3 MENSURAÇÃO DE RISCOS

3.1. Preliminares

Para discutir as medidas de riscos e dependência é preciso estar familiarizado com alguns conceitos estatísticos, tais como distribuições conjuntas e marginais.

Seja X uma variável aleatória. A função de distribuição acumulada da variável aleatória X é a função $F: \Re \rightarrow [0,1]$ definida por:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \text{ para todo } x \in \Re \text{ .}$$

A função de distribuição acumulada, ou função de distribuição possui as seguintes propriedades: contínua à direita; não decrescente; $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

A função de distribuição acumulada conjunta é uma extensão desta. Seja $X=(X,Y)$ um vetor aleatório. A função de distribuição conjunta de X é a função $H: \Re^2 \rightarrow [0,1]$ definido por: $H(x, y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y)$ para todo (x,y) $\in \Re^2$.

As variáveis X, Y são denominadas variáveis marginais do vetor aleatório. Da mesma forma, as funções de distribuição de (X,Y) ditas F e G, são denominadas funções de distribuição marginais de (X,Y). A função de distribuição conjunta é contínua à direita e deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $\lim_{x \to \infty} H(x,y) = G(x)$, $\lim_{y \to \infty} H(x,y) = F(x)$ em que F,G são as respectivas distribuições marginais de X,Y;
- $\lim_{(x,y) \to (\infty,\infty)} H(x,y) = 1$ em que $(x, y) \rightarrow (\infty,\infty)$ permanece para ambas variáveis x, y tendendo ao infinito;
- $\lim_{x \to -\infty} H(x,y) = \lim_{y \to -\infty} H(x,y) = 0$;
- para todo (x_1,x_2), (y_1,y_2) com $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$:

$$H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_1) \geq 0$$

A função de distribuição acumulada de uma variável pode ser definida a partir de sua função de densidade de probabilidade, da seguinte forma:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

A densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua é uma função $f(x) \geq 0$ se e somente se:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$$

Assim, a probabilidade de uma variável aleatória X pertencer a um intervalo (a,b) é dada por:

$$\Pr(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

3.2. Medidas de Risco

O capital requerido para a operação de uma instituição financeira pode ser determinado a partir do risco mensurado para a companhia, com um determinado nível de tolerância ao risco. Entretanto, na prática, esse procedimento, de forma isolada, não é suficiente para identificar a necessidade real de capital. É necessária uma análise integrada das atividades potenciais através de procedimentos como *DFA* descrito no capítulo 2.

Goovaerts (2005) define que: uma medida de risco é uma função ζ mapeando um fenômeno com risco de perda L para ser um número real não negativo $\zeta[L]$, possivelmente infinito. Essa função quantifica o risco de perda L, e representa um valor que deve ser retido para cobrir o risco de perda L deste fenômeno, de modo que o nível de risco para a instituição seja reduzido a um nível de tolerância pré-estabelecido. Altos valores de $\zeta[L]$ implicam que existe uma chance alta de ocorrer uma perda L.

Pode-se classificar medidas de riscos em dois tipos. Medidas relacionadas com a solvência concentram-se na cauda da distribuição de probabilidade acumulada das perdas e são relevantes para calcular o capital econômico requerido. As medidas relacionadas ao desempenho avaliam a parte central da distribuição e são úteis para determinar a volatilidade dos resultados esperados.

Esse trabalho irá explorar metodologias de mensuração usadas para avaliar a solvência da instituição e determinar o capital econômico. Primeiramente serão apresentadas as propriedades que uma medida de risco coerente deve satisfazer. Em seguida, serão discutidas as seguintes mensurações: Valor em Risco (*Value at Risk – VaR*), Valor em Risco na Cauda (*Tail Value at Risk – TVaR*), Esperança Condicional da Cauda (*Conditional Tail Expectation – CTE*), Valor em Risco Condicional (*Conditional Value at Risk – CVaR*), Princípio do Prêmio Coerente, Probabilidade de Ruína e Custo Econômico da Ruína (*Economic Cost of Ruin – ECOR*). Dessas mensurações somente o *VaR* não é uma medida de risco coerente.

