3
Principais padrões estocásticos do comportamento de preços de commodities

Esse capítulo destina-se a apresentar os conceitos e propriedades básicas acerca dos principais modelos estocásticos descritos na literatura, pelos quais os preços de commodity podem comportar-se. Tais conceitos são de fundamental importância para o entendimento da modelagem empregada mais adiante.

Processos Estocásticos

Um processo estocástico pode ser definido como uma variável que evolui ao longo do tempo de maneira aleatória e imprevisível. Mais formalmente, em Dixit e Pindyck (1994), um processo estocástico é apresentado através de uma lei de probabilidade para a evolução X_t de uma variável X em um tempo t. Ou seja, dados os tempos $t_1 < t_2 < t_3$, etc., é possível calcular a probabilidade correspondente aos valores X_1, X_2, X_3, etc., estarem em um intervalo específico, por exemplo:

$$\text{Prob}\ (a_1 < X_1 \leq b_1,\ a_2 < X_2 \leq b_2,\ \ldots)$$

Dessa forma, no tempo t_1 é observado o valor atual X_1, e com essa informação é possível calcular a probabilidade de eventos futuros condicionados a ela.

Matematicamente, pode-se representar um processo estocástico X como uma família de variáveis, definidas em um mesmo espaço de probabilidades Ω, de acordo com a equação a seguir:

$$X=\{X_t\,(\omega),\ t \in T,\ \omega \in \Omega\}$$

O valor de X é uma função de dois argumentos, sendo associado tanto ao instante de tempo t quanto a possíveis realizações ω. Logo, para um instante de tempo t fixo, a variável aleatória é:

$$X_t=X_t(\omega),\ \omega \in \Omega,$$

com uma distribuição de probabilidades[2].

Por outro lado, para um determinado estado da natureza, $\omega \in \Omega$, obtém-se uma função de t conforme a equação a seguir:

$$X_t=X_t(\omega),\ t \in T$$

Tal função é denominada realização ou trajetória do processo X, ou ainda, série temporal.

Um processo estocástico pode ser classificado em tempo discreto ou contínuo. Nos processos discretos as variáveis aleatórias podem ser apuradas somente em intervalos de tempos específicos, como no caso do consumo mensal do café. Enquanto que num processo contínuo, as mudanças das variáveis podem ocorrer a qualquer instante do tempo, por exemplo, o preço de um ativo financeiro. No entanto, na prática, muitas vezes os processos estocásticos em tempo contínuo são aproximados através de processos discretos pelo fato de simplificação em sua modelagem.

Essa classificação entre discreto e contínuo também se estende as variáveis aleatórias (espaço de estados). Assim se o processo estocástico for de variável discreta, então ele representa uma contagem; por outro lado, se a variável for contínua, logo ela pode assumir qualquer valor dentro de um determinado intervalo.

Os processos estocásticos podem ainda ser identificados de acordo com suas propriedades estatísticas em estacionários, quando a média e a variância da variável aleatória são mantidas constantes ao longo do tempo e a função de covariância depende apenas da distância entre os períodos, ou não-estacionários, caso contrário. Cabe ressaltar que embora existam outras definições de estacionariedade, aqui estão sendo considerados apenas os dois primeiros momentos da variável aleatória, visto que essa condição é mais fácil de ser verificada empiricamente.

[2] É possível que a função de densidade de probabilidade (fdp) no instante t_1 seja diferente da fdp no instante t_2, para dois instantes t_1 e t_2 quaisquer, mas a situação usual é aquela em que a fdp de Xt (ω) é a mesma para todo $t \in T$.

Outra maneira de encarar um processo estocástico X_t, é tê-lo como uma previsão $E[X_t]$ mais um erro dessa previsão, ou seja:

$$X_t = E[X_t] + erro_t,$$

e com isso faz-se necessário calcular para cada processo estocástico sua tendência (parcela do valor esperado) e sua volatilidade (parcela da incerteza).

A seguir serão apresentadas as diferentes formas que os processos estocásticos podem assumir quando se trata da análise do comportamento dos preços de commodity.

Processo de Markov

O processo de Markov é um tipo particular de processo estocástico, no qual apenas o valor corrente da variável é relevante para se prever o seu valor futuro. Em outras palavras, os valores históricos da variável já estão contidos no valor presente da mesma e, por isso, o caminho pelo qual a variável percorreu para atingir seu valor atual é irrelevante.

