



**Petrusca Arrieiro Cardoso**

**Uma Metodologia para Estimação do Capital  
Econômico: Incorporação de Dependência  
Entre riscos Via Cópulas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ciências Atuariais do Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio.

Orientadores: Cristiano A. C, Fernandes  
Roberto Westenberger

Rio de Janeiro

Setembro de 2008



**Petrusca Arrieiro Cardoso**

**Uma Metodologia para Estimação do Capital  
Econômico: Incorporação de Dependência  
Entre riscos Via Cópulas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ciências Atuariais do Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio.

**Prof. Cristiano A. C. Fernandes**

Orientador e Presidente

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

**Prof. Roberto Westenberger**

Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias - PUC-Rio

**Prof. Helio Cortes Vieira Lopes**

Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias - PUC-Rio

**Profa. Beatriz Vaz de Melo Mendes**

Instituto de Matemática - UFRJ

**Prof. Nizar Messari**

Coordenador Setorial do Centro de Ciências Sociais – PUC Rio

Rio de Janeiro, 16 de setembro de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Petrusca Arrieiro Cardoso**

Graduou-se Bacharel em Ciências Atuariais pela Universidade Federal de Minas Gerais em 2006.

Ficha Catalográfica

Cardoso, Petrusca Arrieiro

Uma metodologia para estimação do capital econômico : incorporação de dependência entre riscos via cópulas / Petrusca Arrieiro Cardoso; orientador: Cristiano A. C. Fernandes. – 2008.

122 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

Inclui bibliografia

CDD: 368.01

Para meus amados pais Waldir e Dorinha

## Agradecimentos

A Deus por guiar meus passos e iluminar meu caminho.

Aos meus pais pelo amor, apoio e incentivo. Mesmo de longe sempre me deram forças para continuar.

À minha família e aos meus amigos por sempre mandarem energias positivas.

Ao meu namorado pelo carinho e incentivo.

Aos meus orientadores Cristiano Fernandes e Roberto Westenberger pela dedicação, atenção e parceria no desenvolvimento do trabalho.

À Fernanda Chaves pelas oportunidades e sugestão do tema.

À Beatriz Mendes pela atenção e ensinamentos imprescindíveis para a conclusão do trabalho.

Aos membros da banca cujas sugestões foram muito importantes no aprimoramento do trabalho.

Aos colegas da PUC-Rio pelo companheirismo e amizade durante o curso.

À Capes e à PUC-Rio pelos auxílios concedidos.

## Resumo

Cardoso, Petrusca Arrieiro; Fernandes, Cristiano; Westenberger, Roberto. **Uma metodologia para estimação do capital econômico: incorporação de dependência entre riscos via cópulas**. Rio de Janeiro, 2008. 122p. Dissertação de Mestrado – Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Órgãos reguladores internacionais dos setores bancário e securitário têm incentivado a adoção de modelos internos, em apoio ao gerenciamento de riscos, para a determinação de capital mínimo regulatório. A maioria dos modelos pode ser decomposta em sub-modelos de determinação de capital para cada tipo de risco que a companhia está exposta. O capital requerido total será a agregação desses capitais individuais. Os riscos de uma companhia podem ter uma interdependência, em geral, não linear, impossibilitando a soma direta desses capitais. Um dos grandes desafios da modelagem é identificar, mensurar e incorporar essas dependências. A teoria de cópulas tem se mostrado uma ferramenta eficaz para agregação dos capitais uma vez que incorpora as estruturas de dependência dos riscos modelados na estimação do capital mínimo. Esta dissertação apresenta uma discussão geral sobre metodologias de mensuração de dependência entre riscos. Estes conceitos são utilizados, no final da dissertação, para a estimação do capital econômico de uma companhia de seguros. Como a cópula nos permite separar os efeitos das estruturas de dependência das características peculiares às distribuições marginais, é possível explorar o impacto das dependências dos riscos no capital requerido total. A sensibilidade do capital econômico diante do ajuste das cópulas é investigada. As medidas de risco utilizadas para determinar o capital foram o *Value at Risk* e o *Condiciona Value at Risk*.

## Palavras-chave

risco de subscrição; modelo interno, cópulas; capital econômico; dependência entre riscos; mensuração de riscos; *VaR*; *CVaR*.