3.3.
Medida de risco coerente

Artzner et al. (1999), definiu que uma medida de risco, para ser definida como coerente, deve satisfazer os axiomas de translação invariante, homogeneidade positiva, sub-aditividade e monotonicidade. Adicionalmente, pode-se citar alguns axiomas desejáveis: carregamento não negativo e não elevado, lei da invariância e continuidade com respeito à convergência da distribuição. Alguns desses axiomas coincidem com as propriedades requeridas aos princípios de prêmios de seguros, detalhadas em Kaas (2001).

Antes de introduzir esses axiomas apresenta-se uma definição formal de uma medida de risco.

Sejam:

- (Ω, F, P) um espaço de probabilidade fixo;
- $L^0(\Omega, F, P)$ a série de todas as variáveis aleatórias em (Ω, F);
- $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, F, P)$ uma série de variáveis aleatórias de um portfólio de perdas relativas ao risco estudado no horizonte de tempo Δ;$\mathcal{M}$ é freqüentemente assumido como um cone convexo;
- $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \Re$ ou seja, medidas de riscos são funções de valores reais;

Então $\zeta(L)$ é a quantidade de capital que deve ser retido para diminuir a perda L gerada pelo fenômeno estudado. Posições com $\zeta(L) \leq 0$ são aceitáveis sem a injeção de capital e, com $\zeta(L) > 0$, é possível diminuir o capital retido.

3.3.1. Propriedades de uma medida de risco coerente

3.3.1.1. Translação invariante

Para toda variável aleatória *L*:

$$\zeta(L+l) = \zeta(L)+l.$$

A adição ou subtração de uma quantidade determinística *l* a uma posição que leva a uma perda *L*, deve alterar o capital requerido exatamente na mesma quantidade. Translação invariante implica na seguinte propriedade:

$$\zeta(L-\zeta(L)) = 0.$$

Considere uma posição com perda *L* e $\zeta(L)$ >0. Quando adiciona-se a quantidade de capital $\zeta(L)$ a uma posição inicial $-L$, obtém-se uma posição neutra. Então a posição $\zeta(L-\zeta(L))$ é aceitável sem a injeção de capital.

3.3.1.2. Sub-aditividade

A união de riscos não gera um risco extra. Para todo L_1 e $L_2 \in \mathcal{M}$:

$$\zeta(L_1+L_2) \leq \zeta(L_1)+\zeta(L_2).$$

Sub-aditividade reflete a idéia de que o risco pode ser reduzido por diversificação. O uso de mensurações de riscos não sub-aditivas em otimização de portfólios pode levar a portfólios ótimos com grande concentração de riscos. Para um padrão econômico normal, essa otimização deveria ser considerada de alto risco.

Quando a igualdade da propriedade é válida trata-se de aditividade. Fala-se de aditividade para riscos independentes ou riscos comonótonos. Riscos comonótonos são ocorrências em um mesmo evento em que um não pode agir como *hedge* a favor do outro. Então, não haverá uma redução do risco em uma combinação de apólices.

3.3.1.3. Homogeneidade positiva

Para todo $L \in \mathcal{M}$ e $\lambda > 0$, tem-se:

$$\zeta(\lambda L) = \lambda\zeta(L).$$

Assim, medidas de risco são independentes da unidade monetária usada. Observa-se que λ pode representar diversas variáveis, por exemplo taxa de câmbio ou número de apólices.

Quando a medida de risco é considerada sub-aditiva, esse axioma pode ser deduzido a partir da seguinte expressão:

$$\zeta(nL) = \zeta(L + ... + L) \leq n\,\zeta(L), \text{ para todo } n \in \mathcal{N}$$

Caso não haja benefício de diversificação das perdas do portfólio, tem-se que $\zeta(L + ... + L) = n\,\zeta(L)$, que coincide com o axioma de homogeneidade positiva.