Sendo assim, um processo estocástico $X=\{X_t, t \in T\}$ é dito ser de Markov (ou markoviano), caso atenda a seguinte condição, conhecida por Propriedade Markoviana :

$$\text{Prob}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, ..., X_{t_n} = x_n) = \text{Prob}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n),$$

para quaisquer $t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1}$.

Essa propriedade é muito importante na análise de processos estocásticos, ao passo que permite simplificações consideráveis no cálculo das previsões de uma variável.

Comumente, assumem-se que preços de ativos em geral, sejam eles ações ou commodities, evoluem segundo um processo de Markov. De acordo com Hull (1999), tal fato é consistente com a forma fraca de eficiência de mercado, pela qual é estabelecido que o preço atual de uma ação reflete todas as informações históricas bem como as expectativas a respeito do preço futuro desta ação. Graças a essa hipótese, a obtenção de excesso de retorno através da análise técnica torna-se inviável.

Passeio Aleatório (Random Walk)

Um dos processos estocásticos mais comuns, o Passeio Aleatório trata-se de um processo de Markov em tempo discreto e estado discreto, no qual as sucessivas observações são independentes e relacionam-se conforme a seguinte equação:

$$X_{t+1}= X_t + \varepsilon_t,$$

onde:

X_{t+1} é o valor da variável no tempo *t+1*.

X_t é o valor da variável no tempo *t*.

ε_t é uma variável aleatória ruído branco (média zero, variância σ^2_ε, $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, $t \neq s$).

Através desse processo, assume-se que a variável aleatória apresenta um padrão de choques de crescimento e de decrescimento constantes de mesma probabilidade.

Desse modo, em um dado instante de tempo o valor do processo é resultado do período anterior, mais uma variável aleatória de média nula:

$$E[X_{t+1}|X_t] = E[X_t] + 0 = X_t$$

No entanto, o Passeio Aleatório pode evoluir-se de forma estacionária, ou não. No caso do comportamento apresentar um termo de crescimento de longo prazo (drift δ), será denominado Passeio Aleatório com tendência (Random Walk with drift), assumindo a seguinte forma:

$$X_{t+1}= X_t + \delta+\varepsilon_t$$

Outra generalização do processo seria considerar que o tamanho do salto em cada tempo t fosse uma variável aleatória contínua, por exemplo, uma distribuição normal com média zero e desvio padrão σ, nesse caso ter-se-ia um processo estocástico em tempo discreto e estado contínuo.

Passeios aleatórios têm grande importância em econometria e finanças, sendo a base para a teoria de apreçamento. Uma hipótese usual é que os preços de ativos financeiros sigam um Passeio Aleatório, ou seja,

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \sigma\ \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, 1)$$

E assim a distribuição condicional de P_t dado P_{t-1} é normal, com média μ e variância σ^2. Porém, este modelo é pouco realista, visto que preços terão probabilidade não-nula de serem negativos, portanto, costuma-se utilizar a transformação $p_t = \log(P_t)$, e o modelo fica:

$$\log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \mu + \sigma\ \varepsilon_t,$$

ou ainda com outra notação,

$$r_t = \mu + \sigma\ \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, 1),$$

em que r_t representa o log-retorno.

Este modelo supõe que a variância dos retornos seja constante. Uma hipótese mais realista é admitir que a variância (volatilidade) dos preços varie com o tempo, tais como os modelos heterocedásticos tão bem estabelecidos na literatura em Finanças, propostos inicialmente por Engle (1982).

Processo de Wiener

O Processo de Wiener, também chamado de Movimento Browniano Padrão, é um processo estocástico em tempo contínuo que satisfaz as seguintes propriedades:

- É um processo de Markov, visto que a distribuição de probabilidade para todos os valores futuros do processo depende apenas de seu valor corrente, mas independe da trajetória passada;
- Possui incrementos independentes no sentido que a variação ocorrida num intervalo de tempo Δt é independente da ocorrida em qualquer outro intervalo de tempo; e
- Os incrementos seguem uma distribuição Normal com parâmetros que dependem apenas do intervalo de tempo (incrementos estacionários).

