

5 Elementos finitos de interface e contornos artificiais

São muito freqüentes situações que envolvem o contato entre diferentes materiais como, por exemplo, em problemas de interação solo-estrutura, como por exemplo, estacas, muros, dutos, entre outros. Como o comportamento mecânico do sistema solo-estrutura é bastante influenciado pelas condições de interface, várias formulações de elementos finitos especiais, chamados de elementos de interface, foram propostas na literatura com o objetivo de modelar numericamente este problema da forma mais próxima a realidade.

Dentre estes elementos, podem ser citados os propostos por Goodman et. al. (1967), Ghaboussi et. al. (1973), Pande e Shanna (1979), Desai et. al. (1984), Beer (1985), Day e Potts (1994), entre outros. As principais características, hipóteses e limitações destas diversas formulações são examinadas nas seções seguintes.

5.1 Elemento de Goodman, Taylor e Brekke (1967).

Este foi o primeiro elemento de interface proposto na literatura, com espessura nula, idealizado para representar o comportamento mecânico de falhas, dobras e descontinuidades em massas rochosas.

Considere o elemento da figura 5.1, de comprimento L e contendo quatro pontos nodais.

Através do princípio dos trabalhos virtuais, é possível escrever-se a matriz de rigidez local do elemento de interface por;

$$[k_{\xi\eta}] = \int_{-1}^{+1} [B']^T [C'] [B'] \frac{L}{2} d\xi \quad (5.1)$$

$$[C'] = \begin{bmatrix} C'_{\xi\xi} & 0 \\ 0 & C'_{\eta\eta} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

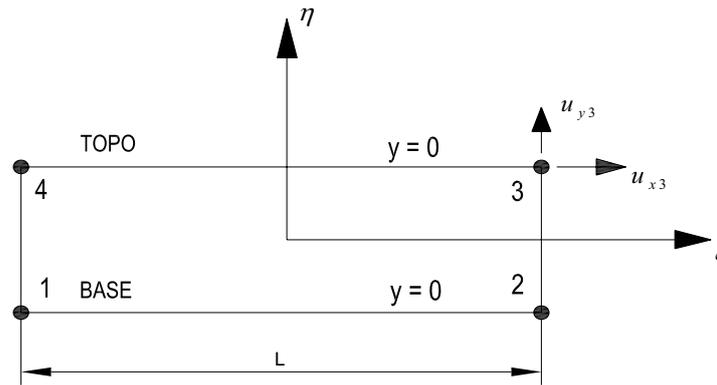


Figura 5.1 - Elemento de junta, espessura nula = 0, sistema de coordenadas locais ξ, η .

As quantidades $C'_{\xi\xi}$ e $C'_{\eta\eta}$ representam propriedades do material relacionadas a rigidez do elemento por unidade de comprimento nas direções tangencial e normal, respectivamente.

Quando uma força é aplicada sobre uma amostra de rocha fraturada, de comprimento L e espessura unitária, ocorrerá um encurtamento nesta direção normal devido tanto à compressão elástica da rocha quanto aos deslocamentos verificados na própria fratura, incluindo as deformações e esmagamentos das asperezas existentes na superfície da junta. Subtraindo-se os deslocamentos elásticos do encurtamento total da amostra, obtém-se uma curva que relaciona a força normal, por unidade de comprimento, com o deslocamento da interface. Na região de comportamento linear, a curva é caracterizada pelo parâmetro $C'_{\eta\eta}$. Raciocínio semelhante pode ser empregado para interpretação da quantidade $C'_{\xi\xi}$.

Os deslocamentos nodais relativos entre os nós do topo e da base da interface,

$$\{\Delta u\} = \begin{Bmatrix} u_{\xi}^{topo} & u_{\xi}^{base} \\ u_{\xi}^{topo} & u_{\xi}^{base} \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

são relacionados com os deslocamentos nodais $\{\delta\}$

$$\{\delta\}^T = \{u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{x2} \quad u_{y2} \quad \dots \quad u_{x4} \quad u_{y4}\} \quad (5.4)$$

Através da matriz $[B']$ assim definida

$$[B'] = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & -N_4 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & -N_4 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

onde, as funções de interpolação na direção ξ são:

$$N_1 = N_4 = \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \quad (5.6a)$$

$$N_2 = N_3 = \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \quad (5.6b)$$

A matriz de rigidez do elemento (equação 5.1) pode então ser facilmente integrada.