3.3.1.4. Monotonicidade

Sob as mesmas condições, posições que levam a perdas maiores requerem mais capital para cobrir o risco. Para L_1 e $L_2 \in \mathcal{M}$:tal que $L_1 \leq L_2$:

$$\zeta(L_1) \leq \zeta(L_2).$$

Para uma medida de risco sub-aditiva e com homogeneidade positiva, esse axioma é equivalente ao requerimento de $\zeta(L) \leq 0$ para todo $L \leq 0$.

Esse resultado é obtido como segue: se $L \leq 0$ então $\zeta(L) \leq \zeta(0) = 0$ mas $\zeta(\lambda 0) = \lambda\zeta(0)$ para todo $\lambda > 0$. Se $L_1 \leq L_2$ e assume-se que $\zeta(L_1 - L_2) \leq 0$ então, $\zeta(L_1) = \zeta(L_1 - L_2 + L_2) \leq \zeta(L_1 - L_2) + \zeta(L_2)$ que implica que $\zeta(L_1) \leq \zeta(L_2)$.

3.3.2. Propriedades adicionais

3.3.2.1. Carregamento não negativo e não excessivo

Para toda variável aleatória L:

$$E(L) \leq \zeta(L) \leq \max(L).$$

O capital mínimo requerido deve exceder a perda esperada, a fim de cobrir oscilações, e não deve ser maior que o valor máximo de perda. Um prêmio que não contempla um carregamento de segurança, possivelmente levará a companhia à ruína.

3.3.2.2.
Continuidade com respeito à convergência da distribuição

Seja $\{L_n\, , n = 1,2,...\}$ uma seqüência de riscos tais que $L_N \rightarrow_d L$ com $n \rightarrow_+ \infty$, então:

$$\lim_{n \to +\infty} F_{L_n}(l) = F_L(l).$$

Então, a medida de risco deve satisfazer o seguinte:

$$\lim_{n \to +\infty} \zeta[L_n] = \zeta[L].$$

3.3.2.3.
Lei da invariância

$\zeta(L)$ depende de L somente através da função de distribuição F_L. Isso implica que F_L. contém toda a informação necessária para mensurar o risco de L. Pode-se dizer que:

$$L_1 =_d L_2 \quad \Rightarrow \quad \zeta(L_1) = \zeta(L_2).$$

Riscos com a mesma função de distribuição têm a mesma medida de risco. Isso é de crucial importância quando os riscos precisam ser estimados a partir de dados empíricos. Algumas medidas de riscos dependem da perda aleatória atual (L) e não somente da distribuição F_L.

3.3.3.
Medida de risco coerente baseada em cenários

O risco do portfólio pode ser mensurado a partir da perda máxima de cenários escolhidos. Essa escolha é baseada em possíveis fatores de risco futuros. Cenários extremos podem ser suavizados para mitigar o seu efeito no resultado.

A dificuldade desse método é determinar os cenários apropriados e seus respectivos pesos. Para um modelo mais acurado, faz-se necessário o uso de informações complementares baseadas em estatísticas de distribuição de perdas. Comparações de resultados entre portfólios que são afetados por diferentes fatores de risco não são triviais.

McNeil (2005) e Goovaerts (2005) definem uma medida de risco coerente baseado em cenários como: seja P uma série de medidas de probabilidade no espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$e $\mathcal{M}_P := \{L : E^Q(|L|) < \infty$ para todo $Q \in \Re\}$. Então a medida de risco induzida pela séria de cenários generalizados P é da seguinte forma:

$$\zeta_{\mathcal{P}} : \mathcal{M}_{\mathcal{P}} \to \Re \quad \text{tal que} \quad \zeta_{\mathcal{P}}(L) := \sup\{E^Q(L) : Q \in \mathcal{P}\},$$

em que E^Q é a esperança calculada sobre a distribuição de probabilidade Q.

