

3 Formulação do elemento viga-duto

3.1 Introdução

Apresenta-se a seguir o modelo adotado no presente trabalho para o duto o qual recorre a um modelo de viga específico para dutos enterrados. Neste modelo efeitos de enrugamento local não são contemplados.

O elemento viga-duto desenvolvido neste capítulo, é apropriado para representar os carregamentos usuais atuantes em dutos enterrados e avaliar as deformações do sistema estrutural.

A formulação do elemento viga-duto inclui os seguintes tópicos:

- Hipóteses cinemáticas fundamentais.
- Relações constitutivas.
- Equação de trabalho virtual.
- Discretização do elemento finito

3.2 Hipóteses do modelo matemático

As seguintes hipóteses são formuladas no desenvolvimento do modelo matemático.

- Seções planas do tubo permanecem planas e o tubo permanece com a seção transversal constante, ou seja, perfeitamente circular.
- Tensões radiais e cisalhantes são insignificantes e podem ser ignoradas.
- Tensões longitudinais e circunferenciais são de magnitude considerável, motivo pelo qual devem ser levadas em conta.

- Considera-se o material do tubo com comportamento elasto-plástico com escoamento segundo o critério de von Mises.
- Todas as deformações ativas e tensões distribuídas são simétricas em relação ao plano vertical da seção transversal do duto. (ou seja, flexão em um plano).

Estas hipóteses são baseadas na seguinte interpretação do comportamento de dutos.

A hipótese cinemática da teoria de vigas de Bernoulli (primeira hipótese) é justificada, porque a distorção da seção transversal resulta principalmente do enrugamento local.

Uma linha de tubulação é uma estrutura flexível linear onde deformações axiais e de flexão são dominantes. Conseqüentemente tensões de corte têm menor influencia na resposta de linhas de tubulação.

Como a espessura da parede do duto é significativamente pequena em comparação com o diâmetro e comprimento do duto, a tensão radial é desprezada comparada com as tensões longitudinal e circunferencial. A segunda hipótese é baseada nestes fatos.

A quarta hipótese define o emprego da teoria de plasticidade para a análise. Embora, muitas outras teorias estejam disponíveis, esta teoria é a mais usada para materiais metálicos semelhantes a um duto de aço.

3.3 Hipóteses cinemáticas fundamentais

Os sistemas de coordenadas global e local para o modelo de viga-duto são definidos na figura (3.1), onde o eixo x do sistema local de coordenadas passa através do eixo central da seção transversal, e o plano $x-y$ define o plano de flexão da viga.

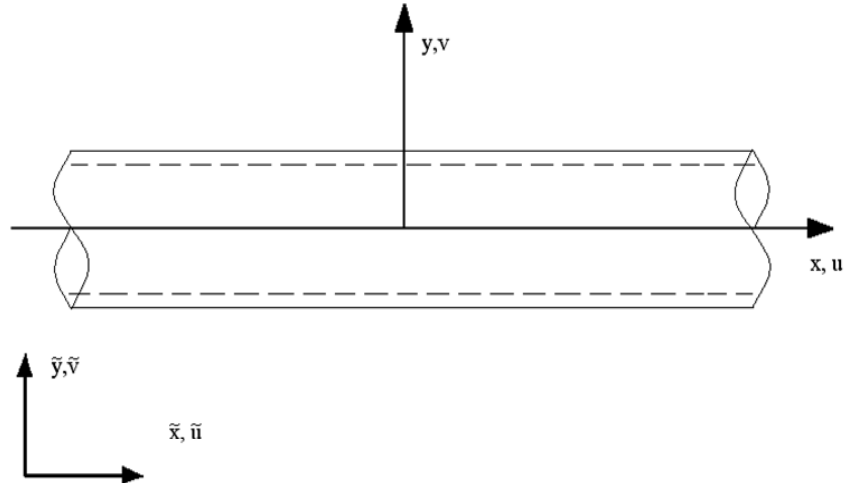


Figura 3.1 - Sistema de coordenadas, global e local.

Os deslocamentos u e v são na direção do eixo x e eixo y respectivamente no sistema de coordenadas local.

O sistema de coordenadas global é denotado por $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ e todas as quantidades definidas no sistema global de coordenadas são similarmente denotadas, com um til sobreposto à letra.