Esse processo foi descrito pela primeira vez pelo botânico Robert Brown em 1827, após ter verificado o movimento de partículas de pólen submersas em água, como resultado dos sucessivos choques aleatórios de partículas vizinhas. Em 1900, Louis Bachelier observou que o mercado de ações tinha um aspecto visual muito semelhante ao movimento browniano. Cinco anos mais tarde, Albert Einstein propôs uma teoria matemática para esse processo, que foi desenvolvida mais rigorosamente em 1923 pelo matemático Norbert Wiener, e por isso faz menção ao seu nome.

Um Processo de Wiener pode ser ainda definido de uma maneira mais formal, isto é, seja Z(t) um processo de Wiener, então as seguintes propriedades são observadas:

- A relação entre a mudança em Z, ΔZ, correspondente a um intervalo Δt, pode ser descrita conforme a seguinte equação:

$$\Delta Z_t = \epsilon_t \sqrt{\Delta t}\ \text{, onde } \epsilon_t \sim N(0,1)$$

- A variável aleatória ϵ_t é serialmente descorrelacionada, ou seja, $E(\epsilon_t,\epsilon_s)=0$ para todo $t \neq s$. Conseqüentemente, os valores de ΔZ para quaisquer intervalos de tempo são independentes e assim Z(t) é um processo de Markov com incrementos independentes.

Da primeira propriedade, decorre que ΔZ é normalmente distribuído com média zero e variância Δt, o que significa que a variância cresce linearmente com o intervalo de tempo. De outro modo, pode-se dizer que a variância das mudanças em Z(t) é proporcional à extensão do intervalo de tempo considerado, e tal fato caracteriza o Processo de Wiener como um processo não-estacionário.

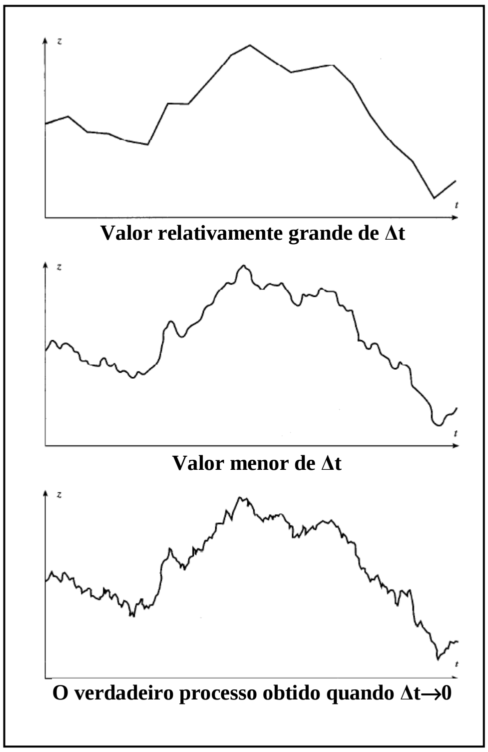
Considerando agora o caso de se ter um intervalo de tempo infinitesimalmente pequeno ($\Delta t \rightarrow 0$), sendo denotado por dt, a mudança sofrida pela variável Z(t) pode ser representada em tempo contínuo, ou seja,

$$dZ_t = \epsilon_t \sqrt{dt}$$

Dado que $\epsilon_t \sim N(0,1)$, então $E(dZ) = 0$ e $Var(dZ) = E[(dZ)^2] = dt$. Note que o processo de Wiener não considera qualquer tendência para os valores futuros de Z, ou seja, o valor esperado do processo é sempre igual ao seu valor atual. Observa-se também da equação anterior, que o Processo de Wiener é marcado pela presença de mudanças bruscas. Tal comportamento é proveniente do fato de que para um pequeno intervalo dt, o movimento do desvio padrão é muito maior que o termo de movimento de tendência (a ordem de $\sqrt{dt}$ é maior que a ordem de dt), o que determina uma trajetória serrilhada para o Processo de Wiener.

Logo, o Processo de Wiener não tem derivada em relação ao tempo no sentido convencional, pois as trajetórias são descontínuas e os limites à esquerda e à direita em t não são iguais (A figura 3.1 ilustra como o caminho do Processo de Wiener vai se tornando irregular à medida que Δt vai tendendo a zero).

Figura 3.1 – Como um Processo de Wiener é obtido quando $\Delta t \rightarrow 0$



Fonte: Hull, 1999.