Essa medida de risco pode ser interpretada como uma expectativa com respeito ao pior cenário. Para qualquer série de medidas de probabilidade P em $(\Omega, \mathcal{F})$, o risco mensurado satisfaz os axiomas de translação invariante, homogeneidade positiva, sub-aditividade e monotonicidade, sendo então uma medida de risco coerente. Entretanto, uma propriedade desejável importante, a lei da invariância, não é atendida.

3.3.4. Medida de risco coerente baseado na distribuição de perdas

Uma medida de risco baseada na distribuição de perdas é conveniente uma vez que as perdas são objeto central de interesse de um gerenciamento de riscos. Entretanto, nem sempre é possível ajustar essa distribuição com exatidão.

Como as estimativas são baseadas em dados passados e, estes podem não refletir perfeitamente a situação econômica, financeira e legal que a empresa está envolvida, é preciso ter cautela na sua utilização para prever o futuro. Uma medida de risco baseada na distribuição de perdas deve ser complementada com cenários hipotéticos.

Uma mensuração baseada na distribuição de perdas bastante usada para avaliar o risco de instituições financeiras, o *VaR*, não contempla todas as propriedades de uma mensuração de risco coerente. Variações do *VaR* que são ditas coerentes são preferidas para analisar portfólios em que benefícios de diversificação são desejáveis.

3.4. Medida de risco convexo

Os axiomas de sub-aditividade e homogeneidade positiva implicam que a superfície do risco a ser minimizado no espaço de portfólios é convexa em $\mathcal{M}$.. Um mínimo absoluto único somente existe se as superfícies forem convexas. Isso implica que o processo de minimização de riscos sempre terá uma solução única, bem diversificada e ótima.

O axioma de homogeneidade tem sido criticado. Acredita-se que para múltiplos de λ. muito elevados, deveria-se ter $\zeta(\lambda L) > \lambda\, \zeta(L)$ para penalizar a concentração de riscos e possíveis problemas de liquidez.

De acordo com Goovaerts (2005), mensurações em que as condições de homogeneidade positiva e sub-aditividade têm sido relaxadas são denominadas de Medidas de Risco Convexo. Essa medida requer apenas uma fraca propriedade de convexidade:

$$\zeta(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) \;\leq\; \lambda \zeta(L_1) + (1-\lambda)\zeta(L_2), \quad \lambda \in [0,1].$$

3.5. Valor em risco - *VaR*

O *VaR* é uma ferramenta cada vez mais usada pelo mercado financeiro, principalmente após as normas de requerimento de capital propostas pelo Acordo de Basiléia II. Esta medida resume em um único número, a exposição total ao risco de uma carteira, empresa ou instituição, dado um determinado nível de confiança e um período de tempo pré-definido.

O *VaR* é simplesmente um percentil α da distribuição de perdas. Espera-se que com um nível de confiança α, as perdas ultrapassem um valor $VaR(L,\alpha)$ em no máximo $(1-\alpha)$ das vezes. Goovaerts (2005) define o *VaR* como:

$$VaR[L,\alpha] = \inf\{l \in \Re : \Pr(L > l) \leq 1-\alpha\} = \inf\{l \in \Re : F_L(l) \geq \alpha\}.$$

A Associação Internacional dos Atuários - IAA sugere que a reserva de capital de uma seguradora deva ser suficiente para cobrir as obrigações, para cada tipo de risco, num horizonte de tempo acima de um ano, com alto nível de confiança. É recomendado um nível de confiança de 99% ou 99,5% para companhias de seguro. O Comitê da Basiléia, através das diretrizes propostas pelo Basiléia II, recomenda o nível de 99,9% para os bancos.

