a dependência linear entre essas variáveis.

A correlação linear é uma medida de dependência comumente usada. Entretanto, conceitos como comonotonicidade e correlação baseada em postos devem ser discutidas a fim de uma mensuração de risco mais apurada.

A presença de assimetrias e caudas pesadas nas distribuições de sinistros invalida muitas das suposições sobre o uso da correlação para descrever a dependência entre classes de seguros.

Embrechts (1999) mostra que a correlação é somente uma discrição limitada da dependência entre variáveis aleatórias, exceto para a distribuição normal multivariada em que a correlação descreve toda a estrutura de dependência.

5.2. Mensurando dependência positiva

Estudos sobre conceitos de dependência positiva de variáveis aleatórias tiveram início com Lehmann (1966). Esses conceitos são de grande utilidade tanto para a teoria estatística quanto para aplicações práticas, e têm sido muito abordados num contexto atuarial.

Define-se como dependência positiva o fato de se observar, com alta probabilidade, valores elevados (ou baixos) em ambas variáveis aleatórias, em contrapartida de se observar, com pequena probabilidade, valores elevados em uma variável associados com valores baixos da outra variável.

Este capítulo apresenta as idéias essenciais e algumas propriedades de medidas de associação entre variáveis aleatórias. Mensurações escalares clássicas como o coeficiente de correlação linear de Pearson e o coeficiente de correlação baseados em postos serão discutidas.

5.3. Coeficiente de correlação linear de Pearson

O coeficiente de correlação de Pearson captura a dependência linear entre duas variáveis aleatórias. Esse coeficiente não é uma medida de concordância[13] uma vez que não satisfaz os axiomas de simetria e normalidade. Além disso, não é um estimador robusto uma vez que seu valor pode ser próximo de 0 (zero) ou 1 (um) devido à presença de um único valor discrepante.

Para pares de variáveis aleatórias (X_1,X_2) o coeficiente de correlação de Pearson, r_p tem a seguinte forma:

[13] As propriedades de uma medida de concordância são apresentadas na seção 5.4

$$r_P(X_1, X_2) = \frac{C[X_1, X_2]}{\sqrt{V[X_1]V[X_2]}}$$

$$C[X_1, X_2] \rightarrow \text{covariância de } X_1, X_2$$

$$V[X_i] \rightarrow \text{variância de } X_i$$

r_p é definido somente quando as distribuições marginais das variáveis envolvidas são finitas. Essa restrição não é apropriada para mensuração de dependência e pode criar problemas quando se trabalha com distribuições com caudas pesadas.

5.3.1. Propriedades

O coeficiente de correlação de Pearson não é invariante a transformações estritamente crescentes t_1 e t_2 para as amostras de variáveis aleatórias X_1 e X_2. Em geral, tem-se:

$$r_p(t_1(X_1), t_2(X_2)) \neq r_p(X_1, X_2)$$

Entretanto, r_p é invariante a transformações afins positivas. Então, quando t_1 e t_2 são lineares:

$$r_p(a_1 X_1 + b_1, a_2 X_2 + b_2) = \text{sinal}(a_1 a_2)\, r_p(X_1, X_2)$$

$$a_1, a_2 \neq 0 \qquad b_1, b_2 \in \Re$$

$$\text{sinal}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A não invariância a transformações crescentes não lineares é de interpretação direta se r_p for representado a partir de sua cópula:

$$r_p(X_1, X_2) = \frac{-1}{V[X_1]V[X_2]} \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2)\, dF_1^{-1}(u_1)\, dF_2^{-1}(u_2)$$

Nota-se que r_p não depende somente da cópula, mas também das distribuições marginais das variáveis envolvidas.

O valor de r_p pode não ser um indicador sólido da força de dependência. A independência de duas variáveis implica que elas são não correlacionadas, ou seja, $r_p = 0$, mas o contrário nem sempre é verdade. Pode acontecer de um par de variáveis apresentar correlação próxima de zero apesar das variáveis serem altamente dependentes.

5.3.2. Equívocos sobre o coeficiente de correlação linear

Equívoco 1: Dadas duas distribuições marginais F_1 e F_2 para X_1 e X_2, e qualquer correlação linear ρ em $[-1,1]$, é sempre possível construir uma função de distribuição conjunta F com marginais F_1 e F_2 e correlação ρ.

Essa afirmação só é válida para marginais com distribuição elíptica. Alguns valores do coeficiente de correlação são atingidos somente em casos específicos. Por exemplo, as correlações, mínima $\rho=-1$ ou máxima $\rho=1$, só acontecem quando as variáveis X_1 e X_2 são, respectivamente, contramonotônicas ou comonotônicas.

Equívoco 2: As distribuições marginais e a correlação entre as variáveis determinam sua função de distribuição conjunta.