A matriz de rigidez global do sistema é construída através dos procedimentos convencionais do MEF, tendo-se o cuidado de transformar a matriz de rigidez do elemento de interface $[k_{\xi\eta}]$ expressa no sistema local para as coordenadas globais x, y . Esta transformação é dada por.

$$[k] = [T]^T [k_{\xi\eta}] [T] \quad (5.7)$$

com

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

sendo α o ângulo formado entre o eixo global x e o eixo local do elemento ξ .

Na resolução do problema, os parâmetros $C'_{\xi\xi}$ e $C'_{\eta\eta}$ são considerados nulos quando a tensão normal no elemento de interface for de tração, sendo os cálculos repetidos para estes novos valores. Caso a tensão cisalhante seja maior do que a resistência ao cisalhamento na interface, o valor de $C'_{\xi\xi}$ é alterado para este valor limite, ou um valor residual, com as componentes de tensão novamente calculadas.

5.2 Elemento de Ghaboussi, Wilson e Isenberg (1973)

Neste elemento de interface, de espessura não nula, os deslocamentos relativos entre o topo e a base da interface são considerados como graus de liberdade independentes.

Na figura 5.2a observa-se que os graus de liberdade do elemento planos superior correspondem aos deslocamentos relativos existentes entre o topo e a base do elemento de interface.

Considerando-se um elemento de interface definido por apenas 2 pontos nodais (figura 5.2b), é possível escrever-se:

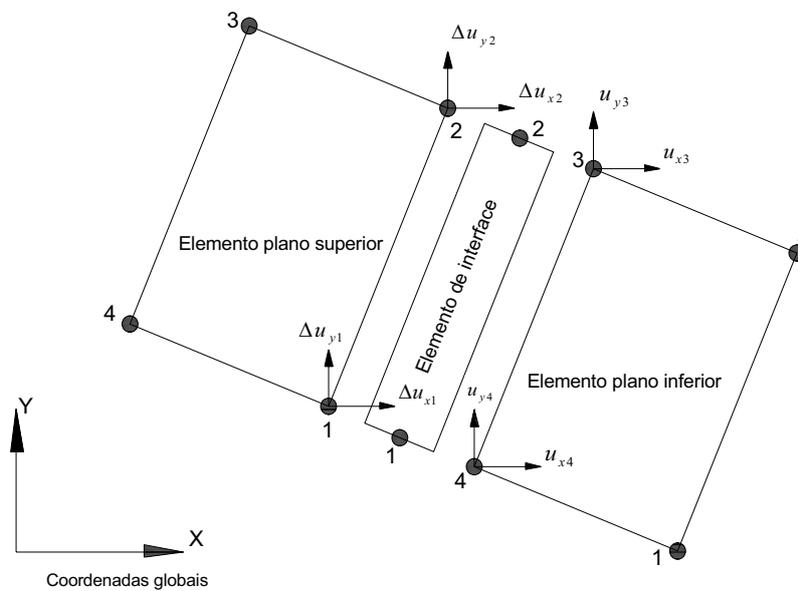


Figura 5.2a - Geometria do elemento de interface [Ghaboussi, Wilson e Isenberg (1973)].

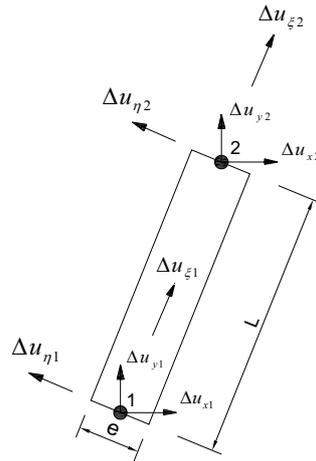


Figura 5.2b - Detalhe do elemento de interface [Ghaboussi, Wilson e Isenberg (1973)].

$$u_{x1}^{Superior} = u_{x4}^{Inferior} + \Delta u_{x1}^{Interface} \quad (5.10)$$

$$u_{y1}^{Superior} = u_{y4}^{Inferior} + \Delta u_{y1}^{Interface} \quad (5.11)$$

$$u_{x2}^{Superior} = u_{x3}^{Inferior} + \Delta u_{x2}^{Interface} \quad (5.12)$$

$$u_{y2}^{Superior} = u_{y3}^{Inferior} + \Delta u_{y2}^{Interface} \quad (5.13)$$

