

4 CÓPULAS

*‘Cópulas são de interesse para estatísticos por duas razões: primeiramente, é uma forma de estudar medidas de dependência em livre escala, e segundo é o ponto inicial para construir famílias de distribuições bivariadas.’
Fischer (1997)*

4.1. Introdução a cópulas

Uma análise mais precisa de uma instituição financeira requer o estudo de uma variedade de fatores com características muitas vezes distintas. A integração desses fatores não é realizada de forma direta, é necessário estudar como eles podem ser associados e qual seria a relação de dependência entre eles.

É tentador considerar que a distribuição conjunta dessas variáveis é uma normal multivariada, pela sua facilidade matemática. Entretanto, essa suposição restringe o tipo de associação entre as marginais a ser linear. Em seguros, cujos dados costumam ter caudas pesadas, as estruturas de dependência podem ser lineares, não lineares e somente nas caudas.

O uso inadequado da hipótese de normalidade pode acarretar grandes perdas financeiras, pois pode provocar uma subestimação da probabilidade e severidade de eventos relacionados com essas perdas. É preciso identificar distribuições multivariadas adequadas aos dados com caudas pesadas, e as medidas que devem ser usadas para captar as estruturas de dependência desses dados.

A construção da distribuição conjunta de variáveis por cópulas é razoável uma vez que não há restrições quanto às distribuições marginais das variáveis envolvidas. Além disso, a cópula de uma distribuição capta diversos tipos de dependência entre as variáveis, mesmo quando são objetos de transformações monótonas.

Cópulas expressam a dependência em uma escala de quantil, que é útil para descrever a dependência de resultados extremos. Cada cópula de distribuição

conjunta contém a descrição dos acontecimentos marginais dos riscos e suas estruturas de dependência. Pode-se dizer que a cópula é uma maneira de se isolar as estruturas de dependência das variáveis.

4.2. Propriedades básicas

Uma cópula bi-dimensional C é uma função de distribuição não decrescente e contínua à direita que mapeia a unidade quadrada $[0,1]^2$ no intervalo $[0,1]$ com distribuições marginais uniformes.

Para ser considerada uma cópula, uma função de distribuição conjunta deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ aumenta com cada componente u_i . Esse pré-requisito é comum a qualquer função de distribuição multivariada;
- $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}; u_i \in [1, \dots, d]$. Esse pré-requisito é comum a distribuições marginais padrão;
- Para uma cópula bi-dimensional, C tem desigualdade retangular se: $C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) - C(v_1, u_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$ é válido para qualquer $u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2$.

Se uma função C contempla essas três características, então ela é uma cópula.

4.3. Proposições elementares

A transformação de quantil e a transformação de probabilidade são proposições elementares para o entendimento da técnica de cópulas. Seja G uma função de distribuição e G^{\leftarrow} sua inversa generalizada⁸, isto é, $G^{\leftarrow}(y) = \inf \{x: G(x) \geq y\}$. Assim apresenta-se que:

- Transformação de Quantil: se $U \sim Uni(0,1)$ tem uma função de distribuição uniforme, então $\Pr(G^{\leftarrow}(U) \leq x) = G(x)$.

⁸ Uma breve explicação de funções inversas generalizadas encontra-se no apêndice 1.

- Transformação de Probabilidade: se Y tem função de distribuição G , em que G é uma função de distribuição univariada contínua, então $G(Y) \sim U(0,1)$.

Essas proposições informam que é possível transformar riscos com uma função de distribuição contínua particular em qualquer outra distribuição contínua, sendo a chave para uma simulação estocástica.

4.4. Demais propriedades

4.4.1. Teorema de Sklar

Este teorema mostra que todas as funções de distribuição multivariadas contêm cópulas e que estas podem ser usadas para construir funções de distribuição multivariadas a partir das funções de distribuição univariadas.

Segue que: seja F uma função de distribuição conjunta com marginais contínuas F_1 e F_2 . Então existe uma única⁹ cópula $C:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ tal que para todo $\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^2$:

$$F_X(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Da mesma forma, se C é uma cópula e F_1 e F_2 são funções de distribuição, então a função F_X definida pela equação apresentada é uma função de distribuição bivariada com marginais F_1 e F_2 .

