

Joaquim Pedro de Vasconcelos Cordeiro

Simplex para Redes, Algoritmo e Implementação.

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. José Eugênio Leal

Rio de Janeiro
Setembro de 2008

Joaquim Pedro de Vasconcelos Cordeiro

Simplex para Redes, Algoritmo e Implementação.

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. José Eugenio Leal

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. Sílvio Hamacher

Departamento de Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. Márcio de Almeida D'agosto

Programa de Engenharia de Transportes – COPPE/UFRJ

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico-Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 19 de setembro de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Joaquim Pedro de Vasconcelos Cordeiro

Graduou-se em 2004 pela PUC-Rio em Engenharia Elétrica com ênfases em Telecomunicações e Sistemas de Apoio à Decisão. Atualmente trabalha na Superintendência de Regulação Econômica da Agência Nacional de Energia Elétrica – ANEEL.

Ficha Catalográfica

Cordeiro, Joaquim Pedro de Vasconcelos

Simplex para redes, algoritmo e implementação / Joaquim Pedro de Vasconcelos Cordeiro ; orientador: José Eugênio Leal. – 2008.

78 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Engenharia industrial – Teses. 2. Simplex para redes. 3. Fluxo de custo mínimo. 4. Programação linear. 5. Otimização. I. Leal, José Eugênio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

Aos meus pais, João Pedro e Anna pela confiança
e a Carmen pelo amor e pela paciência

Agradecimentos

Ao orientador, Prof José Eugenio Leal, pelo suporte e ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais a realização deste trabalho não seria possível

Aos professores da Banca Examinadora.

Aos professores e funcionários da PUC-Rio, por quase dez anos de convivência e de aprendizado.

Resumo

Cordeiro, Joaquim Pedro de Vasconcelos; Leal, José Eugênio. **Simplex para Redes, Algoritmo e Implementação**. Rio de Janeiro, 2008. 78p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho busca desenvolver o método Simplex para Redes na solução de problemas de Fluxo de Custo Mínimo. Este método consiste em uma adaptação do método Simplex primal em que são exploradas as características específicas da rede subjacente ao problema ao se buscar a solução ótima em um número finito de árvores geradoras. A árvore geradora ótima será obtida iterativamente através de sucessivas melhorias na estrutura de cada árvore formada. A maior eficiência do Simplex para Redes se dá tanto no menor número de iterações necessárias para se atingir o ótimo, quanto na maior velocidade destas iterações, trata-se, portanto, de um método bastante poderoso na resolução de problemas de Fluxo de Custo Mínimo. Serão, também, abordados aspectos práticos da implementação do algoritmo além da aplicação deste algoritmo implementado em VBA (Visual Basic for Applications) em um problema prático a título de exemplificação.

Palavras-Chave

Simplex para Redes, Fluxo de Custo Mínimo, Programação Linear, Otimização.

Abstract

Cordeiro, Joaquim Pedro de Vasconcelos; Leal, José Eugênio. **Network Simplex, Algorithm e Implementation**. Rio de Janeiro, 2008. 78p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Industrial, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro

The current work intends to develop a Network Simplex Method for solving Minimum Cost Flow problems. Such method consists of a primal Simplex Method adaptation in which specific characteristics of the network underlying the problem are investigated by searching for the optimal solution within a finite number of spanning trees. The optimal spanning tree is iteratively obtained through successive structure improvements in each formed tree. The higher efficiency of Network Simplex lies both in fewer iterations necessary to achieve the optimum and in the higher speed of these iterations. Therefore, it is a powerful method for solving Minimum Cost Flow Problems. Practical aspects of implementing the algorithm will be discussed, as well as the algorithm's implementation in VBA (Visual Basic for Applications) through a practical instance.

Keywords

Network Simplex, Minimum Cost Flow, Linear Programming, Optimization.

Sumário

1 Introdução	10
1.1. Motivação	10
1.2. Objetivos	11
1.3. Roteiro dos capítulos	12
1.4. Definições	12
2 O Problema do Fluxo de Custo Mínimo	15
2.1. O Problema de Transbordo	15
2.2. O Problema do Caminho Mais Curto	16
2.3. O Problema de Atribuição	17
2.4. O Problema de Transporte	18
3 Simplex Para Redes	21
3.1. Noções Iniciais	21
3.2. Solução livre de ciclos e solução como uma árvore geradora	21
3.3. A matriz de incidência nó-arco	23
3.4. Uma revisão de álgebra linear	25
3.4.1. Independência linear	25
3.4.2. Matriz não singular	26
3.4.3. Rank de uma matriz	26
3.5. Rank da matriz de incidência nó-arco	26
3.6. Variável Artificial	27
3.7. Solução inicial	29
3.8. Representação da estrutura de árvore geradora	32
3.9. Variáveis Duais e Potenciais dos nós	32
3.10. Otimalidade	35
3.11. Índices da árvore	38
3.11.1. Predecessor	38
3.11.2. Profundidade	38
3.11.3. Caminho	39
3.12. Funcionamento do algoritmo simplex para redes	40
3.13. Selecionando o arco entrante.	41
3.13.1. Regra de Dantzig	41
3.13.2. Primeiro Candidato	42
3.13.3. Precificação Parcial	42
3.13.4. Precificação por Clusters	42
3.13.5. Precificação Normalizada	42
3.13.6. Precificação Múltipla	43
3.14. Selecionando o arco que sai.	44
3.15. Atualizando a árvore	48

3.15.1. Atualização dos potenciais dos nós	48
3.15.2. Atualização dos índices caminho.	51
3.15.3. Atualização das profundidades	52
3.15.4. Atualização dos predecessores	53
3.16. Algoritmo	54
3.17. Degenerescência	54
3.18. Árvores Geradoras Fortemente Factíveis	55
 4 Implementação	 57
4.1. Estrutura de Dados	57
4.2. Árvore Geradora	57
4.2.1. A Classe <i>Nó</i> .	58
4.2.2. A Classe <i>Arco</i> .	59
4.3. Os Conjuntos S	60
4.4. Atualização dos índices da árvore	61
4.4.1. Atualização dos índices caminho.	63
4.4.2. Atualização dos índices profundidade.	64
4.4.3. Atualização dos índices predecessor.	65
4.5. O Programa	66
4.5.1. Dados de Entrada	66
4.5.2. Saída	68
4.6. Um Exemplo: O escoamento da produção nacional de açúcar.	69
 5 Conclusões	 73
 6 Bibliografia	 75