Uma restrição significativa dessa medida é que não se obtêm qualquer informação sobre o comportamento das perdas. Assim, sua utilidade está muito mais para comparações de riscos que para medição de riscos.

O Valor em Risco respeita todas as propriedades de uma medida de risco coerente com exceção à sub-aditividade. São elas: translação invariante, homogeneidade positiva e monotonicidade.

A não sub-aditividade do *VaR* pode ser confirmada em várias ocasiões, como, por exemplo, em situações em que os ativos de um portfólio têm uma distribuição de perdas com cauda muito pesada. Outra circunstância é quando as distribuições marginais de perdas dos ativos são suaves e simétricas, mas a dependência entre elas é altamente assimétrica. Um *VaR* sub-aditivo é uma situação idealizada em que todos os portfólios podem ser representados como combinações lineares de uma mesma série de fatores de riscos com distribuição elíptica[5].

3.5.1.
O uso do VaR para requerimentos de capital

Órgãos reguladores do setor securitário requerem que as seguradoras mantenham um capital mínimo a fim de evitar uma possível insolvência. O interesse do regulador está em minimizar as perdas não esperadas que excedam o valor mensurado do risco, $E[(L-\zeta(L))_+]$. Para evitar um requerimento excessivo de capital, $\zeta(L)$ pode ser determinado a partir do seguinte problema de otimização:

$$\min\{E[(L-\zeta(L))_+]+\zeta(L)\varepsilon\}, \qquad \varepsilon \in (0,1),$$

ou seja, tenta-se equilibrar uma baixa perda residual com um baixo custo de capital. ε pode ser interpretado como uma mensuração do custo do capital para a companhia, podendo ser específico para cada uma e para cada tipo de risco, ou um valor único determinado pelo regulador. Se ε assume valor zero, o capital

[5] Distribuições elípticas são obtidas de transformações afins multivariadas de distribuições esféricas. Distribuições esféricas são distribuições de vetores aleatórios com componentes não correlacionados e distribuições marginais simétricas e idênticas.

requerido será o valor máximo da perda L. Aumentar o valor de ε significa que o regulador aumenta a importância relativa ao custo de capital, e a solução ótima do problema resulta em um valor mais baixo.

Conforme mostrado em Goovaerts (2005), o menor capital $\zeta(L)$ requerido nesse problema pode ser calculado com um $VaR(L,\ 1\text{-}\varepsilon)$. É enfatizado que, nesse modelo, o *VaR* não é usado para mensurar o risco, o seu uso é para mensurar o requerimento de capital ótimo. A mensuração de risco seria calculada pela $E[(L\text{-}\zeta(L))_+]$ que coincide com a avaliação atuarial clássica de mensuração de risco pelo cálculo do prêmio de *stop-loss*.

Em bancos que usam modelo interno para avaliar o risco de mercado é possível utilizar o *VaR* para determinar o capital regulatório da seguinte maneira:

$$RC^{t}_{IM}(MR) = \max\left\{VaR^{t,10}_{0,99}, \frac{k}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR^{t-i+1,10}_{0,99}\right\} + C_{SR},$$

em que $VaR^{t,10}_{0,99}$ corresponde a um Valor em Risco para um período de 10 dias com 99% de confiança, com t representando o presente dia. O fator de stress k, com $3 \leq k \leq 4$ é determinado de acordo com a qualidade do modelo interno. C_{SR} é o risco residual do movimento do preço dos ativos depois de levar em consideração todos os fatores gerais do mercado.

Asher (2004) critica o uso do *VaR* como ferramenta única para determinar o capital requerido pelos reguladores. Segundo ele, esse tipo de mensuração não é suficiente para avaliar a real necessidade de capital uma vez que é determinado por avaliações padrão que excluem muitas atividades intangíveis. Esses itens intangíveis, como ações dos gestores, podem afetar o fluxo de caixa futuro e, conseqüentemente alterar as probabilidades de insolvência calculadas. Então, seria necessário o uso de outras práticas regulatórias em apoio ao requerimento de capital, tais como auditoria das práticas de conduta da instituição e do processo de gerenciamento de riscos.

