6
Inversão de orientação

Agora só nos resta considerar o caso de difeomorfismos que invertem orientação. Queremos mostrar que se um difeomorfismo deste tipo é C^1-estruturalmente-estável então ele é Morse-Smale, e que estes são densos em $\mathrm{Diff}^1_-(S^1)$. Tudo que precisamos mostrar é que podemos tornar os pontos fixos de f em pontos fixos hiperbólicos. Uma vez feito isso, todo o resto se enquadra perfeitamente no que já fizemos até aqui.

Proposição 6.1 *Seja $f \in \mathit{Diff}^1_-(S^1)$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma perturbação C^1-ϵ-próxima à f cujos pontos fixos são hiperbólicos.*

Prova. f possui necessariamente dois (e únicos) pontos fixos. Observe que a aplicação f não pode tangenciar a identidade, pois suas derivadas são negativas. Logo, os pontos fixos de f são atratores ou repulsores (fracos ou não, dependendo da hiperbolicidade). Como f^2 é um difeomorfismo que preserva orientação e tem pontos fixos, todo ponto periódico (exceto os dois pontos fixos) tem período 2.

Suponha que um dos pontos fixos p é não-hiperbólico. Conside a aplicação: $f_1(x) = f(p-x) - p$. Essa aplicação preserva orientação, e tem um ponto fixo não-hiperbólico em zero. Observe que pelo o que vimos anteriormente, existe uma perturbação local f_2 C^1-$(\epsilon/2)$-próxima à f_1 tal que zero é um ponto ponto fixo hiperbólico (veja proposição 5.3 para o caso de pontos atratores ou repulsores fracos). Agora defina $f_3(x) = f_2(p-x) + p$. Logo, f_3 será C^1-ϵ-próxima à f, e p é um ponto fixo hiperbólico. Repita a mesma coisa para o outro ponto fixo de f caso este seja também não-hiperbólico. Obtemos então uma aplicação que inverte orientação cujos pontos fixos são hiperbólicos e C^1-ϵ-próxima à f (chamaremos ainda esta aplicação de f_3).

Uma vez que temos f_3 com estas propriedades, as demonstrações se tornam idênticas às vistas anteriormente. Como exemlplo, vamos mostrar que existe uma perturbação de f sem nenhum intervalo de pontos periódicos.

Seja $B = \{I_1, I_2, ...\}$ o conjunto de todos intervalos de pontos periódicos de f_3, sendo eles mutuamente disjuntos. Como os pontos fixos de f_3 são hiperbólicos, temos que $f_3(I_k) \cap I_k = \emptyset$ para todo $k \in \{0, 1, 2, ...\}$. Do contrário, como os intervalos são mutuamente disjuntos, teríamos que ter

$f(I_k) = (I_k)$, e portanto existiria um ponto fixo em I_k. Mas os pontos fixos de f_3 são hiperbólicos, e portanto não podem estar contido em tal intervalo. Agora um argumento idêntico ao feito na proposição 4.7 nos permite concluir que existe uma perturbação C^1-ϵ-próxima à f_3 sem nenhum intervalo de pontos de período 2. Relembrando, o que faremos é, para cada I_k, alteramos a função f_3 no intervalo $f(I_k)$ com uma bump function de forma a destruir a periodicidade dos pontos. Podemos fazer isso para cada $k \in \{1, 2, ...\}$ tomando cada vez uma perturbação C^1-(ϵ/k) proxima à f_3 de forma a garantirmos uma convergencia uniforme. Em suma, conseguimos uma perturbação, digamos $\tilde{f}$, arbitrariamente próxima à f_3, e tal que $Per(\tilde{f})$ tem interior vazio.

Vale observar que toda perturbação que precisarmos fazer em f_3 será "longe" dos pontos fixos, já que estes já são hiperbólicos. De forma geral, sempre que quisermos perturbar um ponto periódico não-hiperbólico p (de período 2) de f_3^2, tomamos uma vizinhança apropriada $U \ni p$ (de forma a não intersectar nenhum ponto fixo, não intersectar seu iterado $f_3(U)$ e que $f_3^2(U)$ seja C^1-próxima da identidade), e fazemos a perturbação desejada apenas no intervalo $f_3(U)$ usando um dos artifícios vistos para o caso de difeomorfismos que preservam orientação. Não repetiremos tais demonstrações pois elas são essencialmente as mesmas.