Supõe-se que as variáveis aleatórias X_1 e X_2 têm distribuições marginais F_1 e F_2 e função de distribuição conjunta $C(F_1(X_1), F_2(X_2))$ para uma mesma cópula C e supõe-se que a correlação linear entre elas seja ρ. Pode-se obter uma cópula alternativa $C_2 \neq C$ e construir uma função de distribuição conjunta $C_2(F_1(X_1), F_2(X_2))$ com a mesma correlação ρ. Se a correlação linear entre dois riscos dependessem somente da sua cópula, a correlação deveria ser invariante a transformações lineares estritamente crescentes.

Equívoco 3: O pior VaR para a soma de dois riscos (X_1,X_2) ocorre quando esses têm correlação máxima, ou seja, são comonótonos.

A igualdade $VaR_\alpha(X_1, X_2) = VaR_\alpha(X_1) + VaR(X_2)$ é válida quando as perdas X_1 e X_2 são comonótonas. Entretanto, pode haver uma situação em que o VaR é superaditivo, ou seja, $VaR_\alpha(X_1, X_2) > VaR_\alpha(X_1) + VaR(X_2)$ para duas perdas X_1 e X_2 com um nível de confiança α. Então, a superaditividade de um portfólio deveria corresponder a uma correlação menor do que a encontrada em riscos comonótonos.

5.4.
Medidas de concordância

Scarsini (1984) definiu como medidas de concordância àquelas que satisfaziam algumas propriedades desejáveis para avaliar uma possível associação de variáveis aleatórias. A idéia intuitiva deste conceito é que duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 são concordantes quando altos (baixos) valores de X_1 estão associados com altos (baixos) valores de X_2.

Mais precisamente, seja (x_i,y_i) e (x_j,y_j) duas observações de um vetor (X,Y) de variáveis aleatórias contínuas. Então, (x_i,y_i) e (x_j,y_j) são concordantes se $x_i<x_j$ e $y_i<y_j$. Da mesma forma, (x_i,y_i) e (x_j,y_j) são discordantes se $x_i<x_j$ e $y_i>y_j$ ou se $x_i>x_j$ e $y_i<y_j$. Alternativamente, (x_i,y_i) e (x_j,y_j) são concordantes se $(x_i-x_j)(y_i-y_j)>0$ e discordantes se $(x_i-x_j)(y_i-y_j)<0$.

Então, qualquer função real $r(.)$ de uma distribuição bivariada de variáveis aleatórias (X_1,X_2) é uma medida de concordância se satisfaz as seguintes propriedades:

- Simetria: $r(X_1,X_2) = r(X_2,X_1)$;
- Normalidade: $-1 \leq r(X_1,X_2) \leq 1$;
- Comonotonicidade: $r(X_1,X_2) = 1$ se e somente se X_1 e X_2 são comonotônicas, ou seja, têm correlação positiva máxima;
- Contramonotonicidade: $r(X_1,X_2) = -1$ se e somente se X_1 e X_2 são contramonotônicos, ou seja têm correlação negativa máxima;
- Para $t:\Re \to \Re$ estritamente monotônico tem-se:

$$r(t(X_1),X_2)=\begin{cases} r(X_1,X_2), & \text{se } t \text{ está aumentando} \\ -r(X_1,X_2), & \text{se } t \text{ está diminuindo} \end{cases}.$$

5.4.1.
Coeficientes de correlação baseados em postos

Ao contrário da correlação linear, os coeficientes de correlação baseados em postos são mensurações que dependem somente da cópula de uma distribuição bivariada e não precisam de informações das distribuições marginais. A razão prática de se estudar essas correlações é que elas podem ser usadas para calibrar cópulas de dados empíricos. Existem duas variantes dessa correlação, o coeficiente de correlação de Kendall, e o coeficiente de correlação de Spearman. Ambas são medidas de concordância.

5.4.1.1. Coeficiente de correlação de Kendall

O coeficiente de correlação de Kendall, r_{K}, é uma mensuração não-paramétrica de associação baseada em número de concordâncias e discordâncias de vetores aleatórios bivariados. Concordâncias ocorrem quando pares de observações variam juntos, ou seja, são observados altos valores de X_1 e X_2. Discordâncias ocorrem quando pares de observações variam de forma diferente, ou seja, são observados altos valores de X_1 e baixos valores de X_2.

Sendo (X'_1,X'_2) uma versão independente de (X_1,X_2), tal que $(X_1,X_2) =_d (X'_1,X'_2)$ e os dois pares são mutuamente independentes, então:

$$\Pr[Concordância] = \Pr[(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0]$$

$$\Pr[Disconcordância] = \Pr[(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) < 0]$$

$$r_K(X_1, X_2) = \Pr[Concordância] - \Pr[Disconcordância]$$

È possível representar r_K em ternos de concordâncias e discordâncias da seguinte forma: seja $\binom{n}{2}$ pares distintos (x_i,x_j) e (x'_i, x'_j) de observações da amostra, e cada par é concordante ou discordante. Seja c o número de pares concordantes e d o número de pares discordantes. Então, r_k para a amostra é definido como:

$$r_k^* = \frac{c-d}{c+d} = (c-d) \Big/ \binom{n}{2}$$

A vantagem do uso de probabilidades de concordâncias e discordâncias é que probabilidades de eventos que só envolvem relacionamentos de desigualdade entre duas variáveis aleatórias são invariantes a transformações crescentes dessas variáveis. Definir medidas de dependência a partir dessas probabilidades de concordâncias e discordâncias assegura que estas irão depender apenas da cópula da distribuição conjunta.