Os deslocamentos relativos nas direções normal Δu_{η} e tangencial Δu_{ξ} variam linearmente ao longo do elemento de interface, de acordo com:

$$\Delta u_{\eta} = N_1 \Delta u_{\eta 1} + N_2 \Delta u_{\eta 2} \quad (5.14)$$

$$\Delta u_{\xi} = N_1 \Delta u_{\xi 1} + N_2 \Delta u_{\xi 2} \quad (5.15)$$

Sendo $N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$ e $N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$ as funções de interpolação lineares utilizadas na formulação deste elemento de interface.

As componentes de deformação normal (ε_{η}) e tangencial (ε_{ξ}) podem então ser obtidas como

$$\varepsilon_{\eta} = \frac{\Delta u_{\eta}}{e} \quad (5.16)$$

$$\varepsilon_{\eta} = \frac{\Delta u_{\xi}}{l} \quad (5.17)$$

onde e é a espessura do elemento de interface (figura 5.2b).

As componentes de deformação podem então ser relacionadas com os deslocamentos relativos nodais através de

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\eta} \\ \varepsilon_{\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2e} & 0 & \frac{(1+\xi)}{2e} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\xi)}{2l} & 0 & \frac{(1+\xi)}{2l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_{\eta 1} \\ \Delta u_{\xi 1} \\ \Delta u_{\eta 2} \\ \Delta u_{\xi 1} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

ou, simbolicamente.

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\Delta\delta\} \quad (5.19)$$

Componentes de tensão podem ser facilmente calculadas através da relação constitutiva do material na interface,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\eta} \\ \sigma_{\xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\eta\eta} & C_{\eta\xi} \\ C_{\xi\eta} & C_{\xi\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\eta} \\ \varepsilon_{\xi} \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

ou, simbolicamente.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (5.21)$$

A matriz de rigidez local do elemento de interface pode então ser determinada por

$$[k_{\xi\eta}] = \int_V [B]^T [C] [B] dV \quad (5.22)$$

Esta matriz deve ser transformada pela relação (5.8) na etapa de formação da matriz de rigidez global do sistema, referida aos eixos globais x, y . Obtém-se finalmente que,

$$[k] = \frac{L}{6e} \begin{bmatrix} 2(A_1 - 2B_1) & 2(A_3 + B_2) & (A_1 - 2B_1) & (A_1 + B_2) \\ 2(A_3 + B_2) & 2(A_2 + 2B_1) & (A_3 + B_2) & (A_2 + 2B_1) \\ (A_1 - 2B_1) & (A_3 + B_2) & 2(A_1 - 2B_1) & 2(A_3 + B_2) \\ (A_1 + B_2) & (A_2 + 2B_1) & 2(A_3 - B_2) & 2(A_2 - 2B_2) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

onde,

$$A_1 = C_{\xi\xi} a^2 + C_{\eta\eta} b^2 \quad (5.24)$$

$$A_2 = C_{\xi\xi} b^2 + C_{\eta\eta} a^2 \quad (5.25)$$

$$A_3 = (C_{\eta\eta} - C_{\xi\xi}) ab \quad (5.26)$$

$$B_1 = C_{\eta\xi} ab \quad (5.27)$$

$$B_2 = C_{\eta\xi} (a^2 - b^2) \quad (5.28)$$

$$a = \left(\frac{1}{L}\right)(x_1 - x_4) \quad (5.29)$$

$$b = \left(\frac{I}{L}\right)(y_1 - y_4) \quad (5.30)$$

5.3 Elemento de Pande e Sharma (1979)

Conceitualmente, é uma extensão do elemento de interface proposto por Ghaboussi et. al. (1973), considerando-se os deslocamentos relativos nodais como graus de liberdade independentes, mas adotando-se um elemento de interface parabólico formado por 8 pontos nodais (figura 5.3a).