Uma outra representação de cópulas que expressa a dependência em escala de quantil é a seguinte:

$$C(u_1, u_2) = F\left(F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2)\right),$$

desde que $C(u_1, u_2)$ seja uma função de probabilidade conjunta tal que x_1 é inferior ao quantil de u_1 , e x_2 é inferior ao quantil de u_2 .

Quando duas variáveis aleatórias x_1 e x_2 são independentes e possuem as respectivas funções de distribuição acumulada F_1 e F_2 , a função de distribuição conjunta é dada por $F_X(x) = F_1(x_1)F_2(x_2)$ e a cópula, denominada Cópula de Marginais Independentes, pode ser representada como $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$, $u \in [0,1]^2$.

⁹A cópula é única somente para marginais com distribuição contínua. Em distribuições discretas, existe mais de uma cópula que pode ser usada para agregar as marginais.

4.4.2. Invariância funcional

A invariância funcional é uma consequência direta da interpretação de cópulas como uma função de distribuição conjunta de ranks¹⁰. Seja x_1 e x_2 variáveis aleatórias contínuas com cópula C e t_1 e t_2 funções monótonas contínuas, segue que:

- Se t_1 e t_2 são não decrescentes, então $(t_1(x_1), t_2(x_2))$ tem cópula C ;
- Se t_1 é não decrescente e t_2 é não crescente, então $(t_1(x_1), t_2(x_2))$ tem cópula $u_1-C(u_1, u_2)$;
- Se t_1 é não crescente e t_2 é não decrescente, então $(t_1(x_1), t_2(x_2))$ tem cópula $u_2-C(1-u_1, u_2)$;
- Se t_1 e t_2 são não crescentes, então $(t_1(x_1), t_2(x_2))$ tem cópula \bar{C} ¹¹.

As cópulas são modificadas de acordo com a monotonicidade de t_1 e t_2 , mas não depende da expressão particular de t_1 e t_2 . Isso indica que a avaliação da cópula, de todas as estruturas de dependência entre duas variáveis aleatórias, independe da escala em que elas são medidas.

4.4.3. Limites de Fréchet

Existem dois limites dentre os quais a cópula é verificada, denominados limite inferior de Fréchet, C_L , e limite superior de Fréchet, C_U .

Para qualquer cópula $C(u_1, \dots, u_d)$ observam-se os seguintes limites:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right\} \leq C(u) \leq \min \{u_1, \dots, u_d\}$$

Para uma cópula bi-dimensional nota-se que:

$$C_U(u_1, u_2) = \min \{u_1, u_2\}, \mathbf{u} \in [0, 1]^2,$$

que corresponde a unidade de massa sobre a diagonal principal $u_1 = u_2$ de uma unidade quadrada. Se x_1 e x_2 possuem a função de distribuição $F_x(x_1, x_2) = C(F_1(x_1)F_2(x_2))$, então X_2 é uma função não-decrescente de X_1 se e somente se $C \equiv C_U$. Então, $(x_1$ e $x_2)$ são comonotônicas e somente se $C \equiv C_U$.

¹⁰ F_1 e F_2 são frequentemente chamados de ranks de x_1 e x_2 .

¹¹ \bar{C} representa a cópula de sobrevivência. Maiores detalhes serão apresentados na seção 4.4.4

Da mesma maneira, o limite inferior de Fréchet para uma cópula bi-dimensional é dado por:

$$C_L(u_1, u_2) = \max\{0, u_1 + u_2 - 1\}, \quad \mathbf{u} \in [0,1]^2,$$

que corresponde à unidade de massa sobre a diagonal secundária $u_1 = 1 - u_2$ de uma unidade quadrada. Se x_1 e x_2 possuem a função de distribuição $F_x(x_1, x_2) = C(F_1(x_1)F_2(x_2))$, X_2 é uma função não-crescente de X_1 se e somente se $C \equiv C_L$. Então, $(x_1$ e $x_2)$ são contramonotônicas se e somente se $C \equiv C_L$.

4.4.4. Cópula de sobrevivência

Em muitas aplicações, as variáveis aleatórias de interesse representam a sobrevivência de indivíduos ou contratos em alguma população¹². A probabilidade de sobrevivência além de um tempo x é dada por uma função de sobrevivência $\bar{F}(x) = \Pr[X > x] = 1 - F(x)$ em que F representa a função de distribuição acumulada de x .