Se as marginais de X_1 e X_2 são contínuas, r_k, pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} r_K &= 2\Pr[(X_1 - X'_1)(X_2 - X'_2) > 0] - 1 \\ &= 4\Pr[X_1 \le X'_1, X_2 \le X'_2] - 1 \end{aligned}$$

Para as variáveis aleatórias (X_1,X_2) contínuas com cópula C, r_k pode ser expressado como:

$$\begin{aligned} r_K &= \int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)dC(u_1,u_2)-1 \\ &= 4E[C(U_1,U_2)]-1 \end{aligned}$$

em que (U_1,U_2) denotam uma cópula de uniformes $(0,1)$ com função de distribuição C.

5.4.1.1.1. Propriedades

O coeficiente de correlação de Kendall é invariante a transformações estritamente monótonas. Sendo t_1 e t_2 funções contínuas não decrescentes no suporte de X_1 e X_2, então:

$$r_p(t_1(X_1),t_2(X_2)) = r_p(X_1,X_2)$$

Isso acontece porque ambos $t_1(X_1) - t_1(X'_1)$ e $X_1 - X'_1$ têm o mesmo sinal. O mesmo se aplica para $t_2(X_2) - t_2(X'_2)$ e $X_2 - X'_2$.

Se X_1 e X_2 forem mutuamente independentes $r_k(X_1 , X_2) = 0$:

$$\begin{aligned} r_K &= 2\Pr[(X_1-X'_1)(X_2-X'_2)>0]-1 \\ &= 2(\Pr[X_1-X'_1>0, X_2-X'_2>0]+\Pr[X_1-X'_1<0, X_2-X'_2<0])-1 \\ &= 2\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

5.4.1.1.2. Positividade Total de ordem 2 e coeficiente de correlação de Kendal

Um par de variáveis aleatórias (X,Y) com função de distribuição absolutamente contínua H é dito ter positividade total de ordem 2 se a função de densidade conjunta $h(x,y)$ para todo $x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$ satisfaz:

$$h(x_2,y_2)h(x_1,y_1)-h(x_1,y_2)h(x_2,y_1)\geq 0$$

Mas, $h(x_2,y_2)h(x_1,y_1) - h(x_1,y_2)h(x_2,y_1)$ mede a positividade total de ordem 2 local para (X,Y). Seja T a média para $-\infty < x_1 < x_2$ e $-\infty < y_1 < y_2$ então tem-se:

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y_2}\int_{-\infty}^{x_2}[h(x_2,y_2)h(x_1,y_1)-h(x_1,y_2)h(x_2,y_1)]dx_1dy_1dx_2dy_2$$

A representação por cópulas pode ser feita da seguinte maneira, seja $u=F(x)$ e $v=G(y)$, então a média da positividade total pode ser escrita como:

$$T=\int_0^1\int_0^1\int_0^{v_2}\int_0^{u_2}\left[c(u_2,v_2)c(u_1,v_1)-c(u_1,v_2)c(u_2,v_1)\right]du_1dv_1du_2dv_2$$

em que $c(u,v)$ é a densidade de cópula definida por $c(u,v)=(\partial^2/\partial u\partial v)$ e $h(x,y) = c(F(x),G(y))f(x)g(y)$ sendo f e g as densidades marginais.

Para avaliar T, primeiro denota-se $T(u_2,\ v_2)$ a integral dupla, da seguinte maneira:

$$T(u_2,v_2)=C(u_2,v_2)\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}C(u_2,v_2)-\frac{\partial}{\partial u}C(u_2,v_2)\frac{\partial}{\partial v}C(u_2,v_2)$$

Então, adotando u_2 e v_2 respectivamente por u e v, obtêm-se:

$$T(u_2,v_2)=\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv-\int_0^1\int_0^1\frac{\partial}{\partial u}C(u,v)\frac{\partial}{\partial v}C(u,v)dudv$$

Nota-se que a primeira integral representa ¼ (r_K+1) e a segunda integral, depois da integração por partes, representa ¼$(1-\ r_K)$, então, $T=$ ½ r_K. Quando a função de distribuição H for absolutamente contínua ½ r_K representa uma mensuração média da positividade total de ordem 2.