Da figura 4.3b percebe-se que os graus de liberdade nodais são dados por

$$\{\delta^i\} = \{u_{x1}, u_{y1}, u_{x2}, u_{y2}, u_{x3}, u_{y3}, \Delta u_{x4}, \Delta u_{y4}, \Delta u_{x5}, \Delta u_{y5}, \Delta u_{x6}, \Delta u_{y6}, \Delta u_{x7}, \Delta u_{y7}, \Delta u_{x8}, \Delta u_{y8}\} \quad (5.31)$$

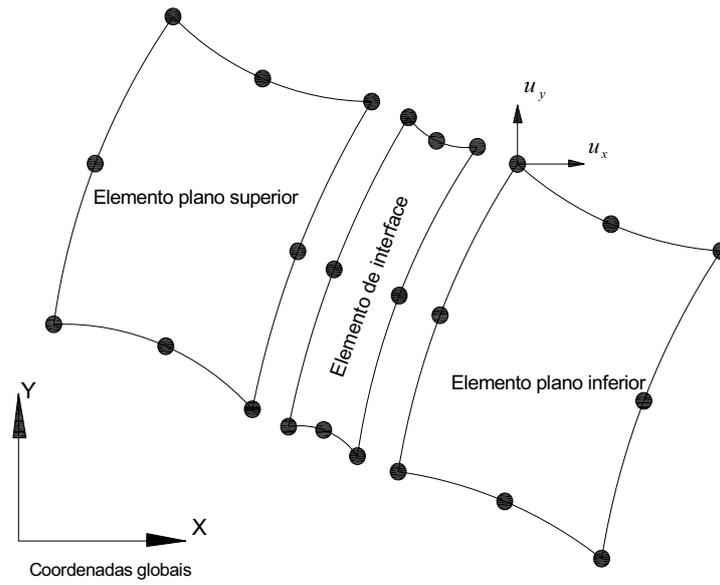


Figura 5.3a - Elemento de interface com dois elementos planos adjacentes [Pande e Sharma (1979)].

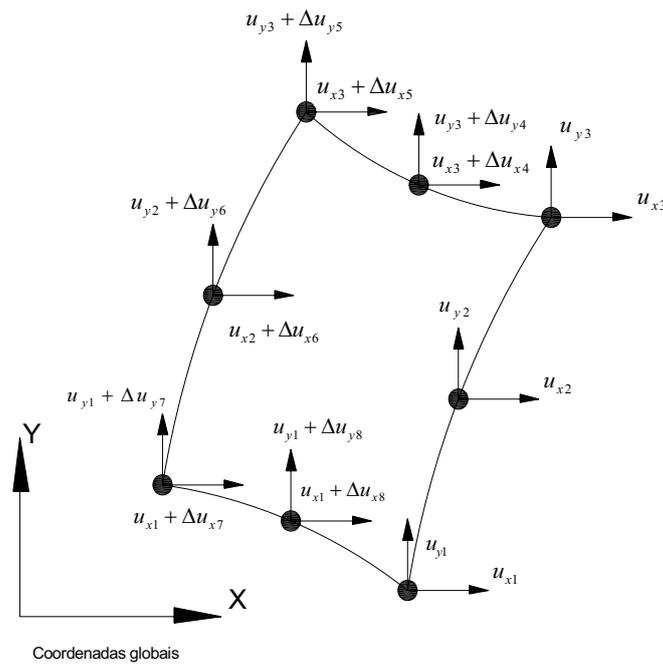


Figura 5.3b - Elemento de interface isoparamétrico parabólico [Pande e Sharma (1979)].

Os deslocamentos nodais $\{\delta\}$ podem ser obtidos através do vetor $\{\delta^i\}$ aplicando-se as condições

$$\begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y2} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \\ u_{x5} \\ u_{y5} \\ u_{x6} \\ u_{y6} \\ u_{x7} \\ u_{y7} \\ u_{x8} \\ u_{y8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y2} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x3} + \Delta u_{x4} \\ u_{y3} + \Delta u_{y4} \\ u_{x3} + \Delta u_{x5} \\ u_{y3} + \Delta u_{y5} \\ u_{x2} + \Delta u_{x6} \\ u_{y2} + \Delta u_{y6} \\ u_{x1} + \Delta u_{x7} \\ u_{y1} + \Delta u_{y7} \\ u_{x1} + \Delta u_{x8} \\ u_{y1} + \Delta u_{y8} \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

ou, ainda.

$$\{\delta\} = [T]\{\delta'\} \quad (5.33)$$

Com a matriz de transformação [T] expressa por

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

A equação de equilíbrio do elemento finito de interface pode então ser escrita como

$$[k]\{\delta\} = \{f\} \quad (5.35)$$

onde, $\{f\}$ representa as componentes das forças nodais aplicadas no elemento.

