



**Luiz Felipe Nobili França**

**Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos  
Morse-Smale do Círculo**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Flavio Erthal Abdenur

Rio de Janeiro  
Março de 2008



**Luiz Felipe Nobili França**

**Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos  
Morse-Smale do Círculo**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. Flavio Erthal Abdenur**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Jairo da Silva Bochi**

PUC-Rio

**Prof. Lorenzo Justiniano Días Casado**

PUC-Rio

**Prof. Sérgio Bernardo Volchan**

PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 de Março de 2008

Todos os direitos reservados. proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Luiz Felipe Nobili França**

Graduou-se em Matemática (Bacharelado) pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ).

Ficha Catalográfica

Nobili, Felipe

Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos Morse-Smale do Círculo / Luiz Felipe Nobili França; orientador: Flavio Erthal Abdenur. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2008.

v., 60 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese.  
2. Morse-Smale. 3. Estabilidade estrutural. 4. Densidade. 5. Difeomorfismos do círculo. 6. Hiperbolicidade. I. Abdenur, Flavio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## Agradecimentos

Ao meu orientador Flavio Abdenur pelo incentivo e dedicação prestados ao longo destes anos.

Aos professores e funcionarios do departamento de Matemática pela assistência e boa vontade.

À CAPES e FAPERJ pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos colegas da PUC que me acompanharam nesta jornada e tornaram o ambiente de trabalho mais agradável.

## Resumo

Nobili, Felipe; Abdenur, Flavio. **Estabilidade e Densidade dos Difeomorfismos Morse-Smale do Círculo**. Rio de Janeiro, 2008. 60p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem como objetivo demonstrar que um difeomorfismo do círculo é Morse-Smale se, e somente se, ele é estruturalmente estável sob  $C^1$ -perturbações, e que o conjunto dos difeomorfismos Morse-Smale é denso no conjunto de todos os difeomorfismos  $C^1$  do círculo. Uma das preocupações presentes neste trabalho é a de apresentar as demonstrações e os conceitos da forma mais acessível possível, tendo como pré-requisitos apenas análise Real e noções básicas de topologia.

## Palavras-chave

Morse-Smale. Estabilidade estrutural. Densidade. Difeomorfismos do círculo. Hiperbolicidade.

## Abstract

Nobili, Felipe; Abdenur, Flavio. **Structural Stability and Density of Morse-Smale Circle Diffeomorphisms**. Rio de Janeiro, 2008. 60p. MsC Thesis — Departament of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main goal of this dissertation is to provide a self-contained proof that circle diffeomorphisms are Morse-Smale if and only if they are structurally stable in the  $C^1$  topology. Another interesting result proved here is that the set of Morse-Smale diffeomorphisms is dense in the set of all  $C^1$  diffeomorphisms of the circle. The presentation of the subject and proofs requires no more background than real analysis of functions of one variable and elementary topology.

## Keywords

Morse-Smale. Structural stability. Density. Circle diffeomorphisms. Hiperbolicity.

## Sumário

1	Introdução	8
1.1	Noções básicas	8
1.2	O círculo	11
2	Hiperbolicidade e estabilidade	21
3	Estabilidade dos Difeomorfismos Morse-Smale	30
4	Difeomorfismos estáveis são Morse-Smale	37
5	Densidade dos difeomorfismos Morse-Smale	47
6	Inversão de orientação	57
7	Considerações finais	59