

5

Densidade dos difeomorfismos Morse-Smale

Neste capítulo será demonstrada a densidade dos difeomorfismos Morse-Smale no conjunto dos difeomorfismos C^1 do círculo que preservam orientação, com relação a topologia dada pela distância C^1 definida no capítulo 2. O caso de inversão de orientação será discutido no capítulo 6. Como os Morse-Smale são estruturalmente estáveis, segue que o conjunto de difeomorfismos Morse-Smale é também um aberto em $\text{Diff}(S^1)$.

Iniciaremos provando que os difeomorfismos Morse-Smale com pontos fixos são densos no conjunto de difeomorfismos C^1 do círculo que possuem pontos fixos. Para isso, teremos que mostrar que próximo a qualquer difeomorfismo do círculo existe um difeomorfismo Morse-Smale. Isto será feito em varias etapas. Primeiramente mostraremos que podemos obter uma perturbação arbitrariamente pequena com apenas uma quantidade finita de pontos fixos não-hiperbólicos. Em seguida, mostraremos que podemos perturbar novamente de forma a garantir a existência de apenas uma quantidade finita de pontos fixos. E finalmente, com mais uma perturbação tornamos todos estes pontos fixos em pontos fixos hiperbólicos. Como todas estas perturbações são arbitrariamente pequenas, obteremos um Morse-Smale tão próximo de nossa função original quanto se queira.

Proposição 5.1 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ com uma infinidade de pontos fixos. Dado $\epsilon > 0$ podemos obter uma perturbação C^1 - ϵ -próxima de f possuindo apenas uma quantidade finita de pontos fixos não-hiperbólicos.*

Prova. Seja $S = \{x \in S^1 \mid x \text{ é ponto fixo não-hiperbólico}\}$ e suponha que S é um conjunto infinito. S é um conjunto compacto: É limitado pois está contido em S^1 e é fechado pois todo ponto de acumulação de S tem que ser ponto fixo (pela continuidade de f) e não-hiperbólico (pela continuidade de f'). Para cada ponto $w \in S$ considere o intervalo $I_w = (w - \epsilon_w, w + \epsilon_w)$ onde $\epsilon_w > 0$ é suficientemente pequeno para que f seja C^1 -($\epsilon/2$)-próxima da identidade em I_w . Assim, temos uma cobertura de S por abertos, dada por $B = \{I_w \mid w \in S\}$. Como S é compacto, existe uma subcobertura finita. Isto

é, existe $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\} \subset S$ tal que $S \subset \bigcup_{i=1}^k I_{w_i}$. Podemos escrever esta união como uma união disjunta de abertos:

$$\bigcup_{i=1}^k I_{w_i} = \bigcup_{r=1}^t J_r$$

Onde $J_r = (a_r, b_r)$, $r = 1, \dots, t$, são mutuamente disjuntos.

Para cada $r \in \{1, \dots, t\}$, considere os valores $\alpha_r = \inf\{|w - a_r|, w \in J_r \cap S\}$ e $\beta_r = \inf\{|w - b_r|, w \in J_r \cap S\}$. Pela compacidade do conjunto S , podemos afirmar que estes valores são atingidos em S . Isto é, para cada $r \in \{1, \dots, t\}$, existem $c_r, d_r \in J_r \cap S$ tais que $\alpha_r = |c_r - a_r|$ e $\beta_r = |d_r - a_r|$. Agora defina $\tilde{f} : S^1 \rightarrow S^1$ por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \bigcup_{r=1}^t [c_r, d_r] \\ f(x) & \text{se } x \notin \bigcup_{r=1}^t [c_r, d_r] \end{cases}$$

Como para cada $r \in \{1, \dots, t\}$ c_r e d_r são pontos fixos não-hiperbólicos, não temos problemas de continuidade para f e nem para f' . Por construção, $\tilde{f}$ será C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à f , e todo ponto fixo não-hiperbólico estará contido em um dos intervalos de pontos fixos de $\tilde{f}$. Observe ainda que podemos ter $c_r = d_r$ para algum r , e neste caso c_r é um ponto fixo não-hiperbólico isolado. Agora usamos a proposição 4.2 para cada intervalo não degenerado da forma $[c_r, d_r]$ (existe uma quantidade finita deles), para obtermos uma função C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima à $\tilde{f}$ que possui apenas uma quantidade finita de pontos fixos não-hiperbólicos (que serão os pontos c_r e d_r com $r \in \{1, \dots, t\}$). Tal função será portanto C^1 - ϵ -próxima à f .