Reescrevendo esta equação em termos dos graus de liberdade expressos por (5.33), tem-se:

$$[k] [T]\{\delta'\} = [T]\{f'\} \quad (5.36)$$

com,

$$\{f'\} = \{f_{x1}, f_{y1}, f_{x2}, f_{y2}, f_{x3}, f_{y3}, \Delta f_{x4}, \Delta f_{y4}, \Delta f_{x5}, \Delta f_{y5}, \Delta f_{x6}, \Delta f_{y6}, \Delta f_{x7}, \Delta f_{y7}, \Delta f_{x8}, \Delta f_{y8}\} \quad (5.37)$$

de onde resulta:

$$[T]^T [k] [T]\{\delta'\} = \{f'\} \quad (5.38)$$

ou, simplificando

$$[k']\{\delta'\} = \{f'\} \quad (5.39)$$

A matriz de rigidez do elemento plano inferior permanece inalterada (formulada com base nos deslocamentos nodais como graus de liberdade), enquanto que a matriz de rigidez do elemento superior deve ser transformada tendo em vista a interface comum formada pelos nós 5, 6 e 7 com graus de liberdade expressos sob forma de deslocamentos relativos.

Neste processo, é empregada uma nova matriz de transformação $[T]$, de ordem 16x16, resultando em uma matriz de rigidez transformada $[k']$ para o elemento plano superior com dimensão (22x22).

A solução do problema, a partir deste ponto, segue os procedimentos usuais do método dos elementos finitos.

5.4 Elemento de Desai, Lightner e Siriwardane (1984).

O elemento de interface proposto por Desai, Lightner e Siriwardane (1984) é um elemento delgado ("thin-layer element") que pode representar problemas de interação solo-estrutura sob vários modos de deformação, conforme indicado na figura 5.4. A principal vantagem deste elemento é que sua formulação é a mesma dos elementos quadrilaterais planos o que torna sua implementação computacional bastante fácil na maioria dos casos.

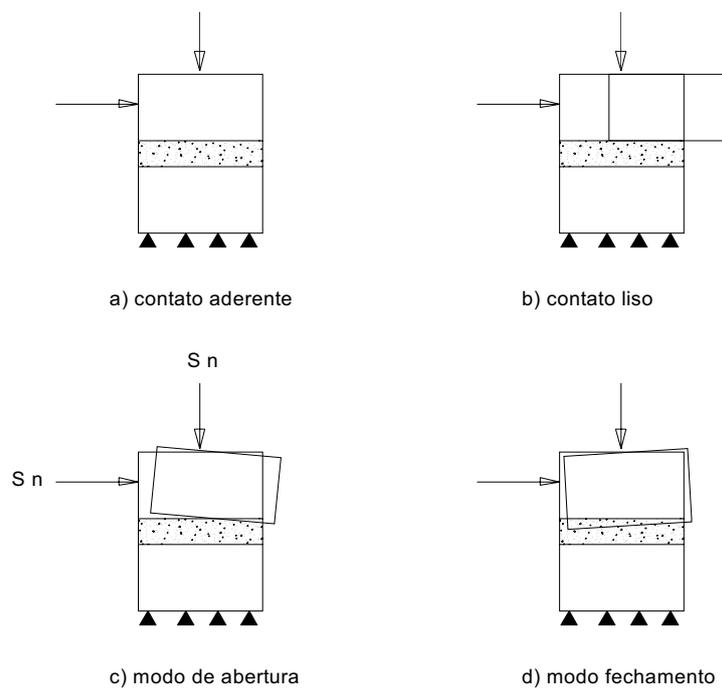


Figura 5.4 - Esquema dos modos de deformação na interface [Desai, Lightner e Siriwardane (1984)].

A matriz constitutiva $[C_I]_i$ do elemento de interface é dada por

$$[C_I]_i = \begin{bmatrix} [C_{\eta\eta}] & [C_{\eta\xi}] \\ [C_{\xi\eta}] & [C_{\xi\xi}] \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Na expressão anterior $[C_{\eta\eta}]$ relaciona-se com as tensões normais, $[C_{\xi\xi}]$ com as tensões cisalhantes e $[C_{\eta\xi}]$, $[C_{\xi\eta}]$ introduzem o efeito de acoplamento na

relação constitutiva. A determinação experimental destes últimos coeficientes é complicada, sendo as componentes de acoplamento geralmente ignoradas.