Processo Generalizado de Wiener ou Movimento Aritmético Browniano

O Processo de Wiener pode apresentar certas generalizações de forma a se obter uma representação mais realista da trajetória em estudo. Por exemplo, seja o caso de uma ação que é correlacionada ao crescimento econômico de um país, os movimentos desta ação poderão exibir uma tendência ao longo do tempo. Nesse caso, uma das generalizações mais comum é a adição de um termo de crescimento de longo prazo (*drift*) ao Processo de Wiener.

Matematicamente, a variação de uma variável que segue o Processo Generalizado de Wiener pode ser representada pela seguinte equação diferencial:

$$dS_t = a\,dt + b\,dZ_t,$$

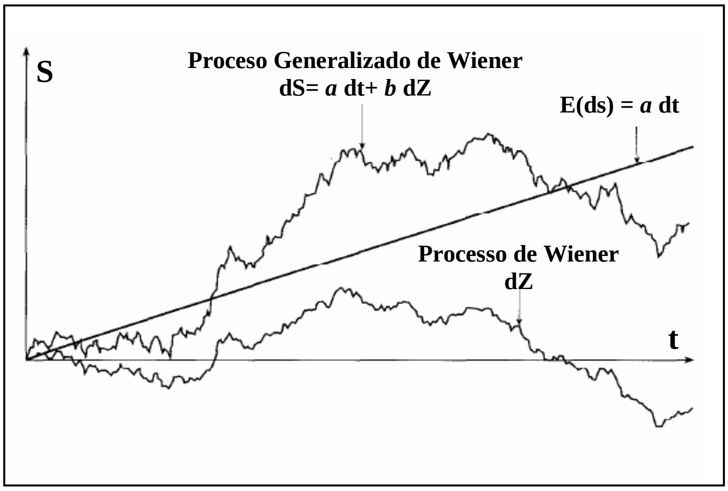
onde a representa a taxa de retorno esperada e b^2 a taxa de variância deste processo, ambas constantes. Na figura 3.2 é apresentado o comportamento desse processo.

O Processo de Wiener, dZ, é o único termo aleatório presente na composição da equação anterior. Dessa forma, a evolução do Processo de Wiener Generalizado, também conhecido por Movimento Aritmético Browniano (MAB) ou Processo de Wiener com *drift*, é fruto de duas parcelas. São elas:

- O termo de tendência que representa a certeza do processo, caracterizado pelo crescimento linear, com taxa a, e
- Um crescimento aleatório com distribuição normal e com desvio padrão b.

Como dZ segue uma distribuição Normal, então a mudança em S, dS, no intervalo de tempo dt também seguirá uma distribuição Normal com os parâmetros $E(dS) = a\,dt$ e $\sigma(dS) = b\sqrt{dt}$.

Figura 3.2 – Exemplo de um Processo Generalizado de Wiener



Fonte: Hull, 1999.

Entretanto, existem algumas restrições na utilização desse processo na modelagem de preços de ativos, sendo elas:

- A possibilidade da variável assumir valores negativos, uma vez que o termo aleatório é uma variável normalmente distribuída. Tal evento não se adequa ao caso de preços de ativos, uma vez que não há preço negativo;

- Para uma ação que não paga dividendos, no MAB a taxa de retorno desta ação se reduz com o tempo à medida que o valor da ação aumenta. Sabe-se, no entanto, que os investidores exigem um retorno esperado (i.e., a taxa de retorno esperada dividida pelo preço da ação) constante, e
- No MAB o desvio padrão é constante ao longo do tempo; enquanto que para melhor modelar ativos, o desvio padrão deveria ser proporcional ao valor do ativo.

Esses motivos fazem com que o MAB não seja o processo mais indicado para modelar preços de ações ou ativos em geral.

Processo de Itô ou Movimento Browniano Generalizado

De acordo com as duas últimas restrições do Processo Generalizado de Wiener descritas anteriormente, pode-se definir um novo processo estocástico. Trata-se do Processo de Itô, cujas taxas de retorno esperada e de variância são funções do estado corrente e do tempo, ou seja,

$$dS_t = a(S, t)\, dt + b(S, t)\, dZ_t,$$

onde a(S,t) e b(S,t) são funções não aleatórias conhecidas e dZ é o incremento de Wiener descrito anteriormente .

Visto que $dZ_t \sim N(0, dt)$, tem-se que a média e a variância dos incrementos desse processo são, respectivamente, $E(dS) = a(S, t)\, dt$ e $Var(dS) = [b(S, t)]^2 dt$. O termo
a(S, t) é designado como a taxa de drift esperada instantânea do Processo de Itô e $[b(S,t)]^2dt$ como a taxa de variância instantânea.

