

6 Métodos de solução

6.1 Introdução

Existem vários métodos de solução de equações não-lineares, cada qual com uma justificativa racional. Ao contrario dos métodos de solução de sistemas lineares, estes métodos não garantem, em geral, a convergência para o resultado correto de qualquer problema. O analista deve ser capaz, baseado na sua experiência, de escolher o método mais adequado para o problema em questão. Além disso, mesmo após escolhido o método, alguma dificuldade aparece na determinação de parâmetros do tipo tolerâncias, incrementos de carga e número máximo de iterações.

Este capítulo apresenta a técnica de solução para sistemas de equações algébricas não-lineares obtidas após a integração das equações de equilíbrio do sistema discreto. O capítulo começa com uma revisão dos procedimentos existentes que podem ser usados para obter uma solução adequada.

6.2 Revisão de procedimentos de solução

A dificuldade na análise não-linear é que a rigidez e forças internas, as quais têm que ser levadas em conta para o procedimento de solução, são dependentes dos deslocamentos. Vários procedimentos têm sido desenvolvidos com diferentes maneiras de tratar esta dependência, mas isto é freqüentemente difícil de realizar, essencialmente para problemas de severas não linearidades e condições locais de carregamento e descarregamento. Se o fenômeno fundamental presente no comportamento da estrutura pode ser capturado pelo procedimento de solução, aproximações e simplificações podem ser introduzidas de forma a melhorar a eficiência do procedimento da análise. No entanto a eficiência é freqüentemente

sacrificada para alcançar estabilidade no processo de solução. Conseqüentemente muitas alternativas têm sido exploradas e não é a intenção revisar todos os procedimentos de solução neste trabalho. Primeiramente é revisado neste capítulo o procedimento incremental iterativo para análises estáticas de estruturas não-lineares. Isto define a formulação básica para procedimentos de solução. O procedimento de Newton Raphson é o procedimento clássico.

6.3 Processo iterativo para solução do sistema de equações de equilíbrio não lineares: método Newton-Raphson

Lembrando que a aplicação do carregamento na estrutura é feita mediante incrementos em intervalos de tempo Δt , e assumindo que as condições de equilíbrio em um instante t já sejam conhecidas, o processo iterativo é usado para se determinar as condições de equilíbrio no instante $t + \Delta t$. Doravante, sobrescritos colocados à esquerda de matrizes e vetores indicam o instante em que foram avaliados.

O processo é aplicado no nível da estrutura, portanto após o espalhamento das matrizes de rigidez e massa, bem como dos vetores de força.

Conhecido o vetor de forças externas ${}^{t+\Delta t}F$ no instante $t + \Delta t$, utiliza-se a equação $K.u = F$ para, de forma aproximada, determinar o incremento ΔR do vetor de forças internas tR , necessário à manutenção do equilíbrio em $t + \Delta t$.

$$\Delta R = {}^tK_T \Delta u \quad (6.1)$$

Com respeito à equação (6.1), cabe esclarecer que a matriz de rigidez tangente tK_T (matriz de rigidez resultante do acoplamento da matriz de rigidez do tudo e solo) é função não só das propriedades físicas do material que constitui o corpo, mas também do nível de carregamento da estrutura, necessitando ser atualizada permanentemente. O subscripto indica que a atualização foi feita no instante t . Na prática:

$${}^tK_T = K_T({}^tR) \quad (6.2)$$

O vetor de deslocamentos incrementais Δu corresponde aos deslocamentos experimentados pelos pontos materiais do corpo ao passar de uma configuração de equilíbrio no instante t para outra no instante $t + \Delta t$. Portanto, o deslocamento total é dado por:

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + \Delta u \quad (6.3)$$

Analogamente, o vetor ${}^{t+\Delta t}R$ correspondente à nova configuração de equilíbrio é dado por:

$${}^{t+\Delta t}R = {}^t R + \Delta R \quad (6.4)$$

Substituindo (6.1) em (6.4), vem:

$${}^t K_T \Delta u = {}^{t+\Delta t}R - {}^t R \quad (6.5)$$

O método pretende fazer com que:

$${}^{t+\Delta t}F - {}^{t+\Delta t}R \rightarrow 0 \quad (6.6)$$

Assumindo a condição limite, é possível substituir ${}^{t+\Delta t}R$ por ${}^{t+\Delta t}F$ na equação (6.5), tal que:

$${}^t K_T \Delta u = {}^{t+\Delta t}F - {}^t R = Z \quad (6.7)$$

Na equação (6.7), Z é um vetor de desequilíbrio de forças, ou seja, que representa um residuo. O objetivo do método é fazer com que este vetor tenda a zero.

Em uma única iteração, seria resolvida a equação (6.7) em Δu . Em seguida, o vetor de deslocamentos seria atualizado com uso de (6.3). E, antes de se prosseguir para o próximo passo de carregamento, seria atualizado o vetor de

forças internas com uso de (6.1) e (6.4), e a matriz de rigidez tangente com uso de (6.2).

Entretanto, uma única iteração geralmente não basta para fazer o vetor Z de desequilíbrio de forças aproximar-se de zero o suficiente a fim de garantir a convergência entre o vetor F de forças externas e o vetor R de forças internas. Através de sucessivas iterações, é possível fazer Z tender a zero dentro de um limite de tolerância aceitável. Sob este enfoque, segue-se o fluxo a seguir até a convergência:

- Já tendo sido atualizados, na iteração anterior, tanto os vetores de deslocamento e de forças internas, quanto a matriz de rigidez tangente, a k -ésima iteração inicia com o cálculo de novo vetor de deslocamentos incrementais $\Delta u^{(k)}$:

$${}^{t+\Delta t}K_T^{(k-1)}\Delta u^{(k)} = {}^{t+\Delta t}F - {}^{t+\Delta t}R_T^{(k-1)} \quad (6.8)$$

Na primeira iteração, quando $k = 1$:

$${}^{t+\Delta t}K_T^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}K_T^0 = {}^tK_T \quad (6.9)$$

$${}^{t+\Delta t}R^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}R^0 = {}^tR \quad (6.10)$$

Nas equações (6.9) e (6.10), respectivamente, tK_T e tR resultaram da convergência no passo de carregamento anterior.

- Em seguida, com o novo vetor de deslocamentos incrementais calculado, é feita a atualização do vetor de deslocamentos:

$${}^{t+\Delta t}u^{(k)} = {}^{t+\Delta t}u^{(k-1)} + \Delta u^{(k)} \quad (6.11)$$

Na primeira iteração, quando $k = 1$:

$${}^{t+\Delta t}u^{(0)} = {}^tu \quad (6.12)$$

Em (6.12), ${}^t u$ resultou da convergência no passo de carregamento anterior.

- Em seguida, é atualizado o vetor de forças internas:

$$\Delta R^{(k)} = {}^{t+\Delta t} K_T^{(k-1)} \Delta u^{(k)} \quad (6.13)$$

$${}^{t+\Delta t} R^{(k)} = {}^{t+\Delta t} R^{(k-1)} + \Delta R^{(k)} \quad (6.14)$$

- Em seguida, é atualizada a matriz de rigidez tangente com uso de (6.2). No Método Newton-Raphson modificado a matriz de rigidez tangente só é atualizada ao final do passo de carregamento, preparando-a para o passo seguinte (durante o processo iterativo permanece inalterada).
- Em seguida, é verificada a convergência. Bathe propõe três critérios possíveis para a verificação, concomitantes, ou não, baseados em normas de deslocamento, força e energia, respectivamente:

$$\frac{\|\Delta u^{(k)}\|}{\|{}^{t+\Delta t} u^{(k)}\|} \leq \xi_D \quad (6.15)$$

$$\frac{\|{}^{t+\Delta t} F - {}^{t+\Delta t} R^{(k)}\|}{\|{}^{t+\Delta t} F - {}^t R\|} \leq \xi_F \quad (6.16)$$

$$\frac{\Delta u^{(k)T} ({}^{t+\Delta t} F - {}^{t+\Delta t} R^{(k-1)})}{\Delta u^{(1)T} ({}^{t+\Delta t} F - {}^t R)} \leq \xi_E \quad (6.17)$$