## Abstract

Cardoso, Petrusca Arrieiro; Fernandes, Cristiano; Westenberger, Roberto. **A methodology for the estimation of economic capital: incorporating dependence between risks via copulas**. Rio de Janeiro, 2008. 122p. Dissertação de Mestrado – Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Financial regulatory agencies have been encouraging the adoption, in risk management practices, of internal models in order to determinate the regulatory minimum capital. Most of the models can be decomposed in minor capital models, each associated to a particular risk source to which that the company is exposed. The regulatory capital will be the aggregation of these individual capitals. The companies' risks may have non-linear dependencies which prevent the sum of the individual capitals. One of the greatest challenges of this modeling process is to identify, measure and incorporate the dependencies amongst the several risk sources. The relatively recent copula theory has been shown to offer an effective tool for the aggregation of capitals, by duly capturing and incorporating the dependence of the several risks sources when estimating the minimum capital. This dissertation presents a general discussion about a dependence measurement methodology between risks. This is then applied, at the end of dissertation, to the estimation of the economic capital of an insurance company. Since copulas allow us to separate the effects of the structure dependence to the peculiar characteristics of the marginal distribution, it is possible to explore the impact of dependencies of risks on the total economic capital. The sensitivities of the economic capital are investigated. The risks measures used to determinate the capital were the Value at Risk and Conditional Value at Risk.

## Keywords

underwriting risk; internal models; copulas; economic capital; dependent risks; risk measures; VaR; CvaR.

# Sumário

1 INTRODUÇÃO	12
2 MODELO INTERNO	17
2.1. O que é um modelo	17
2.2. Considerações importantes na construção de um modelo	18
2.3. Modelo interno de determinação de capital econômico de uma instituição financeira	19
2.4. Análise financeira dinâmica	26
3 MENSURAÇÃO DE RISCOS	30
3.1. Preliminares	30
3.2. Medidas de Risco	31
3.3. Medida de risco coerente	32
3.4. Medida de risco convexo	37
3.5. Valor em risco - $VaR$	37
3.6. Valor em risco na cauda - $TVaR$	39
3.7. Esperança condicional da cauda - $CTE$	40
3.8. Valor em risco condicional – $CVaR$	41
3.9. Princípio do prêmio coerente	41
3.10. Probabilidade de ruína	41
3.11. Custo econômico da ruína	43
4 CÓPULAS	45
4.1. Introdução a cópulas	45
4.2. Propriedades básicas	46
4.3. Proposições elementares	46
4.4. Demais propriedades	47
4.5. Distribuições condicionais derivadas de cópulas	52
4.6. Densidade de probabilidade associada a cópulas	53



4.7. Tipos de cópulas	54
5 DEPENDÊNCIA ENTRE RISCOS	58
5.1. Introdução à dependência entre variáveis	58
5.2. Mensurando dependência positiva	59
5.3. Coeficiente de correlação linear de Pearson	59
5.4. Medidas de concordância	62
5.5. Propriedades de dependência	68
5.6. Medidas de dependência	74
5.7. Dependência na cauda	75
6 METODOLOGIA DE CÁLCULO DO CAPITAL ECONÔMICO	77
6.1. Procedimento de determinação de capital econômico	79
6.2. Simulação	89
6.3. Extensão da metodologia de determinação do capital econômico incorporando autocorrelação das séries temporais	101
7 CONCLUSÃO	107
8 BIBLIOGRAFIA	110
APÊNDICE I - INVERSA GENERALIZADA	115
APÊNDICE II - TESTES DE ESTACIONARIEDADE	116

## Lista de figuras

Figura 1: Linha do tempo do risco de subscrição	13
Figura 2: Estrutura de um Modelo Interno	15
Figura 3: Probabilidade de Ruína	42
Figura 4: ECOR e Probabilidade de Ruína	44
Figura 5: Procedimento de cálculo do capital econômico	78
Figura 6: Cópulas Gaussiana e Gumbel construídas a partir das mesmas marginais e distribuições com mesmo coeficiente de correlação	84
Figura 7: Dados transformados de seguros de automóveis versus dados transformados de seguros de pessoas.	87
Figura 8: Sinistros históricos de cinco classes de seguros de uma companhia italiana de ramos elementares.	90
Figura 9: Sinistralidades calculadas para cinco classes de seguros de uma companhia italiana de ramos elementares.	90
Figura 10: Cópula Independente	95
Figura 11: Cópula Gaussiana	95
Figura 12: Cópula t-Student com 3 graus de liberdade	96
Figura 13: Cópula t-Student com 10 graus de liberdade	96
Figura 14: Cópula Cauchy	97
Figura 15: Distribuição das sinistralidades agregadas	98
Figura 16: Correlogramas das classes de seguros	117

## Lista de tabelas

Tabela 1: Causas Primárias de Insolvência – USA	13
Tabela 2: Distribuições e parâmetros das sinistralidades selecionadas	91
Tabela 3: Matriz de Correlação de Kendall\Linear selecionada	93
Tabela 4: Coeficientes de dependência na cauda	93
Tabela 5: Estatísticas de Cópulas com correlação de Kendall	99
Tabela 6: Medidas de risco	99
Tabela 7: Variações do capital econômico em função do ajuste das cópulas	100
Tabela 8: Estatísticas de teste <i>PP</i>	116