Para um par de variáveis aleatórias (X, Y) com função de distribuição conjunta H , a função de sobrevivência conjunta é dada por $\bar{H}(x) = \Pr[X > x, Y > y]$. Existe um relacionamento entre as funções de sobrevivência conjunta e as funções de sobrevivência marginais, de forma análoga ao relacionamento entre as funções de distribuição conjunta e as funções de distribuição marginais.

Então, se C é uma cópula, a cópula de sobrevivência \bar{C} associado com C é definida para $\mathbf{u} \in [0,1]^2$ como:

$$\bar{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1.$$

Essa cópula de sobrevivência não deve ser confundida com a função de distribuição conjunta C de duas uniformes $(0,1)$, isto é:

$$\Pr[U_1 > u_1, U_2 > u_2] = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2) \neq \bar{C}(u_1, u_2),$$

mas,

$$\Pr[U_1 > u_1, U_2 > u_2] = \bar{C}(1 - u_1, 1 - u_2).$$

¹² Entende-se população como o universo de estudo, podendo ser, por exemplo, as apólices de uma seguradora.

Os limites de Fréchet também se aplicam à cópula de sobrevivência, da seguinte maneira:

$$\bar{C}_L(u_1, u) \leq \bar{C}(u_1, u) \leq \bar{C}_U(u_1, u).$$

Em casos de independência, os limites de Fréchet para cópulas coincidem com os limites para cópulas de sobrevivência: $\bar{C}_L = C_L$, $\bar{C}_U = C_U$.

Cópulas de sobrevivência podem ser usadas para expressar $\bar{F}_X(x)$ em termos das marginais \bar{F}_1 e \bar{F}_2 como segue:

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F_X(x) = \bar{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2)).$$

4.4.5. Cópula dual e Co-cópula

Além da Cópula de sobrevivência, podem-se citar duas combinações associadas à cópula, são elas a Cópula Dual e a Co-Cópula. Apesar de nenhuma dessas serem cópulas, elas aferem informações importantes.

A co-cópula C^* associadas à cópula C representa a probabilidade de $X_1 > x_1$ ou $X_2 > x_2$, ou seja:

$$\Pr[X_1 > x_1 \text{ ou } X_2 > x_2] = C^*(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2)),$$

$$C^*(u_1, u_2) = 1 - C(1 - u_1, 1 - u_2), \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^2.$$

Note que a co-cópula da co-cópula é a cópula original $(C^*(u_1, u_2))^* = C(u_1, u_2)$.

A dual cópula \tilde{C} associadas à cópula C representa a probabilidade de $X_1 \leq x_1$ ou $X_2 \leq x_2$, ou seja:

$$\Pr[X_1 \leq x_1 \text{ ou } X_2 \leq x_2] = \tilde{C}(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

$$\tilde{C}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - C(u_1, u_2), \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^2$$

4.4.6. Simetria

Se X é uma variável aleatória e a é um número real, pode-se dizer que X é simétrico em a se as funções de distribuição das variáveis aleatórias $(X-a)$ e $(a-X)$ são iguais. Isto é: para qualquer x em R , $\Pr[X - a \leq x] = \Pr[a - X \leq x]$. Quando X é

uma variável aleatória contínua com função distribuição F , é equivalente dizer que $F(a+x) = \bar{F}(a-x)$.

Em um caso bivariado existe uma série de caminhos para se dizer que o par de variáveis aleatórias (X, Y) são simétricos em (a, b) , e cada caminho leva a um tipo diferente de simetria bivariada.

Sejam X e Y variáveis aleatórias e (a, b) um ponto em \mathfrak{R}^2 :

- _ (X, Y) são marginalmente simétricos em (a, b) se X e Y são simétricos em a e b respectivamente;
- _ (X, Y) são radialmente simétricos em (a, b) se $(X-a)$ e $(Y-b)$ têm a mesma função de distribuição de $(a-X)$ e $(b-Y)$;
- _ (X, Y) são conjuntamente simétricos em (a, b) se os quatro pares de variáveis aleatórias a seguir têm a mesma função de distribuição conjunta: $(X-a, Y-b)$, $(X-a, b-Y)$, $(a-X, Y-b)$, e $(a-X, b-Y)$.