Os vetores ${}_t u_o$ e ${}_t v_o$ são os deslocamentos incrementais do eixo central da seção transversal relativos à configuração de referência Γ ver figuras (3.2) e (3.3).

As componentes de deslocamento incremental de qualquer ponto na seção transversal podem ser expressas de acordo com a seguinte equação de acordo com a primeira hipótese na seção 3.1.

$${}_t u = {}_t u_o - \frac{d_t v_o}{d^t x} y \quad (3.1a)$$

$${}_t v = {}_t v_o \quad (3.1b)$$

Os deslocamentos totais no sistema de coordenadas globais são apresentados como:

$${}^{t+\Delta t} \tilde{u} = {}^t \tilde{u} + {}_t \tilde{u} \quad (3.2a)$$

$${}^{t+\Delta t} \tilde{v} = {}^t \tilde{v} + {}_t \tilde{v} \quad (3.2b)$$

E as configurações deformadas para diferentes instantes são apresentadas na figura 3.2; em quanto que a seção deformada do duto é apresentada na figura 3.3.

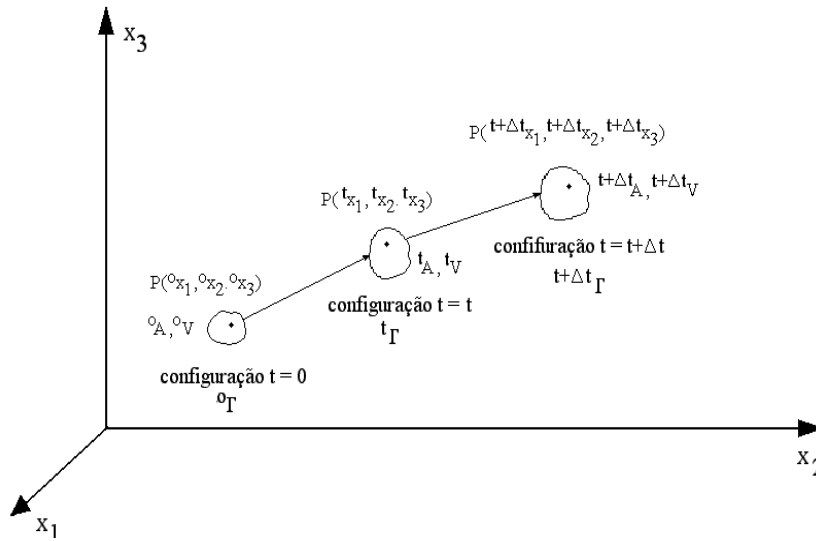


Figura 3.2 - Configurações deformadas para $t = 0$, $t = t$ e $t = t + \Delta t$.

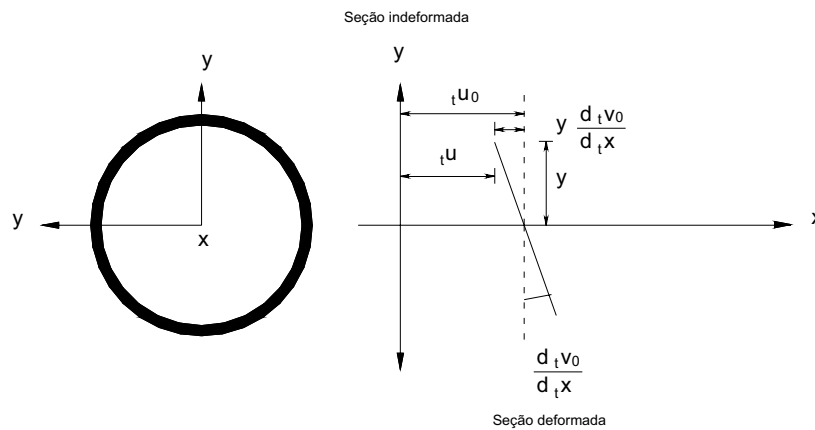


Figura 3.3 - Deformações no tubo fletido.