A norma de um vetor r , aqui definida, é dada por:

$$\|r\| = \sqrt{r^T r} \quad (6.18)$$

Nas expressões (6.15) a (6.17), os escalares ξ_D , ξ_F e ξ_E são as tolerâncias em termos de deslocamento, força e energia, respectivamente.

Caso a convergência não tenha sido alcançada, ou seja, caso algum dos critérios, escolhidos dentre (6.15) a (6.17), não se verifique, o processo se repete desde o primeiro passo do fluxo.

No caso da análise dinâmica, a equação (6.8) é acrescida das parcelas correspondentes às forças de inércia e ao amortecimento.

$${}^{t+\Delta t}M^{(k-1)} {}^{t+\Delta t}\ddot{u}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}C^{(k-1)} {}^{t+\Delta t}\dot{u}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}K_T^{(k-1)} \Delta u^{(k)} = {}^{t+\Delta t}F - {}^{t+\Delta t}R^{(k-1)} \quad (6.19)$$

Cabe adiantar que, neste caso, à diferença entre o vetor de forças externas ${}^{t+\Delta t}F$ e à última atualização disponível para o vetor de forças internas ${}^{t+\Delta t}R^{(k-1)}$, que aparece no membro direito da equação (6.18), são somadas a parcelas originadas pelo desmembramento dos termos de inércia e amortecimento que aparecem no membro esquerdo, dando origem a um vetor de resíduos efetivo. O processo iterativo deve controlar e reduzir este vetor até o alcance da convergência.

6.4 Solução do sistema de equações de equilíbrio no domínio do tempo

É usual resolver o sistema de equações acopladas no domínio do tempo. Neste sentido, são inúmeros os algoritmos propostos. A idéia básica é a integração numérica das equações em sucessivos intervalos de tempo Δt , descrevendo uma série histórica para cada grau de liberdade. Por tanto, a solução é conhecida apenas em instantes discretos de tempo, defasados de Δt .

O processo de discretização no tempo da equação (3.88) consiste em substituir os vetores de deslocamentos $u(t)$, velocidades $\dot{u}(t)$ e acelerações $\ddot{u}(t)$ pelas suas respectivas aproximações ${}^t d, {}^t v$ e ${}^t a$.

$$M^t a + C^t v + K^t d = F(t) \quad (6.20)$$

6.4.1 Algoritmos de integração

Sem dúvida, o algoritmo de Newmark é o mais popular. Hughes apresenta as equações que o definem:

$${}^{t+\Delta t}d = {}^t d + \Delta t {}^t v + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta) {}^t a + 2\beta {}^{t+\Delta t} a] \quad (6.21a)$$

$${}^{t+\Delta t}v = {}^t v + \Delta t [(1-\gamma) {}^t a + \gamma {}^{t+\Delta t} a] \quad (6.21b)$$

Cada par de parâmetros β e γ define um tipo de algoritmo diferente, com propriedades totalmente distintas. As equações (6.21) são utilizadas em conjunto com a equação (6.20) em uma seqüência de cálculo que começa a partir dos valores iniciais

6.4.2 Algoritmos de Newmark incondicionalmente estáveis

São aqueles cuja estabilidade é assegurada pela relação entre os parâmetros β e γ , independente do intervalo de tempo de integração numérica. Algoritmos desta natureza obedecem à relação:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (6.22)$$

Algoritmos de Newmark condicionalmente estáveis São aqueles cuja estabilidade depende da escolha criteriosa do intervalo de tempo Δt . Algoritmos desta natureza apresentam a seguinte relação entre os parâmetros β e γ :

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \text{ e } \beta < \frac{1}{2} \quad (6.23)$$

Neste caso, a escolha de Δt deverá obedecer à seguinte condição:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\omega_n} \frac{\zeta_n \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \zeta_n^2 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right)^2}}{\frac{\gamma}{2} - \beta} \quad (6.24)$$

Apresenta-se abaixo o algoritmo de solução passo a passo relativo ao método de Newmark.