Quando X e Y são contínuas pode-se expressar a condição de simetria radial em termos da função de distribuição conjunta e da função de sobrevivência de forma análoga ao caso univariado.

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com função de distribuição acumulada H e marginais F e G , respectivamente, e cópula C ; seja (a, b) um ponto em \mathfrak{R}^2 . Então (X, Y) é radialmente simétrico em (a, b) se e somente se:

$$H(a+x, b+y) = \bar{H}(a-x, b-y) \text{ para todo } (x, y) \text{ em } \mathfrak{R}^2$$

e

$$C(u, v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v) \text{ para todo } (x, y) \text{ em } \mathfrak{R}^2.$$

4.4.7. Cópula permutável

O vetor aleatório X é permutável se $(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} (X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(d)})$ para qualquer permutação $(\pi(1), \dots, \pi(d))$ de $(1, \dots, d)$. Então, uma cópula é dita permutável se satisfaz:

$$C(u_1, \dots, u_d) = C(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(d)}),$$

para todas as permutações possíveis das variáveis de C .

Segue que, se a função de distribuição do vetor (U_1, U_2) é uma cópula bidimensional permutável, então:

$$\Pr[U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1] = \Pr[U_1 \leq u_1 | U_2 = u_2] \quad \forall u \text{ em } I$$

ou seja, suas linhas de quantil são simétricas em relação à diagonal principal de I^2 . Se o vetor (X_1, X_2) tem esta cópula, então a probabilidade de X_2 exceder o quantil u_2 dado que X_1 atingiu u_1 é exatamente a mesma probabilidade de X_1 exceder o quantil u_1 dado que X_2 atingiu o quantil u_2 .

4.4.8. Ordenação de cópulas

É possível estabelecer formas de comparação e ordenação de cópulas. A ordenação pode ser indicada pelo significado de \prec . Se uma cópula C_1 é menor que uma cópula C_2 , pode-se escrever que $C_1 \prec C_2$ se para todo $(u_1, \dots, u_d) \in I^d$, $C_1(u_1, \dots, u_d) \leq C_2(u_1, \dots, u_d)$. De forma análoga $C_1 \succ C_2$ se para todo $(u_1, \dots, u_d) \in I^d$, $C_1(u_1, \dots, u_d) \geq C_2(u_1, \dots, u_d)$.

Para qualquer cópula tem-se a seguinte desigualdade com os limites de Fréchet:

$$C_L \prec C \prec C_U$$

Para algumas cópulas essa ordenação coincide com a ordenação do seu parâmetro. Se existem duas cópulas C_α e C_β tal que $\alpha \leq \beta$, pode-se afirmar que as cópulas são ordenadas positivamente se $C_\alpha \prec C_\beta$ ou são ordenadas negativamente e $C_\alpha \succ C_\beta$.

Uma ilustração disto apresentada em Mendes (2004) é a seguinte: seja a seguinte cópula gaussiana $C_{Ga}^\rho(u_1, u_2) = \Phi_2^\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$, então é válida a seguinte ordenação:

$$C_L = C_{Ga}^{\rho=-1} \prec C_{Ga}^{\rho<0} \prec C_{Ga}^{\rho=0} = C^\perp \prec C_{Ga}^{\rho>0} \prec C_{Ga}^{\rho=+1} = C_U$$

4.5. Distribuições condicionais derivadas de cópulas

A distribuição condicional pode ser derivada a partir da representação de $F_x(x_1, x_2) = C(F_1(x_1)F_2(x_2))$. Sendo C a cópula e u_i um número real em $[0,1]$, a derivada parcial existe quase sempre. Quando isso é verdade segue que:

$$\begin{aligned}
 C_{2|1}(u_2|u_1) &= \Pr[X_2 \leq x_2 | X_1 = x_1] = C_{2|1}(F_2(x_2)|F_1(x_1)) \\
 &= \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \\
 C_{1|2}(u_1|u_2) &= \Pr[X_1 \leq x_1 | X_2 = x_2] = C_{1|2}(F_1(x_1)|F_2(x_2)) \\
 &= \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)
 \end{aligned}$$

e valem os seguintes intervalos:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \leq 1 \\
 0 &\leq \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) \leq 1
 \end{aligned}$$

Uma interpretação desse resultado para fins de gerenciamento de riscos é a seguinte: supõe-se que os riscos x_1 e x_2 têm a cópula C . Então, $1 - C_{2|1}(q|p)$ é a probabilidade que x_2 exceda o quantil q dado que x_1 atingiu o quantil p .