Proposição 5.2 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ com uma infinidade de pontos fixos. Dado $\epsilon > 0$ podemos obter uma perturbação C^1 - ϵ -próxima de f que possui apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos fixos.*

Demonstração: Pela proposição anterior, existe uma perturbação g C^1 - $(\epsilon/2)$ -próxima de f que possui apenas uma quantidade finita de pontos fixos não-hiperbólicos. Como pontos fixos hiperbólicos são isolados, todo ponto de acumulação de $\text{Fix}(g)$ tem que ser não-hiperbólico. Seja p um ponto de acumulação de $\text{Fix}(g)$ acumulado pela esquerda (o resultado segue de forma análoga para acumulação à direita). Então existe um intervalo não-degenerado $[a, p]$ satisfazendo:

$$|g(x) - x| < \epsilon/8 \quad \text{para todo } x \in [a, p]$$

$$|g'(x) - 1| < \epsilon/8 \quad \text{para todo } x \in [a, p]$$

Podemos assumir $g(a) < a$ e $g'(a) = 1$, pois entre dois pontos fixos consecutivos tem que existir um ponto cuja derivada é 1 (em decorrência do TVM).

Seja $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ uma bump function satisfazendo:

1. $0 < \phi(x) \leq \epsilon/4$ para todo $x \in (a, p)$.
2. $\phi(x) = 0$ para todo $x \notin (a, p)$.
3. $\int_a^p \phi(x) dx = a - g(a)$.

Defina $\tilde{g} : S^1 \rightarrow S^1$, dado por:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \notin [a, p] \\ x + g(a) - a + \int_a^x \phi(x) dx & \text{se } x \in [a, p] \end{cases}$$

Observe que não temos problemas de continuidade:

$$\tilde{g}(a) = a + g(a) - a + \int_a^a \phi(x) dx = g(a)$$

$$\tilde{g}(p) = p + g(a) - a + (a - g(a)) = p$$

$$\tilde{g}'(a) = 1 - \phi(a) = 1$$

$$\tilde{g}'(p) = 1 - \phi(p) = 1$$

Resta verificar a C^1 -($\epsilon/2$)-proximidade. Vamos verificar apenas no intervalo $[a, p]$, onde alteramos a função:

$$|\tilde{g}(x) - g(x)| = |g(a) - a - g(x) + x + \int_a^x \phi(x) dx|$$

$$\leq |g(a) - a| + |g(x) - x| + |g(a) - a| \leq \epsilon/2$$

$$|\tilde{g}'(x) - g'(x)| = |1 + \phi(x) - g'(x)| \leq |1 - g'(x)| + |\phi(x)| \leq \epsilon/2$$

Sendo $\tilde{g}$ C^1 -($\epsilon/2$)-próxima à g , temos que $\tilde{g}$ é C^1 - ϵ -próxima à f . Observe $\tilde{g}$ não tem pontos fixos em (a, p) pois $|\tilde{g}(x) - x| \geq |g(a) - a + \int_a^x \phi(x) dx| > 0$ para todo $x \in (a, p)$. Agora apliquemos este resultado à direita e à esquerda de cada ponto que é acumulado por pontos fixos (sabemos que são finitos, pois são pontos fixos não-hiperbólicos), resultando em uma função com apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos fixos.

Proposição 5.3 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ possuindo apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos fixos. Existe um difeomorfismo $\tilde{f}$, que é C^1 - ϵ -próximo de f , tal que $\tilde{f}$ possui pontos fixos, todos eles hiperbólicos.*

Prova. Se f possui todos os pontos fixos hiperbólicos, nada há para demonstrar. Vamos considerar então que f tem um ponto fixo p com $f'(p) = 1$. Como esse ponto é isolado existem 3 possibilidades: p é um atrator fraco, p é repulsor fraco ou p é atrator por um lado e repulsor pelo outro. Vamos analisar caso a caso:

1. p é atrator fraco:

Existe então $\delta > 0$ tal que se $|x - p| < \delta$ então $|f(x) - p| < |x - p|$. Seja ϕ uma bump function no intervalo $I = (p - \delta, p + \delta)$ com $\phi(p) = 1$. Seja $M > 1$ tal que $|\phi'(x)| \leq M$ para todo $x \in S^1$, e seja $\epsilon' < \epsilon/M$. Definimos então $\tilde{f}$ como:

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \epsilon' \phi(x) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi(x - p)}{\delta} \right)$$

Temos então $\tilde{f}(p) = p$. Observe ainda que:

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi(x - p)}{\delta} \right) < 0 \quad \text{para todo} \quad x \in (p - \delta, p)$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi(x - p)}{\delta} \right) > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in (p, p + \delta)$$

Logo,

$$\tilde{f}(x) - x > f(x) - x > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in (p - \delta, p)$$

$$\tilde{f}(x) - x < f(x) - x < 0 \quad \text{para todo} \quad x \in (p, p + \delta)$$

Assim, p é o único ponto fixo de $\tilde{f}$ no intervalo I . Além disso, segue da definição de $\tilde{f}$ que $\tilde{f}'(p) = 1 - \frac{\pi\epsilon'}{\delta}$. Portanto, escolhendo ϵ suficientemente pequeno, p é um ponto fixo hiperbólico.

2. p é repulsor fraco:

Neste caso, temos que p é atrator fraco para f^{-1} . Aplicamos o que foi feito no primeiro caso à função $g = f^{-1}$, obtendo uma função $\tilde{g}$. Tomamos então $\tilde{f} = \tilde{g}^{-1}$.

3. p é atrator por um lado e repulsor pelo outro:

Vamos considerar apenas o caso de repulsão pela esquerda e atração pela direita (o outro segue de forma análoga).

Sendo assim existe $\delta > 0$ tal que $f(x) - x < 0$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta) \setminus \{p\}$.

Considere a função dada por:

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \epsilon' \phi(x)$$

Onde $\phi(x)$ e ϵ' são tais como descritos anteriormente.

Temos então $\tilde{f}(x) - x < 0$ para todo $x \in (p - \delta, p + \delta)$. Logo, $\tilde{f}$ não possui pontos fixos neste intervalo.

O que foi feito até aqui pode ser repetido para cada um dos pontos fixos não-hiperbólicos da função f (que é uma quantidade finita). Observe no entanto que pode acontecer de todos os pontos fixos de f serem atrator-repulsores fracos, e portanto se fizermos um “descolamento” em cada um dos pontos fixos resultaria em uma função sem nenhum ponto fixo. Queremos evitar este caso. Se for este o caso, considere a função $g(x) = f(x) + \alpha$, onde $0 < \alpha < \epsilon/4$ é suficientemente pequeno para que g corte o gráfico da identidade (isto é, existe um levantamento G de g tal que $G(x) - x$ assume valores positivos e negativos). Seja $\epsilon' < \epsilon/4$ suficientemente pequeno para que toda função C^1 - ϵ' -próxima a g também corte a identidade. Pelas proposições anteriores, existe uma função h C^1 - ϵ' -próxima a g com uma quantidade finita (e positiva) de pontos fixos. Agora aplique os artifícios anteriores a aplicação h e com $\epsilon/2$ -proximidade (repare que h possui pontos que se enquadram nos itens 1 e 2 e que h é C^1 - $\epsilon/2$ -próxima a f), obtendo como resultado uma função que é C^1 - $\epsilon/2$ -próxima de h (e portanto C^1 - ϵ -próxima a f) com as propriedades desejadas.

Isso conclui a prova de que os Morse-Smale com pontos fixos são densos no conjunto de difeomorfismos com pontos fixos. Repetiremos agora as mesmas idéias para estender os resultados para o caso de difeomorfismos quaisquer do círculo (que não possuem necessariamente pontos fixos). Observe que precisamos apenas considerar difeomorfismos que possuem pontos periódicos, pois o *Closing-Lemma* nos garante que eles são densos no conjunto de difeomorfismos C^1 de S^1 . Para tanto será útil a seguinte proposição.