5.4.1.2.
Coeficiente de correlação de Spearman

O coeficiente de correlação de Spearman é um caso particular do coeficiente de correlação de Pearson, em que os dados são convertidos em postos antes do cálculo dos coeficientes. Então, para um par de variáveis aleatórias X_1 e X_2 contínuas, com funções de distribuição F_1 e F_2, o coeficiente de correlação de Spearmam, r_S, pode ser medido como:

$$r_S(X_1,X_2)=r_p(F_1(X_1),F_2(X_2)).$$

Definindo $U_1 = F_1(X_1)$ e $U_2 = F_2(X_2)$, r_S pode ser reescrito como:

$$r_S(X_1,X_2)=r_P(U_1,U_2)=\frac{E[U_1U_2]-1/4}{1/12}$$

$$=12E\int_0^1\int_0^1\left(C(u_1,u_2)-u_1u_2\right)du_1du_2$$

Uma forma alternativa de medir r_S é a seguinte:

$$r_S=3\left(\Pr[(X_1-X'_1)(X_2-X'_2)>0]-\Pr[(X_1-X'_1)(X_2-X'_2)<0]\right).$$

Em termos de concordâncias e discordâncias, o coeficiente de correlação de Spearman é a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância para um par de vetores aleatórios com as mesmas marginais, em que uma delas tem componentes independentes. Se não existem dados interligados, isto é $\neg\exists_{i,j}\, i \neq j \wedge (x_i = x_j \vee y_i = y_j)$, r_S pode ser medido da seguinte forma:

$$r_S = 1 - \frac{6 \sum_{\forall i} d_{i2}}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

em que d_i é a diferença entre cada posto dos valores correspondentes a X_1 e X_2, e n o número de pares de valores.

5.4.1.2.1. Propriedades

O coeficiente de correlação de Spearman é invariante a transformações estritamente monótonas. Se t_1 e t_2 são funções estritamente crescentes (ou decrescentes) no suporte de X_1 e X_2, então:

$$r_S\left(t_1(X_1), t_2(X_2)\right) = r_S\left(X_1, X_2\right)$$

Ao contrário do coeficiente de correlação de Pearson, r_S não requer a suposição que o relacionamento entre as variáveis seja linear, ele é capaz de descrever o relacionamento entre duas variáveis, com uma função monótona arbitrária, sem fazer nenhuma suposição sobre a distribuição dessas variáveis. Seu uso é indicado quando se quer medir a relação entre duas variáveis em que pelo menos uma delas é formada por postos.

5.4.1.2.2. Dependência no quadrante e coeficiente de correlação de Spearman

O par de variáveis aleatórias (X,Y) é dito ter dependência positiva no quadrante se, para a função de distribuição conjunta H e as marginais F e G, é válido:

$$H(x,y) - F(x)G(y) \geq 0 \text{ para todo } x \text{ e } y.$$

Nota-se que a expressão $H(x,y) - F(x)G(y)$ mede a dependência local no quadrante para cada ponto $(x,y) \in \Re^2$. Conforme já apresentado, o coeficiente de correlação de Spearman pode ser representado como:

$$r_S(X,Y) = 12E\int_0^1\int_0^1 \left(H(x,y) - F(x)G(y)\right)dF(x)dG(y)$$

Então $^1/_{12}\ r_S$ representa uma medida média da dependência no quadrante, em que a média é calculada com respeito às distribuições marginais de X e Y.

5.4.1.3. Relacionamento entre os coeficientes de correlação baseados em postos

Os coeficientes de correlação baseados em postos têm muitas propriedades em comum, são elas:

- Mensuração de dependência simétrica no intervalo [-1,1];
- Assumem valor zero para variáveis independentes; embora o contrário nem sempre seja válido;
- Assumem valor 1 quando X_1 e X_2 são comonótonos;
- Assumem valor –1 quando X_1 e X_2 são contramonotônicas.

Para a maioria das funções de distribuição conjunta, esses coeficientes assumem valores distintos. Cada um capta aspectos diferentes da estrutura de dependência entre as variáveis. De acordo com Nelsen (1992), o coeficiente de correlação de Kendal é uma medida de dependência da positividade total média de ordem dois, enquanto que o coeficiente de correlação de Spearman é uma medida da dependência média no quadrante positivo (e negativo). Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos para captar o relacionamento existente entre essas medidas. Nelsen (2006) mostra que os valores do coeficiente de Spearman costumam ser 50% maiores que os valores do coeficiente de Kendal, para a mesma amostra. Joe (1997) apresenta o seguinte resultado que quantifica o relacionamento entre estes coeficientes:

$$\frac{3r_K - 1}{2} \le r_S \le \frac{1 + 2r_K - r_K^2}{2} \quad para\ r_K \ge 0$$

$$\frac{r_K^2 + 2r_K - 1}{2} \le r_S \le \frac{1 + 3r_K}{2} \quad para\ r_K \ge 0$$

5.4.2. Restrições em medidas de concordância de dados discretos bivariados

Em dados discretos são encontrados muitos pares de dados interligados. Pares interligados são pares de observações que têm valores iguais no primeiro e segundo componentes. Especificamente, se (X_1,X_2) e (X'_1,X'_2) são independentes e identicamente distribuídos, esses pares estão interligados se $X_1=X'_1$ ou $X_2=X'_2$. Pode-se definir então que:

$$\Pr[\text{Ligação}] = \Pr\left[X_1 = X_1^{'} \text{ ou } X_2 = X_2^{'}\right]$$

Para X_1 e X'_2 inteiros tem-se

$$\Pr[\text{Concordância}] - \Pr[\text{Discordância}] + \Pr[\text{Ligação}] = 1$$

$$\begin{aligned} r_k &= 2\Pr[\text{Concordância}] - 1 + \Pr[\text{Ligação}] \\ &= 4\Pr\left[X_1^{'} < X_1, X_2^{'} < X_2\right] - 1 + \Pr\left[X_1 = X_1^{'}, X_2 = X_2^{'}\right] \end{aligned}$$

r_K não pode alcançar um valor elevado porque existe uma grande proporção de pares interligados, especialmente quando o número de valores possíveis de X_1 e X_2 são pequenos.