A componente $[C_{\eta\eta}]$ é função das características do solo, da estrutura e do material na zona de interface:

$$[C_{\eta\eta}] = n_1 [C_{\eta\eta}^i] + n_2 [C_{\eta\eta}^s] + n_3 [C_{\eta\eta}^{est}] \quad (5.41)$$

com n_1 , n_2 e n_3 os fatores de participação (variando entre 0 e 1) das leis constitutivas do solo na interface $[C_{\eta\eta}^i]$ do solo no depósito $[C_{\eta\eta}^s]$ e do elemento estrutural $[C_{\eta\eta}^{est}]$.

A componente de cisalhamento $[C_{\xi\xi}]$ é assumida como o valor do módulo de cisalhamento do material da interface, sendo obtido através da execução do ensaio de cisalhamento direto em laboratório.

$$[C_{\xi\xi}] = G_i(\sigma_n, \tau, u_r) = \frac{\delta[\tau(\sigma_r, u_r)]}{\delta u_r} e |\sigma_n \quad (5.42)$$

onde

G_i é o módulo de cisalhamento do material da interface

σ_n é a tensão normal

τ é a tensão cisalhante

u_r é o deslocamento relativo

e é a espessura do elemento.

A implementação deste elemento de interface segue, daqui por diante, os procedimentos usuais do MEF. Na prática, de acordo com estudos realizados por Desai et. al. (1984), a espessura do elemento de interface deve estar situada no intervalo $0,01L \leq e \leq 0,1L$, sendo L o comprimento do elemento de interface (figura 5.5).

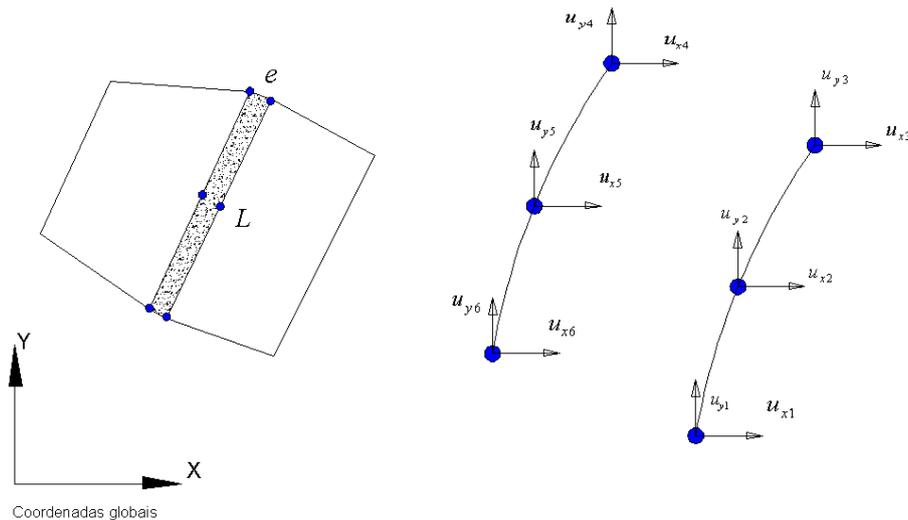


Figura 5.5 - Esquema do elemento de interface [Desai, Lightner e Siriwardane (1984)].

5.5 Critérios e métodos numéricos utilizados nos contornos artificiais do meio contínuo.

Um dos problemas que inevitavelmente deve-se enfrentar na simulação numérica de propagação de ondas no meio semi-infinito é a modelagem dos contornos artificiais. As condições de contorno têm que ser definidas com o objetivo de minimizar os reflexos artificiais das ondas nos bordos do domínio computacional, ou seja, simular a extensão infinita do meio contínuo permitindo que as ondas se propaguem somente da parte interior para a região exterior. Esses contornos artificiais são comumente denominados contornos absorventes (absorbing boundaries).