Proposição 5.4 *Se p é um ponto periódico não-hiperbólico de período $n > 1$ de um difeomorfismo f , então $f^k(p)$ é um ponto periódico não-hiperbólico (de período n) para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Prova. Seja p um ponto periódico de período n . Basta mostrar que $(f^n)'(f(p)) = (f^n)'(p)$. Pela regra da cadeia, temos:

$$(f^n)'(f(p)) = (f \circ f^{n-1})'(f(p)) = f'(f^{n-1}(f(p))).(f^{n-1})'(f(p))$$

Mas $f^{n-1}(f(p)) = f^n(p) = p$, pois p é periódico de período n . Então:

$$(f^n)'(f(p)) = f'(p).(f^{n-1})'(f(p)) \quad (1)$$

Aplicando agora a regra da cadeia à $(f^n)'(p)$, temos:

$$(f^n)'(p) = (f^{n-1} \circ f)'(p) = (f^{n-1})'(f(p)).f'(p) \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos $(f^n)'(f(p)) = (f^n)'(p)$. Portanto $f(p)$ é não-hiperbólico se e somente se p é não-hiperbólico.

Tal como feito no capítulo anterior, repetiremos passo a passo a demonstração feita para pontos fixos, adaptando-as para o caso de pontos periódicos.

Proposição 5.5 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ com uma infinidade de pontos periódicos. Dado $\epsilon > 0$ podemos obter uma perturbação C^1 - ϵ -próxima de f que possui apenas uma quantidade finita de pontos periódicos não-hiperbólicos.*

Prova. Seja $S = \{x \in S^1 \mid x \text{ é ponto periódico não-hiperbólico}\}$. S é um conjunto compacto: É limitado pois está contido em S^1 e é fechado pois todo ponto de acumulação de S tem que ser ponto periódico (pela continuidade de f^n) e não-hiperbólico (pela continuidade de $(f^n)'$). Para cada ponto $w \in S$ considere o intervalo $I_w = (w - \epsilon_w, w + \epsilon_w)$ onde $\epsilon_w > 0$ é suficientemente pequeno para que em I_w f^n seja C^1 -($\epsilon/2$)-próxima da identidade, f^{-n+1} seja C^1 -($\epsilon/2$)-próxima de f e $f^k(I_w)$ com $k \in \{0, \dots, n-1\}$ sejam mutuamente disjuntos. Assim, temos uma cobertura de S por abertos, dada por $B = \{I_w \mid w \in S\}$. Como S é compacto, existe uma subcobertura finita. Isto é, existem $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\} \subset S$ tal que $S \subset \bigcup_{i=1}^k I_{w_i}$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ defina $J_i \subset I_{w_i}$ como o menor intervalo contendo todos os pontos não-hiperbólicos de I_{w_i} . Segue da compacidade de S que J_i é um intervalo fechado cujos extremos são pontos não-hiperbólicos, e $S \subset \bigcup_{i=1}^k J_i$.

Defina $f_1 : S^1 \rightarrow S^1$ dado por:

$$f_1(x) = \begin{cases} f^{-n+1}(x) & \text{se } x \in f^{n-1}(J_1) \\ f(x) & \text{se } x \notin f^{n-1}(J_1) \end{cases}$$

Vamos verificar a continuidade de f_1 . Denotando $J_1 = (a_1, b_1)$, sabemos que a_1 e b_1 são pontos periódicos não-hiperbólicos. Logo:

$$f_1(a_1) = f^{-n+1}(a_1) = f(f^{-n}(a_1)) = f(a_1)$$

$$f'(a_1) = (f \circ f^{-n})'(a_1) = f'(f^{-n}(a_1)) \cdot (f^{-n})'(a_1) = f'(a_1)$$

De forma análoga, vale para o ponto b_1 . Por construção temos também que f_1 é C^1 -($\epsilon/2$)-próxima de f .

Observe que da forma como definimos J_i , temos que $\{f^k(J_i)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ são mutuamente disjuntos para qualquer escolha de $i \in \{1, \dots, k\}$. Assim, para todo $x \in J_1$:

$$f_1^n(x) = f_1(f^{n-1}(x)) = x$$

Logo J_1 é um intervalo de pontos periódicos de f_1 .