3.6. Valor em risco na cauda - *TVaR*

O *TVaR*, também conhecido como *Expected Shortfall*, está estritamente relacionado ao conceito de *VaR*. Para uma perda L com $E(L) < \infty$ e função de distribuição de perdas F_L, o *expected shortfall* para um nível de confiança $\alpha \in (0,1)$, pose ser definido por:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u(F_L)du$$
,

em que $q_u(F_L)= F_L^{\leftarrow}(u)$ é a função quantil. Em função do *VaR*, pode ser reescrito como:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du$$
.

Fixando um nível de confiança α, rateia-se o *VaR* em todos os níveis de $u \geq \alpha$, concentrando-se na cauda da distribuição. Para uma distribuição contínua, o *expected shortfall* pode ser interpretado como a perda esperada do evento em que o *VaR* é excedido. Então $ES_\alpha = VaR_\alpha$.

3.7. Esperança condicional da cauda - *CTE*

Esta mensuração[6] tem sido indicada pelos órgãos reguladores para a determinação de capital econômico por ser uma mensuração de risco coerente e ser capaz de quantificar o valor médio da perda dado que ela excedeu um determinado *VaR*. Esse resultado coincide com o *TVaR* para riscos com distribuição contínua, e pode ser representado como:

$$CTE[L,\alpha] = E[L|L > VaR(L,\alpha)]$$

Definindo *VaR* como um limiar *c* e um determinado nível de confiança, *CTE* representa um "colchão" contra perdas que excedam esse limiar.

A determinação de capital econômico baseado no *TVaR* ou no *CTE* é feita da seguinte forma: seja *S* a perda agregada dos sinistros de um portfólio, então o capital necessário será:

$$\text{Capital Econômico} = TVaR\,(S,\ \alpha) - E(S)$$

[6]Os órgãos reguladores do Canadá e dos Estados Unidos têm incentivado o uso do *CTE* e do *TVaR* para determinar o capital requerido para cobrir, respectivamente, o risco de fundos segregados e de anuidades variáveis.

3.8.
Valor em risco condicional – *CVaR*

O valor em risco condicional é o valor esperado das perdas que excedem o *VaR*. O *CVaR* é uma alternativa para o *CTE* e pode ser representado pela seguinte expressão:

$$CVaR_{\alpha} - E\left[\left(X - VaR_{\alpha}\right)\middle| X > VaR_{\alpha}\right]$$

Para uma versão discreta o CVaR pode ser representado como:

$$CVaR_{\alpha} = VaR_{\alpha} + \frac{1}{N(1-\alpha)}\sum_{j-1}^{N}\left(X - VaR_{\alpha}\right)$$

em que *N* é o número de observações.

3.9.
Princípio do prêmio coerente

O princípio do prêmio coerente é útil para companhias de seguro que desejam calcular prêmios em uma base coerente sem se afastar muito das práticas atuariais padrão. Dada as constantes $p>1$ e $\alpha \in (0,1)$, o princípio do prêmio coerente $\zeta_{[\alpha,p]}$ é definido como segue. Seja $M:=L^{P}(\Omega,F,P)$ o espaço de todos as perdas L com $||L||:=E\left(|L|^{p}\right)^{1/p} < \infty$ e definido para $L \in \mathcal{M}$, então :

$$\zeta_{[\alpha,p]}(L) = E(L) = E(L) + \alpha\left\|\left(L - E(L)\right)^{+}\right\|_{p}$$

O risco da perda L é calculado pela soma de $E(L)$, o valor atuarial da perda, e um carregamento de risco dado por uma fração α de L^{P}, que é a norma[7] da parte positiva da perda centrada em $L - E(L)$. Quanto maiores os valores de α e p, mais conservadora será a mensuração de risco.