O Processo de Itô é um caso especial de uma classe mais geral de “Processos de difusão forte”, que é uma classe particular em tempo contínuo do Processo de Markov.

Movimento Geométrico Browniano

Em 1965 Paul Samuelson, tendo conhecimento das propriedades do modelo de Bachelier, introduziu uma versão revisada do modelo antigo, pela qual o retorno e não mais o preço do ativo seguia um Movimento Aritmético Browniano; conseqüentemente, valores negativos tornaram-se admissíveis na modelagem.

Esta variação ficou conhecida por Movimento Geométrico Browniano (MGB), que é um caso particular do Processo de Itô onde $a(S, t) = \alpha S$ e $b(S, t) = \sigma S$, com α e σ constantes.

O MGB é o processo estocástico mais empregado para modelar o comportamento de preços de ações e de mercadorias, taxa de juros, e de outras variáveis financeiras e econômicas, uma vez que considera que os retornos efetivos do ativo e suas variâncias são proporcionais ao valor de S. Contudo, mesmo nos casos em que o MGB não é a melhor opção, ainda assim ele é o processo estocástico mais utilizado, dado a sua fácil compreensão e simplicidade quanto ao número de parâmetros a serem estimados (em relação ao Movimento de Reversão à Média, por exemplo, visto adiante).

Esse processo constituiu-se numa hipótese fundamental, bastante utilizado após o artigo de Samuelson, particularmente, por Black e Scholes (1973) e Merton (1973) quando eles propuseram sua célebre fórmula de apreçamento das opções sobre ações.

A equação diferencial estocástica a seguir especifica a dinâmica do preço de um ativo financeiro que segue um MGB:

$$dS_t = \alpha\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dZ_t \text{ ou } \frac{dS_t}{S_t} = \alpha\, dt + \sigma\, dZ_t\,,$$

onde S representa o preço do ativo, α representa a sua taxa de retorno esperada, σ representa a volatilidade do preço do ativo, e dZ representa o processo de Wiener. O termo $\frac{dS}{S}$ denota a mudança no valor de S sobre o intervalo de tempo (t, t + dt) dividido pelo preço inicial de S no tempo t. Essa razão é identificada como o retorno obtido ao se investir na ação pelo período (t, t + dt). Na ausência de pagamento de dividendos, apenas a mudança no preço será responsável pelo retorno.

Ao calcular a razão $\frac{dS}{S}$ na expressão anterior, percebe-se que o lado direito da equação (α dt + σ dZ) é um Movimento Aritmético Browniano, conforme descrito previamente. Por conseguinte, tem-se que as mudanças percentuais em S (ΔS/S), que representam os incrementos no logaritmo natural de S, seguem uma distribuição Normal. A normalidade dos retornos é um pressuposto do modelo de Black-Scholes e caso a mesma não seja atendida, o uso de sua fórmula deve ser cuidadosamente questionado.

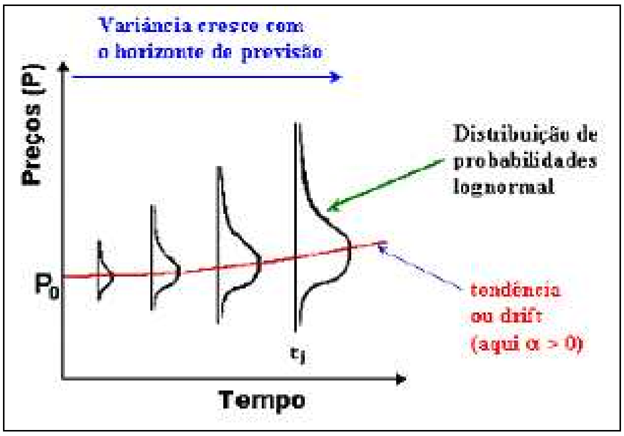
No entanto, visto que o logaritmo natural de S tem distribuição Normal, pode-se concluir que as mudanças absolutas em S (ΔS) são log-normalmente distribuídas. Esta é uma observação fundamental, pois permite que os preços (S) de um ativo sejam sempre positivos.