Goovaerts (2005) mostra que, quando as distribuições marginais das variáveis seguem uma Bernoulii, o maior valor que r_K pode assumir é *0,5*. Isso ocorre quando a probabilidade de concordância assume valor *0,5* e a probabilidade de discordância *0*. Similarmente, o menor valor será *-0,5* quando a probabilidade de discordância assume valor *0,5* e a probabilidade de concordância *0*. Então, para marginais Bernoulli, mesmo nos casos mais favoráveis, r_K não pode alcançar *–1* e *1*.

5.5. Propriedades de dependência

5.5.1. Noções de dependência no quadrante positivo - PQD

De uma forma geral, valores positivos de medidas de concordância indicam dependência no quadrante positivo entre as variáveis X_1 e X_2. Lehmann (1996) define que um par de variáveis aleatórias $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ é dito ter dependência no quadrante positivo se:

$$X_1 \preceq_{ST} [X_1 \mid X_2 \geq x_2] \text{ para todo } x_2 \text{ tal que } \overline{F}_2(x_2) > 0$$
$$X_2 \preceq_{ST} [X_2 \mid X_1 \geq x_1] \text{ para todo } x_1 \text{ tal que } \overline{F}_1(x_1) > 0.$$

Esse conceito de dependência positiva, que coincide com conceito intuitivo de *PQD*, mostra que cada componente do par aleatório torna-se maior quando o outro componente excede algum limiar. Essa definição é feita a partir do siginificado de $\preceq_{ST}$, stop threshold, ou seja X_1 é menor que $X_1 \mid X_2 \geq x_2$ na ordem do limiar.

Nelsen (2006) apresenta uma outra formulação matemática para definir Dependência no Quadrante Positivo. O par de variáveis aleatórias (X_1, X_2) é dito ter dependência no quadrante positivo se para todo (X_1, X_2) em $\Re^2$ tem-se:

$$\Pr[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2] \geq \Pr[X_1 \leq x_1]\Pr[X_2 \leq x_2]$$

ou equivalente

$$\Pr[X_1 > x_1, X_2 > x_2] \geq \Pr[X_1 > x_1]\Pr[X_2 > x_2].$$

Então (X_1, X_2) são *PQD* se a probabilidade de assumirem valores simultaneamente menores (ou simultaneamente maiores) é maior que as probabilidades avaliadas individualmente em uma situação hipotética. Dependência no Quadrante Negativo é definido analogamente revertendo o sentido da desigualdade.

Dependência no Quadrante Positivo possui a propriedade de Invariância. (X_1, X_2) são *PQD* se e somente se $(t_1 (X_1), t_2 (X_2))$ forem *PQD* para qualquer função não decrescente de t_1 e t_2. Essa propriedade mostra que PQD é característica de uma cópula implícita e não é influenciada pelas distribuições marginais. Sendo $\boldsymbol{X}$ um par aleatório com cópula C, $\boldsymbol{X}$ será *PQD* se e somente se $C(u) \geq C_I\text{-}\ u_1u_2$ para todo $\boldsymbol{u} \in [0,1]^2$.

A Dependência Positiva pode ser verificada a partir de condições equivalentes como mostrado na seção seguinte.

5.5.1.1.
Condições equivalentes

Sendo $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ um par de variáveis aleatórias em $\Re^2 (F_1,F_2)$. Então $\boldsymbol{X}$ é *PQD* se e somente se uma das seguintes condições forem satisfeitas:

- $\overline{F}_X(x_1, x_2) \geq \overline{F}_1(x_1)\overline{F}_2(x_2)$ para todo $(x_1, x_2) \in \Re$;

- $F_X(x_1, x_2) \geq F_1(x_1)F_2(x_2)$ para todo $(x_1, x_2) \in \Re$;
- $\Pr[X_2 > x_2, X_1 > x_1] \geq \overline{F}_2(x_2)$ para todo $(x_1, x_2) \in \Re$ tal que $\overline{F}_1(x_1) > 0$;
- $\Pr[X_1 > x_1, X_2 > x_2] \geq \overline{F}_1(x_1)$ para todo $(x_1, x_2) \in \Re$ tal que $\overline{F}_2(x_2) > 0$.

Novamente, o par *(X_1, X_2)* é *PQD* se é mais provável assumirem altos valores, ou pequenos valores, juntos, se comparados com situações teóricas em que X_1 e X_2 são independentes.