3.10.
Probabilidade de ruína

A probabilidade de ruína é a probabilidade do valor dos ativos da empresa ser inferior ao valor dos passivos, dado um horizonte de avaliação, resultando em uma insolvência técnica.

[7] Uma norma é uma função que associa cada vetor de um espaço vetorial a um número real não negativo. O conceito de norma é estritamente ligado ao comprimento do vetor

Essa probabilidade pode ser determinada a partir da função de densidade de probabilidade do valor presente dos fluxos de caixa futuros dos ativos e passivos da instituição. Feito isso, calcula-se a área abaixo da curva que corresponde ao ponto em que os passivos excedem os ativos. Esses gráficos são gerados a partir de simulações computacionais de ativos e passivos usando um modelo financeiro estocástico. A figura 3 representa esta situação.

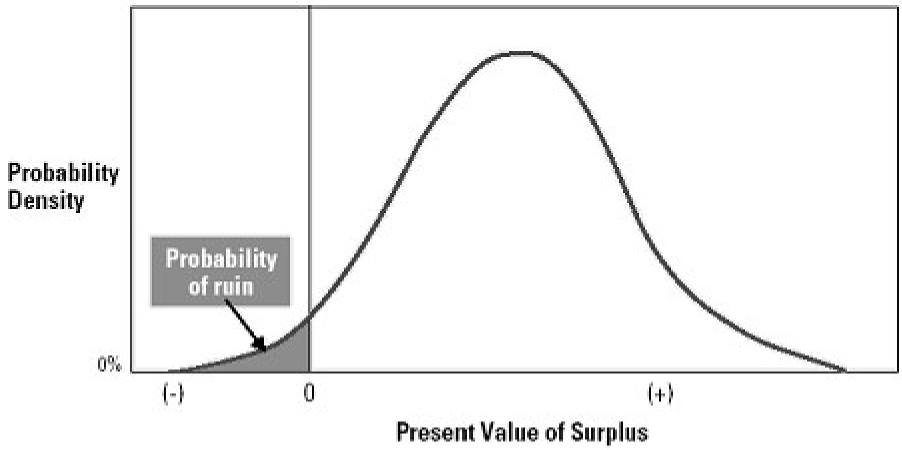

Figura 3: Probabilidade de Ruína
Fonte: Tillinghast – Towers Perrin

O capital econômico baseado na probabilidade de ruína é determinado pelo cálculo da quantidade de capital adicional necessária para reduzir a probabilidade de ruína em um nível pré-determinado. Esse nível de risco tolerável é determinado pelo gestor, considerando uma série de fatores. Geralmente é analisado o nível de solvência requerido pelos investidores, usualmente definidos em termos da posição mínima que os gestores desejam obter das agências de *rating*.

Apesar de terem diferenças computacionais, a maneira com que seguradoras usam a probabilidade de ruína para determinar capital é similar à maneira com que os bancos usam o *VaR* para essa finalidade. Esses métodos têm a vantagem de serem de fácil entendimento e comparação, entretanto, falham em não informar o custo da ruína, isto é, a perda esperada para os investidores quando a ruína acontece.

3.11. Custo econômico da ruína

O Custo Econômico da Ruína refere-se ao custo da insolvência. Em um evento de ruína, os segurados esperaram receber alguma parte dos benefícios que lhes são de direito contratual. O valor devido aos segurados é a diferença entre o benefício prometido e o valor esperado do benefício após a ruína. Por essa razão essa mensuração também é conhecida como Déficit Esperado do Segurado (*Expected Policyholder Déficit – EPD*).

O *ECOR* considera não somente a probabilidade de ruína, mas também a perda esperada no evento de ruína. Ele pode ser obtido da multiplicação da probabilidade de ocorrência de insolvências com o custo médio de insolvência. Na prática, *ECOR* é expresso como o percentual da reservas pertencentes aos segurados.