O valor esperado e a variância de uma variável que se comporta conforme um processo MGB segue as seguintes expressões, respectivamente:

$$E(S_t) = S_0.e^{\alpha t}; \text{ e } Var(S_t) = S_0^2.e^{2\alpha t}.(e\sigma^{2t} - 1).$$

Sendo assim, espera-se que S cresça (ou diminua) a uma taxa α; enquanto que a variância é ilimitada, ou seja, à medida que o intervalo de tempo tende ao infinito, a variância do processo também tende na mesma direção. A figura 3.3 representa essas propriedades.

Figura 3.3 – Movimento Geométrico Browniano (MGB)



Fonte: Sítio da internet – http://www.puc-rio.br/marco.ind/

Movimento de Reversão à Média

Em 1977 Vasicek introduziu o primeiro modelo em tempo contínuo para representar a evolução aleatória da taxa de juros e propôs descrever os movimentos da estrutura a termo através das mudanças na taxa *spot* r_t.

Para impedir as grandes curvas do Movimento Aritmético Browniano, que pode ir de positivamente infinito a negativamente infinito, o que é inapropriado para taxa de juros que se move numa faixa estreita de valores (por exemplo, entre [0; 0,20]); assim como para evitar o crescimento ao longo do tempo do Movimento Geométrico Browniano, obviamente inadequado para taxa de juros, Vasicek introduziu o chamado processo de Ornstein-Uhlembeck (também conhecido por Movimento de Reversão à Média Aritmético) para descrever a dinâmica de curto prazo da taxa de juros:

$$dr_t = \eta(\bar{r} - r_t)dt + \sigma dZ_t,$$

onde η é a velocidade de reversão; $\bar{r}$ é a média de longo prazo ou o nível de equilíbrio para o qual r_t tende a reverter; σ é a volatilidade, e dZ é o incremento de Wiener. Os parâmetros η, $\bar{r}$ e σ são constantes positivas.

No caso de commodities, a literatura tem evidenciado em várias ocasiões (conforme será relatado em detalhes no capítulo 4) que os preços nem crescem nem diminuem em média ao longo do tempo; eles tendem a reverter à média a um nível que pode ser reconhecido como o custo marginal de produção. Em outras palavras, pode-se dizer que no curto prazo estes preços podem variar aleatoriamente, para cima ou para baixo; no entanto, num período de tempo suficientemente longo, eles tendem a ser atraídos de volta para o custo marginal de se produzir a commodity.

A explicação para este comportamento está no fato de que à medida que o preço varia, os produtores irão aumentar a produção para se beneficiar dos preços altos e reduzi-la para evitar perdas quando os preços forem baixos. Conseqüentemente, os preços serão forçados a reverter ao seu valor de equilíbrio de longo prazo.

A equação do Movimento de Reversão à Média (MRM) fornece a seguinte expressão para r_{t+dt}:

$$r_{t+dt} = r_t + \eta(\bar{r} - r_t)dt + \sigma dZ_t,$$

que por sua vez, à semelhança de dZ, segue uma distribuição Normal, podendo assumir valores negativos. Dado que há o interesse em modelar preços de commodities, esta atribuição torna-se indesejável e, portanto, é comum utilizar o logaritmo natural dos preços na modelagem. Tal prática será adotada nesta dissertação para a modelagem dos preços da commodity café arábica.

Uma importante característica do Movimento de Reversão à Média é que este processo atende às propriedades markovianas. Contudo, ao contrário do MGB, ele não possui incrementos independentes, ou seja, o sentido e a intensidade da tendência dependem do preço corrente. Tal propriedade é evidenciada ao se observar que a mudança esperada de r_t depende da diferença entre $\bar{r}$ e r_t. Portanto, se r_t é maior (menor) do que $\bar{r}$, é mais provável que haja uma queda (crescimento) no próximo intervalo de tempo. Cabe mencionar ainda que o MRM também faz parte da classe mais geral de Processos de Itô.