Observe que não criamos nem destruimos nenhum ponto periódico não-hiperbólico fora do conjunto $\bigcup_{i=1}^k f^k(J_1)$, e esta união é constituída somente por pontos periódicos não-hiperbólicos de f_1 (pela proposição 5.4). Sendo assim os pontos periódicos não-hiperbólicos de J_2 (referentes a f) são ainda pontos periódicos não-hiperbólicos de f_1 . Agora defina $f_2 : S^1 \rightarrow S^1$ dado por:

$$f_2(x) = \begin{cases} f^{-n+1}(x) & \text{se } x \in f^{n-1}(J_2 \setminus J_1) \\ f_1(x) & \text{se } x \notin f^{n-1}(J_2 \setminus J_1) \end{cases}$$

Em seguida defina $f_3, f_4, \dots, f_k$ de forma análoga:

$$f_k(x) = \begin{cases} f^{-n+1}(x) & \text{se } x \in f^{n-1}(J_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} J_i) \\ f_{k-1}(x) & \text{se } x \notin f^{n-1}(J_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} J_i) \end{cases}$$

A continuidade e a C^1 -($\epsilon/2$)-proximidade à f são verificadas de forma análoga a feita para f_1 . Observe que em cada passo alteramos um intervalo disjunto do anterior, e portanto no final a distância C^1 é ainda $\epsilon/2$.

Da forma como construímos a aplicação f_k , ela possui as seguintes propriedades:

1. f_k possui apenas uma quantidade finita de intervalos de pontos periódicos.
2. Não existem pontos periódicos não-hiperbólicos fora destes intervalos.

3. f_k é C^1 -($\epsilon/2$)-próxima à f .

Agora aplicamos a proposição 4.7 e obtemos uma aplicação $\tilde{f}$ C^1 -($\epsilon/2$)-próxima à f_k , onde eliminamos todos os pontos periódicos no interior de cada intervalo de pontos periódicos. Tal função será C^1 - ϵ -próxima à f e terá apenas uma quantidade finita de pontos periódicos não-hiperbólicos (os extremos dos intervalos).

Proposição 5.6 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$ com uma infinidade de pontos periódicos. Dado $\epsilon > 0$ podemos obter uma perturbação C^1 - ϵ -próxima de f que possui uma quantidade finita (e positiva) de pontos periódicos.*

Prova. Pela proposição anterior, existe uma perturbação g C^1 -($\epsilon/2$)-próxima de f que possui apenas uma quantidade finita de pontos periódicos não-hiperbólicos. Como pontos periódicos hiperbólicos são isolados, todo ponto de acumulação de $\text{Per}(g)$ tem que ser não-hiperbólico. Seja p é um ponto de acumulação de $\text{Per}(g)$ acumulado pela esquerda (o resultado segue de forma análoga para acumulação à direita). Considere o intervalo $I = [q, p]$, onde q é um ponto periódico de g tal que $\{g^k(I)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ sejam mutuamente disjuntos. Pela proposição 5.2, dado $\epsilon' > 0$, existe um ponto $a \in I$ e uma aplicação G C^1 - ϵ' -próxima à g^n tal que G não possui pontos periódicos em $[a, p]$. Considere a função $\tilde{g} : S^1 \rightarrow S^1$ dada por:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} G(g^{-n+1}(x)) & \text{se } x \in g^{n-1}(I) \\ g(x) & \text{se } x \notin g^{n-1}(I) \end{cases}$$

Observe que fora do intervalo $[a, p]$ temos $G = g^n$. Vamos verificar a continuidade:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(q) &= G(g^{-n+1}(q)) = g^n(g(q)) = g(q) \\ \tilde{g}'(q) &= G'(g^{-n+1}(q))(g^{-n+1})'(q) = G'(g^{-n+1}(q))(g^{-n+1})'(q) \\ &= (g^n)'(g^{-n+1}(q))(g^{-n+1})'(q) = g'(q) \end{aligned}$$

O cálculo é análogo para o ponto p .

Temos ainda para $x \in I$:

$$\tilde{g}^n(x) = \tilde{g}(g^{n-1}(x)) = G(x)$$

Logo em $g^{n-1}(I)$, $\tilde{g}$ não possui pontos periódicos.

Tomando ϵ' suficientemente pequeno teremos $G \circ g^{-n}$ suficientemente próximo da identidade para que $G(g^{-n+1})$ seja C^1 -($\epsilon/2$)-próximo de g .

Repetimos para cada ponto de acumulação esta perturbação obtendo uma aplicação C^1 -($\epsilon/2$)-próximo à $\tilde{g}$ que possui apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos periódicos. Tal aplicação será portanto C^1 - ϵ -próxima à f .