4.6. Densidade de probabilidade associada a cópulas

Sob condições apropriadas, a função de densidade de probabilidade pode ser escrita como o produto das funções de densidade de probabilidades marginais e da sua densidade de cópula. A cópula tem toda a informação sobre a dependência entre os x_i 's e pode ser chamada de função de dependência. Estas densidades são úteis quando se deseja calcular cópulas de dados por máxima verossimilhança.

Se as marginais F_1 e F_2 são contínuas com respeito às funções de densidade marginais, f_1 e f_2 , então a função de densidade de probabilidade conjunta de \mathbf{x} pode ser escrita como:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = f_1(x_1)f_2(x_2)c(F_1(x_1)F_2(x_2)),$$

em que $c(F_1(x_1)F_2(x_2))$ representa a densidade da cópula que pode ser obtida da seguinte maneira:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2), \quad \mathbf{u} \in [0,1]^2$$

A segunda derivada da cópula, quando existe, pode ser interpretada como uma medida de dependência local.

4.7. Tipos de cópulas

As cópulas podem ser classificadas em três tipos, dependendo da estrutura de dependência por ela captada e do formato da sua densidade ao longo da diagonal principal. As cópulas do tipo “J” possuem coeficiente de dependência somente na cauda superior positiva. As cópulas do tipo “L” possuem coeficiente de dependência somente na cauda inferior positiva e as cópulas do tipo “U” possuem ambos os coeficientes positivos. Dentre as cópulas que serão apresentadas, pode-se citar a cópula de Gumbel com coeficiente de dependência na cauda superior positivo, a cópula de Clayton com coeficiente de dependência na cauda inferior positivo, a cópula t-student com ambos coeficientes positivos, e a cópula Gaussiana que não possui coeficiente de dependência na cauda.

Algumas cópulas não possuem uma forma fechada de apresentação e por isso são chamadas de cópulas implícitas, em contrapartida às cópulas explícitas que possuem uma forma fechada. Além desses dois tipos de cópulas, pode-se citar a classe de cópulas fundamentais que engloba a cópula de marginais independentes e as cópulas de dependência positiva e negativa perfeitas.

Apresenta-se nessa seção exemplos de cópulas subdivididas nestas três categorias: cópula fundamental, cópula implícita e cópula explícita.

4.7.1. Cópula fundamental

A classe de cópulas fundamentais engloba uma série de estruturas de dependência importantes. A primeira delas é a Cópula de Marginais Independentes: variáveis aleatórias com distribuições contínuas são independentes se e somente se sua estrutura de dependência for dada por:

$$\prod(u_1, \dots, u_d) = \prod_{i=1}^d u_i$$

A Cópula Comonotônica coincide com o limite superior de Fréchet e representa a dependência positiva perfeita:

$$C_U(u_1, \dots, u_d) = \min(u_1, \dots, u_d)$$

Essa cópula é a função de distribuição conjunta do vetor aleatório (U, \dots, U) em que $U \sim Uni(0,1)$. Suponha que as variáveis aleatórias X_1, \dots, X_d têm funções de

densidades contínuas e possuem dependência positiva perfeita. Então, elas são, quase certamente, funções estritamente crescentes uma das outras de modo que $X_i = T_i(X_1)$, quase certamente, para $i = 2, \dots, d$. Pela propriedade de invariância pode-se dizer que $X_i, i \geq 2$ é dado por $F_i = F_1 \circ T_i^{\leftarrow}$. Então, a cópula de (X_1, \dots, X_d) é a função de distribuição de:

$$\left(F_1(X_1), F_1 \circ T_2^{\leftarrow} \circ T_2(X_1), \dots, F_1 \circ T_d^{\leftarrow} \circ T_d(X_1) \right).$$

A Cópula Contramonotônica é a cópula bi-dimensional do limite inferior de Fréchet e representa a dependência negativa perfeita, ou seja:

$$C_L(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$$

Essa cópula é a função de distribuição conjunta do vetor aleatório $(U, 1-U)$ em que $U \sim Uni(0,1)$. Suponha que X_1 e X_2 têm funções de densidades contínuas e têm dependência negativa perfeita. Então, X_2 é, quase certamente, uma função estritamente decrescente de X_1 .