Para descrever a distribuição de probabilidade de um processo estocástico particular bem como sua evolução no tempo, geralmente, utiliza-se a equação de Kolmogorov. Este método permite obter os momentos probabilísticos de processos estocásticos através da resolução da equação diferencial da densidade de probabilidade. Em Dixit&Pindyck (1994), pode-se encontrar a aplicação para o caso do MRM, do tipo Ornstein-Uhlenbeck. As expressões obtidas para o valor esperado e a variância do processo são, respectivamente:

$$E[r_t] = \bar{r} + (r_0 - \bar{r})e^{-\eta t}, \text{ e}$$

$$Var[r_t] = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t})$$

Com base nestas equações, pode-se inferir a presença das seguintes características:

- À medida que t → ∞, o valor esperado de r_t tende para $\bar{r}$ e a variância converge para $\frac{\sigma^2}{2\eta}$ diferentemente do MGB, que nestas condições teria variância ilimitada; e

- Para altos valores da velocidade de reversão ($\eta \rightarrow \infty$), a variância tende a zero, garantindo que o processo não se desviará de sua média de longo prazo nem mesmo por um pequeno intervalo de tempo. Por outro lado, se $\eta \rightarrow 0$ a variância limita-se ao termo $\sigma^2 t$ e o MRM tende para o Movimento Browniano Padrão.

Processos de difusão com saltos

Nos últimos 30 anos, o Movimento Geométrico Browniano tem sido referência para a modelagem de preços de ações, principalmente, pelo seu papel no modelo de Black-Scholes. Contudo, os processos estocásticos apresentados até o momento, e que têm por característica a continuidade em suas trajetórias, nem sempre conseguem captar adequadamente a evolução de variáveis econômicas. Descidas bruscas do mercado de ações bem como uma subida acentuada gerada pela chegada de notícias positivas sobre uma empresa ou setor são alguns exemplos de comportamento que evidenciam a necessidade de se incorporar uma componente de salto ao termo de difusão.

Em períodos de crises mundiais, em casos de guerras e revoluções ou ainda numa organização de mercado com poucos competidores, é comum observar que os retornos de ativos financeiros ficam mais expostos a variações substanciais de valor no curto prazo. Entretanto, o mercado de commodities também não foge a esta regra, sobretudo, por se tratar de um segmento de capital de alto risco para as empresas.

Após os atentados terroristas de 11 de setembro, por exemplo, pôde-se verificar que as cotações de commodities, a destacar o caso agrícola, foram desfavoravelmente impactadas. No entanto, cabe abrir um espaço aqui para análise da particular situação que tem sido vivenciada diante da atual desaceleração da economia norte-americana, provocada pela crise hipotecária do mercado imobiliário. A tabela 3.1 ilustra os comportamentos dos preços nos dois períodos abordados.

Tabela 3.1 – Comportamento dos preços de commodities agrícolas em períodos de crise mundial

Produtos agrícolas	Ataques de 11/09		Crise do mercado imobiliário	
	31/08/01	18/09/01	23/01/08	24/01/08
Café NY*	54,35	50,75	133,95	135,0
Soja Chicago**	486,0	481,0	1.207,0	1.249,0
Milho Chicago**	227,75	218,5	481,25	501,25
Trigo Chicago**	289,0	279,5	919,5	923,5

Fonte: Centro de Informações da Gazeta Mercantil
*Libra-peso/ **Bushel

A atual estabilidade dos preços destes produtos está atrelada, notadamente, ao crescimento do consumo dos países emergentes liderados pela China, assim como a importância que algumas commodities alcançaram no mundo em relação à bioenergia. Porém, para o caso do café precisa haver uma maior cautela na avaliação dos preços diante das incertezas da crise norte-americana, uma vez que os Estados Unidos são o segundo maior importador do produto no mundo, muito embora haja uma tendência positiva.

De volta à discussão da presença de saltos na modelagem estocástica, pode-se afirmar, com base nas considerações já expostas, que as variações na dinâmica dos preços de ativos decorrem de dois tipos de vibrações: as “normais” e as “anormais”. As informações de mercado consideradas “normais” causam um processo estocástico de difusão nos preços, enquanto que informações consideradas “anormais” (raras, mas de muito impacto) provocam saltos discretos de tamanho aleatório, que podem ser representados através de um processo de Poisson.

Um processo de Poisson simples é definido conforme a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS = a(S, t)\, dt + b(S, t)\, dq,$$

onde a(S, t) denota o processo de difusão, $g(S, t)$ o tamanho do salto; e q um processo de Poisson com intensidade λ, contabilizando a chegada dos saltos.

Em analogia ao processo de Wiener, tem-se que dq é o incremento aleatório que pode assumir o valor zero, o que é verificado na maior parte do tempo, ou o valor de um salto de amplitude φ, que ocorre com probabilidade λdt.