Cálculos iniciais:

(A) Cálculo das matrizes de rigidez K , massa M , e amortecimento C

(B) Obtenção das condições iniciais: ${}^0u, {}^0\dot{u}, {}^0\ddot{u}$

(C) Seleção do passo de tempo Δt e dos parâmetros β e γ

$$\gamma \geq 0.5$$

$$\beta \geq 0.25(0.5 + \gamma)^2$$

(D) Cálculo das constantes

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{(\beta \Delta t^2)} & a_1 &= \frac{\gamma}{(\beta \Delta t)} & a_2 &= \frac{1}{(\beta \Delta t)} \\ a_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1 & a_4 &= \frac{\gamma}{\beta - 1} - 1 & a_5 &= \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right) \\ a_6 &= \Delta t(1 - \gamma) & a_7 &= \gamma \Delta t \end{aligned}$$

(E) Cálculo da matriz de rigidez efetiva $K^* = K + a_0 M + a_1 C$

(F) Resolver K^{*-1}

Para cada passo de tempo:

(G) Cálculo do vetor de força efetivo

$$R^* = {}^{t+\Delta t}R + M(a_0 {}^t u + a_2 {}^t \dot{u} + a_3 {}^t \ddot{u}) + C(a_1 {}^t u + a_4 {}^t \dot{u} + a_5 {}^t \ddot{u})$$

(H) Cálculo dos deslocamentos

$${}^{t+\Delta t}u = K^{*-1} R^*$$

(I) Cálculo das velocidades e acelerações

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u} = a_0 ({}^{t+\Delta t}u - {}^t u) - a_2 {}^t \dot{u} - a_3 {}^t \ddot{u}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t \dot{u} + a_6 {}^t \ddot{u} + a_7 {}^{t+\Delta t}\ddot{u}$$

6.4.3 Convergência de um algoritmo

O erro global $e_n(t)$ produzido pelo algoritmo em um instante t é dado por:

$$e_n(t) = {}^t y_n - y_n(t) \quad (6.25)$$

Segundo Jacob, um algoritmo consistente apresenta um limite máximo para o erro global $e_n(t)$.

$$e_n(t + \Delta t) = A_n e_n(t) - \Delta t \tau_n(t) \quad (6.26)$$

Aplicando a equação (6.26) sobre si própria reiteradas vezes a partir do instante inicial, obtém-se o seguinte resultado:

$$e_n(t = t_m) = A_n^m e_n(t = 0) - \Delta t \sum_{i=0}^{m-1} A_n^i \tau_n(t = t_{m-i-1}) \quad (6.27)$$

$$e_n(t + \Delta t) = A_n e_n(t) - \Delta t \tau_n(t) \quad (6.28)$$

Lembrando as condições iniciais, conclui-se que $e_n(t = 0)$ é nulo, portanto, à equação (6.27) recai em:

$$e_n(t = t_m) = -\Delta t \sum_{i=0}^{m-1} A_n^i \tau_n(t = t_{m-i-1}) \quad (6.29)$$

Considerando que o algoritmo seja estável e consistente, Hughes demonstra que a equação (6.29) pode ser reescrita por:

$$\|e_n(t = t_m)\| \leq t_m c \Delta t^k \quad (6.30)$$

A expressão (6.30) é uma particularidade do Teorema de Lax, segundo o qual “as propriedades de estabilidade e consistência são condições necessárias e

suficientes para a convergência de um algoritmo”. A partir dela, fica claro que o erro global tende à zero na medida em que Δt se torna infinitamente pequeno.