5.5.1.2. Dependência no quadrante positivo e coeficientes de correlação

Em geral, riscos que possuem dependência no quadrante positivo são positivamente correlacionados. Identifica-se nesta seção a relação entre o conceito de dependência positiva e os coeficientes de correlação linear e os coeficientes de correlação baseados em postos.

Sendo $\mathbf{X} \in \Re^2(F_1, F_2)$. Se (X_1, X_2) são *PQD* então:

- $r_p(X_1, X_2) > 0$. A recíproca em geral, não é verdadeira, exceto para o caso normal bivariado.
- $r_K(X_1, X_2) > 0$ e $r_S(X_1, X_2) > 0$.

Sabe-se que *PQD* é característica de uma cópula implícita. Os coeficientes de correlação baseados em postos são conhecidos por dependerem somente de sua cópula. Sendo *(U_1,U_2)* um par de variáveis aleatórias com distribuições marginais uniformes *(0,1)* que possuem a mesma cópula de *(X_1, X_2),*, segue que:

$$r_K(X_1, X_2) \geq 4E[U_1 U_2] - 1 \geq 4E[U_1]E[U_2] - 1 = 0$$

A desigualdade é válida uma vez que *(U_1, U_2)* são positivamente correlacionados. A prova para o coeficiente de correlação de Spearman é obtida similarmente de:

$$r_S(X_1, X_2) = 12E[U_1 U_2] - 3$$

5.5.1.3. Aplicações de dependência no quadrante positivo

O conceito de dependência no quadrante positivo pode ser usado para avaliar o impacto da suposição de independência dos riscos quando eles são positivamente dependentes. Compara-se a probabilidade de algum quadrante

$X_1 \le x_1$ e $X_2 \le x_2$ da distribuição acumulada conjunta de (X_1, X_2) com a probabilidade correspondente ao caso de independência, $(X_1^{\perp}, X_2^{\perp})$.

Se os riscos X_1 e X_2 são *PQD* então:

$$X_1 + X_2 \preceq_{ST} X_1^{\perp} + X_2^{\perp}$$

em que $(X_1^{\perp}, X_2^{\perp})$ é uma versão independente de (X_1, X_2).

Em um contexto atuarial, pode-se dizer que a soma (X_1+X_2) é um resultado menos favorável que a mesma soma sobre independência. Conseqüentemente, os prêmios de seguros e os respectivos capitais de cobertura seriam maiores[14] em situações que existem dependência positiva entre os riscos. Desconsiderar essa informação pode levar a uma subestimação dos prêmios, comprometendo a saúde financeira da instituição.

Um exemplo prático pode ser apresentado a partir de um seguro de *stop-loss* com retenção d, que pode ser escrito como:

$$E[(X_1 + X_2 - d)_+] = E[X_1] + E[X_2] + E[(d - X_1 - X_2)_+].$$

Para provar essa proposição é conveniente estabelecer a validade de:

$$E[(X_1 + X_2 - d)_+] \ge E[(X_1^{\perp} + X_2^{\perp} - d)_+]$$

ou

$$E[(d - X_1 - X_2)_+] \ge E[(d - X_1^{\perp} - X_2^{\perp})_+].$$

Segue que:

$$E[(d - X_1 - X_2)_+] = E\left[\int_0^d \mathrm{I}[X_1 \le t, X_2 \le d - t]dt\right]$$

e,

$$E[(d - X_1 - X_2)_+] - E[(d - X_1^{\perp} - X_2^{\perp})_+] = \int_0^d (F_X(t, d-t) - F_1(t)F_2(d-t))dt \ge 0$$

Em finanças esse resultado pode ser usado para avaliar o impacto da suposição de independência no preço de uma opção com (X_1+X_2) correspondendo aos ativos e d o preço de *strike*.

Em seguro de vida, a suposição de independência também leva a uma subestimação do prêmio de uma anuidade de vida conjunta e a superestimação do prêmio de status último sobrevivente, conforme exemplo a seguir.

[14] Considera-se que os riscos são avaliados a partir de princípios de aversão ao risco.

Se $\boldsymbol{X}$ é *PQD* as seguintes desigualdades estocásticas são válidas:

$$\min\{X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\} \preceq_{ST} \min\{X_1, X_2\}$$

$$\max\{X_1, X_2\} \preceq_{ST} \max\{X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\}$$

Considere um status de vida x_1 e x_2 com tempo adicional de vida $T_{(x_1)}$ e $T_{(x_2)}$. O status de vida conjunta existe enquanto ambos estão vivos e o status do ultimo sobrevivente permanece enquanto um dos dois continuar vivo. Então tem-se:

$$T_{(x_1,x_2)} = \min\{T_{(x_1)}, T_{(x_2)}\} \quad \text{e} \quad T^{\perp}_{(x_1,x_2)} = \min\{T^{\perp}_{(x_1)}, T^{\perp}_{(x_2)}\}$$

$$T_{\overline{(x_1,x_2)}} = \max\{T_{(x_1)}, T_{(x_2)}\} \quad \text{e} \quad T^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}} = \max\{T^{\perp}_{(x_1)}, T^{\perp}_{(x_2)}\}.$$