O valor de φ pode ser estocástico (correlacionado ou não a X) ou determinístico. Em outras palavras:

$$dq = \begin{cases} 0, \text{ com probabilidade } (1- \lambda dt) \\ \varphi, \text{ com probabilidade } \lambda dt \end{cases}$$

Porém, em Finanças o processo de Poisson é mais usado combinado com um processo de difusão, são os chamados modelos de difusão de saltos (em inglês, *jump-diffusion* ou *Poisson-Gaussian*). Nestes casos, o preço de um determinado ativo pode evoluir continuamente segundo o MGB ou MRM na maior parte do tempo, mas eventualmente pode sofrer grandes oscilações em decorrência de eventos raros.

O processo misto de difusão de saltos é representado com a seguinte estrutura:

$$dS = f(S, t)\, dt + g(S, t)\, dZ_t + h(S, t)\, dq_t,$$

onde $f(S, t)$ e $g(S, t)$ são funções conhecidas (não aleatórias); dZ um incremento de Wiener e dq um incremento de Poisson, de forma que os processos são independentes.

O primeiro modelo de difusão de saltos foi introduzido em 1976 por Robert Merton, ao extender a versão de Black-Scholes para o apreçamento de opções financeiras quando o preço do ativo é suscetível a variações durante um intervalo de tempo infinitesimal.

Matematicamente, a equação diferencial proposta por Merton para a dinâmica dos preços é dada da seguinte forma:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha - \lambda k)\, dt + \sigma\, dZ_t + dq_t,$$

Nesta equação, α e σ^2 são os parâmetros do termo de difusão, que considera as mudanças nos preços usuais. Eles significam, respectivamente, o retorno esperado instantâneo do ativo e a variância instantânea do retorno caso o evento de Poisson não ocorra. O processo de Wiener (dZ) e o processo de Poisson (dq) são independentes, e λ representa o número médio de chegadas de eventos de

Poisson por unidade de tempo. O elemento k é o valor esperado do salto, ou seja, k = E(φ).

A subtração do fator λk do termo de tendência do processo faz-se necessária como medida de correção de um possível viés oriundo da consideração do processo de Poisson. Este viés se deve ao fato de que o valor esperado do processo de Poisson não é nulo, ou seja, E (dq) = λdt E(φ) + (1− λdt) 0 = λdt k. Caso este procedimento de compensação não fosse adotado, o valor esperado de um ativo que segue o processo de difusão com saltos não seria o mesmo do obtido quando utilizado o MGB. Matematicamente, esta afirmação pode ser mostrada ao se tomar o valor esperado do processo de Poisson Compensado, conforme transcorre a seguir:

$$
\begin{aligned}
E\left[\frac{dS}{S}\right] &= E\left[(\alpha - \lambda k)dt + \sigma dZ + dq\right] \\
&= E\left[(\alpha - \lambda k)dt\right] + E\left[\sigma dZ\right] + E\left[dq\right] \\
&= (\alpha - \lambda k)dt + 0 + \lambda dtk \\
&= \alpha dt - \lambda kdt + \lambda dtk \\
&= \alpha dt
\end{aligned}
$$

Esta característica do processo de Poisson Compensado é bastante útil para a teoria de apreçamento de ativos financeiros, uma vez que permite o uso da medida martingal equivalente. Sabe-se que o processo de Poisson é um processo de contagem e, conseqüentemente, cresce com o tempo, mas com a subtração de uma “média” apropriada pode ser transformado em martingal (Detalhes em Neftci, 2000 – p.179).

Embora os processos de difusão de saltos sejam mais realísticos, principalmente, do ponto de vista estatístico e econômico, algumas desvantagens ainda podem ser observadas. Uma discussão levantada acerca de tais modelos parte do fato de que na presença de saltos, o princípio da não-arbitragem utilizado no modelo de Black-Scholes deixa de ser válido. Por conseguinte, a avaliação de opções financeiras torna-se uma tarefa bastante complexa.

Particularmente, Merton desenvolveu uma fórmula analítica para avaliação de opções européias ao assumir que o risco dos saltos tem prêmio de risco zero. Em outras palavras, Merton considerou que toda informação causadora de saltos refere-se, exclusivamente, à firma ou indústria a que pertence o ativo.

Desta forma, a possibilidade de que um salto venha a ocorrer pode ser considerado um risco não sistemático, ou seja, descorrelacionado com o mercado. No entanto, tais pressupostos não parecem ser muito razoáveis, não podendo ser generalizados para outros tipos de opções.