ECOR tem uma vantagem importante sobre a probabilidade de ruína e o *VaR*. Companhias com a mesma probabilidade de ruína podem ter custos médios de ruína muito diferentes. Companhias com um alto custo econômico de ruína deverão ter menos capital depois da liquidação para distribuir aos investidores. Essa capacidade de pagamento ao investidor captura a essência da necessidade de capital.

ECOR pode ser representado matematicamente como: seja S o total de perdas não pagas no período de análise, a o total de ativos com função de distribuição acumulada $F(.)$, então:

$$EPD = E\left[(S-a)(1-F(a)) \middle| S > a\right].$$

É possível observar ambos *VaR* e *ECOR* a partir da distribuição de probabilidade acumulada do valor presente dos fluxos de caixa futuros dos ativos e passivos, conforme figura 4. O *VaR* é a quantidade monetária no eixo x correspondente à probabilidade de ruína no eixo y. Por exemplo, um *VaR* [1.000.000, 99,9%] para 10 dias significa que as perdas totais do portfólio irão exceder 1.000.000 unidades monetárias em menos de 1% das vezes no período de 10 dias. Então, o capital necessário para cobrir perdas com um nível de confiança de 99,9% é análogo ao *VaR*. É equivalente dizer que 1.000.000 unidades monetárias são necessárias para que as perdas somente excedam o capital com uma probabilidade de 1%.

É conveniente ressaltar que estruturas de dependência entre os riscos de uma mesma apólice e/ou entre apólices distintas de seguros, podem afetar, e muito, a probabilidade de ruína calculada para a instituição. Essa dependência pode ocorrer tanto no tempo entre ocorrências de sinistros, quanto entre as severidades. Albrecher (2003) estuda o impacto no cálculo da probabilidade de ruína de desconsiderar essas estruturas de dependência entre os riscos de uma mesma apólice. Yuen, Guo e Wu (2002) realizaram estudos a respeito de sinistros considerando que pode haver correlação entre duas classes distintas de seguros financeiros, de acordo com possíveis correlações entre seus respectivos processos de sinistros.

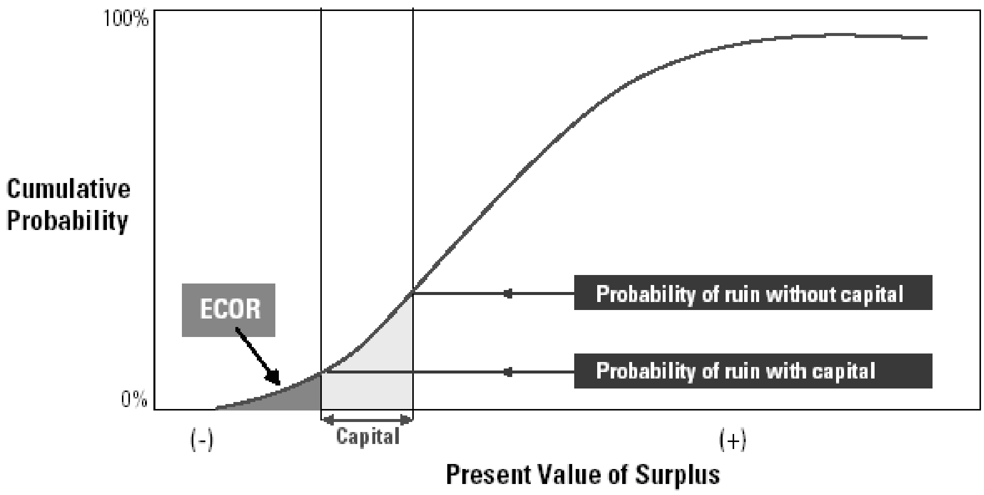

Figura 4: ECOR e Probabilidade de Ruína
Fonte: Tillinghast – Towers Perrin