Assumir que $\mathbf{T} = (T_{(x_1)}, T_{(x_2)})$ é *PQD* implica nas seguintes desigualdades para os prêmios puros de anuidades de seguro de vida:

$$T^{\perp}_{(x_1,x_2)} \preceq_{ST} T_{(x_1,x_2)} \quad e \quad T_{\overline{(x_1,x_2)}} \preceq_{ST} T^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}}$$

$$\ddot{a}^{\perp}_{(x_1,x_2)} \leq \ddot{a}_{(x_1,x_2)} \quad e \quad \ddot{a}_{\overline{(x_1,x_2)}} \preceq_{ST} \ddot{a}^{\perp}_{\overline{(x_1,x_2)}}$$

que confirmam as hipóteses de sub e superestimação abordadas.

Denuit e Scaillet (2004) propuseram dois procedimentos para testar a dependência entre variáveis no quadrante positivo. O primeiro é baseado nos conceitos de dependência em termos de distribuições de probabilidades, enquanto o segundo explora a representação por cópulas. Poon, Rockinger and Tawn (2004) analisaram e testaram *PQD* para perdas tendendo a zero. Eles discutem o uso desse conceito em várias aplicações financeiras tais como seleção de portfólio, gestão de risco, *hedging* e análise de risco de crédito.

5.5.1.4. Dependência stop-loss no quadrante positivo

Nesse conceito, a dependência é verificada a partir de um limiar, $\preceq_{SL}$. Os riscos X_1 e X_2 possuem dependência *stop-loss* positiva se para todo t_1, $t_2 \in \Re^+$ tem-se:

$$X_1 \preceq_{SL} [X_1 | X_2 > t_2] \text{ e } X_2 \preceq_{SL} [X_2 | X_1 > t_1]$$

então,

$$E\left[(X_1 - t_1)_+ \middle| X_2 > t_2\right] \geq E\left[(X_1 - t_1)_+\right] \quad \text{e} \quad E\left[(X_2 - t_2)_+ \middle| X_1 > t_1\right] \geq E\left[(X_2 - t_2)_+\right]$$

Como condição equivalente os riscos X_1 e X_2 possuem dependência stop-loss positiva se e somente se, para todo t_1, $t_2 \in \Re^+$, as seguintes desigualdades são válidas:

$$E\left[(X_1 - t_1)_+ \, \mathrm{I}\left[X_2 > t_2\right]\right] \geq E\left[(X_1 - t_1)_+\right] \Pr\left[X_2 > t_2\right]$$

$$E\left[\mathrm{I}\left[X_1 > t_1\right] \mathrm{I}\left(X_2 - t_2\right)_+\right] \geq \Pr\left[X_1 > t_1\right] E\left[(X_2 - t_2)_+\right]$$

Estudos em que a dependência é determinada a partir de um limiar têm sido abordados para riscos provenientes de catástrofes naturais. Autores como Albrecher (2003), Yuen, Guo e Wu (2002) e Wan, Yuen e Li (2005) discutem essa relação e mostram o impacto na mensuração de riscos quando essas estruturas são desconsideradas.

5.5.2. Monotonicidade na cauda

A expressão para dependência positiva no quadrante pode ser escrita das seguintes maneiras:

$$\Pr\left[Y \leq y \middle| X \leq x\right] \geq \Pr\left[Y \leq y\right]$$

ou

$$\Pr\left[Y \leq y \middle| X \leq x\right] \geq \Pr\left[Y \leq y \middle| X \leq \infty\right]$$

Uma condição forte deve ser requerida tal que para cada y em R, a função de distribuição condicional $\Pr[Y \leq y | X \leq x]$ é uma função não crescente em x. Esse acontecimento de cauda à esquerda ou à direita da distribuição de X e Y é capturado pela seguinte definição: seja X e Y variáveis aleatórias:

- Y é decrescente na cauda à esquerda em X se $\Pr[Y \leq y | X \leq x]$ é uma função não crescente de x para todo y;
- X é decrescente na cauda à esquerda em Y se $\Pr[Y \leq y | X \leq x]$ é uma função não crescente de y para todo x;
- Y é crescente na cauda à direita em X se $\Pr[Y > y | X > x]$ é uma função não decrescente de x para todo y;
- X é crescente na cauda à direita em Y se $\Pr[Y > y | X > x]$ é uma função não decrescente de y para todo x;

Se X e Y são variáveis aleatórias e satisfazem uma das quatro condições acima, então eles têm dependência positiva no quadrante. Entretanto o contrário não é valido, dependência no quadrante positivo não implica em nenhuma das condições acima.

5.6. Medidas de dependência

Medidas de dependência são baseadas na distância entre a cópula de um par de variáveis aleatórias e a cópula independente. De acordo com Lancaster (1982) uma medida de dependência indica qual a força de associação entre X_1 e X_2, que interpola entre a independência e a dependência perfeita.