Proposição 5.7 *Seja $f \in \text{Diff}_+^1(S^1)$. Dado $\epsilon > 0$, existe uma perturbação $\tilde{f}$ C^1 - ϵ -próxima a f cujos pontos periódicos são todos hiperbólicos.*

Prova. Seja f_1 C^1 -($\epsilon/2$)-próxima à f e que possui apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos periódicos. Se f_1 não tiver pontos periódicos não-hiperbólicos, nada há para mostrar. Suponha então que p é um ponto periódico não-hiperbólico de f_1 . Seja $I = [p - \delta, p + \delta]$, sendo δ suficientemente pequeno para termos $\{f^k(I)\}_{k \in \{0, \dots, n-1\}}$ mutuamente disjuntos. Sendo p um ponto periódico isolado, existem três casos possíveis: p é atrator fraco, p é repulsor fraco ou p é atrator por um lado e repulsor pelo outro. Para todos os casos, considere ϕ uma bump function em I (isto é, $0 \leq \phi(x) \leq 1$ se $x \in I$, e $\phi(x) = 0$ se $x \notin I$). Seja $M > 1$ tal que $|\phi'(x)| \leq M$ para todo $x \in S^1$, e $\epsilon' < \epsilon/M$. Veremos agora os possíveis casos:

1. p é um atrator fraco:

Neste caso definimos $\tilde{f} : S^1 \rightarrow S^1$ dado por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f_1(x) - \epsilon' \cdot \phi(f_1^{n-1}(x)) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi(f_1^{n-1}(x) - p)}{\delta} \right) & \text{se } x \in f_1^{n-1}(I) \\ f_1(x) & \text{se } x \notin f_1^{n-1}(I) \end{cases}$$

Para $x \in I$ temos:

$$\tilde{f}_1^n(x) = \tilde{f}_1(f_1^{n-1}(x)) = f_1^n(x) - \epsilon' \cdot \phi(x) \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi(x - p)}{\delta} \right)$$

Segue da proposição 5.3 que $\tilde{f}$ possui apenas um ponto periódico em I , e este é hiperbólico. Escolhendo ϵ' suficientemente pequeno teremos $\tilde{f}$ C^1 -($\epsilon/2$)-próximo à f_1 , e portanto C^1 - ϵ -próximo à f .

2. p é repulsor fraco:

Considere f_1^{-1} , é aplique o item 1.

3. p é repulsor por um lado e atrator pelo outro:

Vamos considerar apenas o caso de repulsor-atrator fraco, o outro caso é análogo. Para este caso considere δ suficientemente pequeno para termos $f_1^n(x) - x < 0$ se $x \in I \setminus \{p\}$.

Defina $\tilde{f} : S^1 \rightarrow S^1$ dado por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f_1(x) - \epsilon' \cdot \phi(f_1^{n-1}(x)) & \text{se } x \in f_1^{n-1}(I) \\ f_1(x) & \text{se } x \notin f_1^{n-1}(I) \end{cases}$$

Teremos então para todo $x \in I$:

$$\tilde{f}^n(x) = \tilde{f}(f_1^{n-1}(x)) = f_1^n(x) - \epsilon' \cdot \phi(f_1^{n-1}(x))$$

Logo $\tilde{f}^n(x) - x < 0$ para todo $x \in I$. Portanto não teremos pontos periódicos neste intervalo. Se acontecer de todos os pontos periódicos de f_1 serem deste tipo, defina:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} f(x) + \epsilon' \cdot \phi(f^{n-1}(x)) & \text{se } x \in f^{n-1}(I) \\ f(x) & \text{se } x \notin f^{n-1}(I) \end{cases}$$

Agora considere g_1 C^1 -($\epsilon'/2$)-próxima à g com apenas uma quantidade finita (e positiva) de pontos periódicos. Recairemos então nos dois casos anteriores. Escolhendo ϵ' suficientemente pequeno, obteremos após as perturbações apropriadas uma aplicação C^1 -($\epsilon/2$)-próxima à g_1 . Tal aplicação será portanto C^1 - ϵ -próximo à f . Repetimos o mesmo artifício para cada ponto periódico de f_1 , resultando no final em uma aplicação cujos pontos periódicos são todos hiperbólicos.

Corolário 5.8 *O conjunto dos difeomorfismos C^1 Morse-Smale que preservam orientação é denso em $\text{Diff}_+^1(S^1)$.*