4.7.2. Cópula implícita

Se $Y \sim N_d(\mu, \Sigma)$ é um vetor aleatório gaussiano, então sua cópula é chamada de Cópula Gaussiana. A propriedade de invariância garante que a cópula de Y é a mesma cópula de X em que $X \sim N_d(0, P)$ e P é a matriz de correlação de Y . Então, a cópula é dada por:

$$\begin{aligned} C_{Gauss}^P &= \Pr[\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_d) \leq u_d] \\ &= \Phi_P[\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_d)] \end{aligned}$$

em que Φ denota a função de densidade normal univariada padrão e Φ_P denota a função de distribuição conjunta de X . Essa cópula é pertinente à distribuição normal multivariada padrão, com coeficiente de correlação ρ . A cópula gaussiana não tem uma forma funcional fechada, mas pode ser expressa como uma integral da densidade de x . Para C_{Gauss}^P bi-dimensional com $|\rho| < 1$ tem-se:

$$C_{Gauss}^P(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} ds_1 ds_2$$

A cópula de marginais independentes e a cópula comonotônica são casos especiais de C_{Gauss}^P . Se a matriz de correlação de Y coincidir com a matriz identidade, obtém-se a cópula independente. Se a matriz de correlação de Y for

$d \times d$ completa de 1 (uns), obtêm-se a cópula comonotônica. E para $d = 2$ e $\rho = -1$, obtêm-se a cópula contramonotônica. Em uma cópula gaussiana bi-dimensional, ρ representa a força de dependência. A cópula gaussiana capta desde a dependência positiva perfeita até a dependência negativa perfeita.

É possível extrair uma cópula implícita de qualquer função multivariada com marginais contínuas. Por exemplo, a cópula t -student d -dimensional tem a forma:

$$C_{v,\rho}^t(\mathbf{u}) = F_{v,\rho}^{-1}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d))$$

em que $t_v^{-1}(\cdot)$ representa a função quantil de uma distribuição t -student univariada padrão com v graus de liberdade. Note que o número de graus de liberdade das marginais e deve ser o mesmo. A cópula t -student depende somente de v e ρ . Se a matriz de correlação for a identidade e as variáveis aleatórias com distribuição t -student multivariada não correlacionadas não são independentes, não é possível obter a cópula independente. Essa cópula apresenta dependência em ambas as caudas, superior e inferior.

4.7.3. Cópula explícita

Ao contrário das cópulas implícitas é possível encontrar cópulas com fórmulas fechadas, denominadas cópulas explícitas. Exemplos desse tipo de cópula são a Cópula de Gumbel e a Cópula de Clayton que fazem parte da família de cópulas arquimedianas.

A Cópula bi-variada de Gumbel pode ser representada por:

$$C_{\theta}^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\left\{-\left[(-\ln u_1)^{\theta} + (-\ln u_2)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty$$

A força de dependência é dada pelo valor de θ . Observe que se $\theta=1$ obtêm-se a cópula de marginais independentes e se $\theta \rightarrow \infty$ obtêm-se a cópula comonotônica. De acordo com Mendes (2004), o coeficiente de dependência na cauda superior é igual a $2 - 2^{1/\theta}$, e o coeficiente de correlação de Kendal é igual a $(\theta - 1)/\theta$. A cópula de Gumbel interpola entre a independência e a dependência perfeita, e é adequada para modelar estruturas de dependência de máximos coletados em blocos. É uma cópula de valores extremos e apresenta dependência na cauda superior.

A Cópula bivariada de Clayton pode ser representada como:

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, u_2) = \exp\left\{-\left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}\right\}, \quad 0 < \theta < \infty$$

Nos limites, a cópula de Clayton aproxima-se da cópula de marginais independentes com $\theta \rightarrow 0$, e da cópula de contramonotônica com $\theta \rightarrow \infty$. A cópula de Clayton apresenta dependência na cauda inferior.