De acordo com o axioma de Rényi em Schweizer & Wolff (1981), uma medida numérica $\delta(X_1,X_2)$ de associação entre um par de variáveis aleatórias contínuas (X_1,X_2) com cópula C, é uma medida de dependência simétrica não paramétrica se possui as seguintes propriedades:

- $\delta(X_1 ,X_2)$ é definido para todo par X_1 e X_2 de variáveis aleatórias contínuas;
- $\delta(X_1 ,X_2) = \delta (X_1 ,X_2)$;
- $0 \leq \delta(X_1 ,X_2) \leq 1$;
- $\delta(X_1 ,X_2) = 0$ se e somente se X_1 e X_2 são independentes;
- $\delta(X_1 ,X_2) = 1$ se e somente se um (X_1 ou X_2) for uma função estritamente monótona do outro;
- se t_1 e t_2 são funções estritamente monótonas então:
- $\delta_{t_1(X_1),t_2(X_2)} = \delta_{X_1,X_2}$;
- se $(X_{1,n} ,X_{2,n})$é uma seqüência de variáveis aleatórias contínuas com cópula C_n e C_n converge pontualmente para C, então $\lim_{n\to\infty} \delta_{C_n}=\delta_C$.

Schweizer & Wolff (1981) apresentam três medidas de dependência baseadas na distância entre a cópula da distribuição bivariada e a cópula de marginais independentes, e mostra que elas podem ser representadas a partir da cópula da distribuição bivariada, como segue:

$$\sigma(X_1, X_2) = 12\int_0^1\int_0^1 \left|C(u_1,u_2) - u_1u_2\right| du_1 du_2$$

$$\gamma(X_1, X_2) = \left(90\int_0^1\int_0^1 \left|C(u_1,u_2) - u_1u_2\right| du_1 du_2\right)^{1/2}$$

$$\kappa(X_1, X_2) = 4\sup_{u_1,u_2\in[0,1]} \left|C(u_1,u_2) - u_1u_2\right|$$

5.7. Dependência na cauda

Os dados provenientes de seguros e instituições financeiras, de uma forma geral, não apresentam um padrão de normalidade. Esses desvios são característicos de eventos extremos, com baixa probabilidade, mas que têm grande importância numa análise financeira. Esses eventos, concentrados nas caudas das distribuições, podem apresentar relações de dependência positiva, que elevaria o risco de perda de uma instituição. Dada a importância desse tipo de análise, apresenta-se um coeficiente que mede a dependência na cauda da distribuição.

Assim como os coeficientes de correlação baseados em postos, o coeficiente de correlação na cauda é uma medida de dependência que depende somente da cópula do par de variáveis aleatórias (X_1,X_2) com marginais contínuas. Este coeficiente é medido em termos de probabilidades condicionais de quantis excedentes. Trata-se da probabilidade de se observar uma perda não usual de grande valor em uma apólice dado o acontecimento de uma perda não usual de grande valor em outra apólice. Matematicamente, o coeficiente de dependência na cauda superior, λ_U, para um par de variáveis aleatórias (X_1,X_2) com cópula C é definido como:

$$\lambda_U = \lim_{v\to\infty} \Pr\left[X_1 > \overline{F}_1^{-1}(v) \middle| X_2 > \overline{F}_2^{-1}(v)\right]$$

Sendo F_1 e F_2 contínuos, o desenvolvimento da fórmula gera o seguinte resultado:

$$\lambda_U = \lim_{v\to\infty} \frac{1-2v+C(v.v)}{1-v}$$

Se $\lambda_U > 0$, X_1 e X_2 são assintoticamente dependentes na cauda superior. Se $\lambda_U = 0$, X_1 e X_2 são assintoticamente independentes. Exemplos de dependências e independências assintóticas podem ser observados nas cópulas *t-student* e gaussiana, respectivamente.

O coeficiente para medir a dependência na cauda inferior pode ser definido similarmente a partir de:

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0} \frac{C(u,u)}{u}$$

Para cópulas permutáveis, os coeficientes de correlação na cauda podem ser representados por:

$$\lambda_U = 2 \lim_{u \uparrow 1} \Pr\left[U_1 > u \middle| U_2 = u\right]$$

$$\lambda_L = 2 \lim_{u \uparrow 0} \Pr\left[U_1 < u \middle| U_2 = u\right]$$

Esse conceito de dependência na cauda é útil para o estudo de dependências em distribuições de valores extremos. Embora esses eventos ocorram com baixa probabilidade, a ocorrência de observações extremas pode gerar grandes prejuízos.Uma interpretação desse conceito em finanças pode ser obtida pela seguinte representação proposta por Mendes (2004):

$$\lambda_U = \lim_{\alpha \to 0^+} \Pr\left[X_1 > VaR_\alpha(X_1) \middle| X_2 > VaR_\alpha(X_2)\right],$$

em que VaR_α é o Valor em Risco com nível de confiança α. A probabilidade que um índice de mercado exceda o seu *VaR*, dado que um outro índice excedeu o seu *VaR*, decresce quando *a* tende a *0* (zero), com um limite que pode ser diferente de *0* (zero).