Os contornos artificiais podem ser subdivididos em dois tipos: contornos absorventes locais e não locais. As condições de contornos absorventes locais são formuladas utilizando operadores diferenciais com respeito ao espaço e tempo e são resolvidos no domínio do tempo. Por outro lado, as condições de contornos absorventes não locais estão descritas através de operadores integrais e diferenciais com respeito ao espaço ou tempo. Geralmente, as condições de contornos absorventes não locais são utilizadas em análises no domínio da frequência. Kausel (1988) refere-se a este tipo de modelos como contornos consistentes não-locais.

5.5.1 Contornos absorventes locais no domínio do tempo

A grande vantagem deste tipo de condição de contorno é que são locais no espaço e tempo, sendo desta maneira numericamente mais eficientes que as condições de contorno não locais. Os contornos absorventes locais fornecem soluções razoavelmente satisfatórias para muitos problemas com pouco esforço numérico. A seguir, apresenta-se uma breve revisão das contribuições mais importantes neste campo de pesquisa. Este tipo de solução foi primeiramente proposto para resolver problemas de interação solo-estrutura em engenharia civil. Lysmer e Kuhlemeyer (1969) desenvolveram o famoso contorno de amortecimento viscoso (viscous damping boundary). Este método atenua consideravelmente as ondas de compressão, mas não diminui suficientemente o reflexo das ondas cortantes. No entanto, hoje em dia, o método de contorno viscoso continua sendo o contorno absorvente mais utilizado nos problemas numéricos de engenharia estrutural, sendo utilizado em programas de elementos finitos com variados propósitos, tais como Abaqus, Adina, Ansys, etc.

A popularidade deste método se deve a sua simples interpretação física na forma de um amortecedor. Posteriormente este método de contorno viscoso foi generalizado por White et al. (1977).

Atualmente, este método é amplamente utilizado nos problemas de propagação de ondas, modeladas através do método de elementos finitos.

5.5.2 Matriz de elementos de contorno

Lysmer e Kuhlemeyer (1969) propuseram elementos de contorno dinâmicos com o propósito de evitar a reflexão da propagação das ondas no contorno da malha. Estes elementos possuem contornos viscosos conectados aos nós da fronteira de uma malha de elementos finitos, cujas propriedades são função do tipo de solo existente naqueles elementos. Mediante esta adequação podem-se absorver perfeitamente as ondas planas incidentes com ângulo normal (90°), mas para outros ângulos, a eficiência não é total.

A seguinte matriz de amortecimento pode ser adicionada nos elementos localizados ao longo do contorno da malha de elementos finitos,

$$C_E^B = \int_S N^{uT} V N^u dS \quad (5.43)$$

com,

$$V = \rho \begin{bmatrix} aV_p & 0 \\ 0 & bV_s \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

A matriz N^u contém as funções de interpolação, ρ é a densidade do material, V_p e V_s são as velocidades de propagação de ondas P e S respectivamente, a e b indicam coeficientes a determinar para minimização da energia refletida no contorno. Lysmer e Kuhlemeyer (1969) sugeriram a adoção de $a = b = 1$.

5.5.3 Controle do tamanho do elemento

Um dos aspectos da análise realizada através de elementos finitos que requer cuidadoso controle é a escolha do tamanho do elemento, principalmente nos casos em que efeitos de alta frequência são importantes.

Kuhlemeyer e Lysmer (1973) constataram que o tamanho do elemento na direção de propagação da onda tem grande influência nos resultados da análise dinâmica, pois grandes elementos mostram-se incapazes de transmitir movimentos sob altas frequências. Aqueles autores propuseram uma regra empírica que o tamanho do elemento finito para uma transmissão eficiente da frequência não deve ser maior do que 1/8 do menor comprimento de onda, atualizando a sugestão anterior (Lysmer e Kuhlemeyer, 1969) que fixava o limite de 1/12.

Estudos mais detalhados da influência do tamanho do elemento finito em análises dinâmicas foram feitos por Celep e Bazant (1983) e Mullen e Belytschko (1982), com as seguintes principais conclusões:

- Quando o comprimento de onda é menor ou igual do que dez vezes o tamanho do elemento na direção de propagação da onda, então o fenômeno de reflexão de ondas espúrias não é importante.
- Uma variação súbita do tamanho dos elementos finitos pode causar significativas reflexões na interface entre os elementos de diferentes tamanhos. O emprego de uma variação gradual do tamanho dos elementos finitos reduz a ocorrência do fenômeno, mas não o elimina.