Os deslocamentos do eixo centroidal são obtidos a partir dos deslocamentos incrementais.

$${}^{t+\Delta t} \tilde{u}_o = {}^t \tilde{u}_o + {}_t \tilde{u}_o \quad (3.3.a)$$

$${}^{t+\Delta t} \tilde{v}_o = {}^t \tilde{v}_o + {}_t \tilde{v}_o \quad (3.3.b)$$

onde as quantidades com subíndices à esquerda são os valores totais de tempo indicado pelo índice. Esta notação é usada por Bathe (1982) e será aplicada no decorrer da próxima seção.

Os incrementos ${}_t\tilde{u}_o$ e ${}_t\tilde{v}_o$ são determinados a partir da equação de equilíbrio incremental, e os incrementos no sistema local de coordenadas ${}_tu$ e ${}_tv$ são obtidos por transformação de coordenadas:

$${}_tu_o = \cos {}^t\alpha {}_t\tilde{u}_o + \sin {}^t\alpha {}_t\tilde{v}_o \quad (3.4.a)$$

$${}_tv_o = -\sin {}^t\alpha {}_t\tilde{u}_o + \cos {}^t\alpha {}_t\tilde{v}_o \quad (3.4.b)$$

$${}^t\alpha = \arctan \frac{d {}^t\tilde{y}_o}{d {}^t\tilde{x}_o} \quad (3.5)$$

A única componente diferente de zero do tensor de deformações é a deformação axial na direção x . A forma incremental para esta componente de deformação pode ser derivada a partir da expressão geral do tensor de deformação tridimensional usado por Bathe (1982) como:

$$({}^{t+\Delta t}){}_t\mathcal{E}_x = {}^t\mathcal{E}_x + {}_t\mathcal{E}_x \quad (3.6)$$

com a deformação incremental dada por:

$${}_t\mathcal{E}_x = \frac{d {}_tu}{d {}^tx} \quad (3.7)$$

Os índices à esquerda indicam a configuração ${}^t\Gamma$ tomada como a configuração de referência.

Substituindo as equações (3.1) e (3.2) na equação (3.7) a componente de deformação pode ser expressa em termos de componentes de deslocamento do eixo centroidal.

$${}_t\varepsilon_x = \frac{d {}_t u_o}{d {}^t x} - y \frac{d^2 {}_t v_o}{d {}^t x^2}. \quad (3.8)$$

A seguir são definidas a deformação incremental linear axial no eixo centroidal e a curvatura incremental linear respectivamente:

$${}_t\varepsilon_o = \frac{d {}_t u_o}{d {}^t x} \quad (3.9)$$

$${}_t\phi = \frac{d^2 {}_t v_o}{d {}^t x^2} \quad (3.10)$$

Substituindo-se as definições anteriores obtém-se a componente de deformação axial em um ponto qualquer da seção:

$${}_t\varepsilon_x = {}_t\varepsilon_o - y {}_t\phi \quad (3.11)$$

3.4 Relações constitutivas

A relação tensão-deformação para um elemento viga-duto é uma relação uniaxial no sistema de coordenadas locais, porque a pressão interna é considerada constante (condição essencial de carregamento do duto). A tensão circunferencial constante introduzida pela pressão interna deve ser levada em conta na relação tensão-deformação.

O uso da teoria da plasticidade se baseia no critério de escoamento de von Mises, ou seja, o escoamento se inicia quando a média quadrática das diferenças entre as três tensões principais se iguala a tensão total efetiva. As equações (3.12) e (3.13) apresentam o critério de escoamento e a tensão total efetiva respectivamente.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} S_y \quad (3.12)$$

$${}^t\bar{S} = \sqrt{\frac{1}{2}(4{}^tS_{\theta}^2 + 4{}^tS_x^2 + 2S_x S_{\theta})} \quad (3.13)$$

onde S_y é o valor da máxima tensão cisalhante que causa o início do escoamento no ensaio de tração.

A relação tensão-deformação uniaxial implica que componentes incrementais de deformação plástica podem existir em três direções, enquanto as tensões incrementais estão só na direção x .

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^tS_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^tS_{\theta} \\ {}^tS_r \\ {}^tS_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda' \lambda \lambda \\ \lambda \lambda' \lambda \\ \lambda \lambda \lambda' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\epsilon_{\theta} \\ {}^t\epsilon_r \\ {}^t\epsilon_x \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^tP_{\theta\theta} & {}^tP_{\theta r} & {}^tP_{\theta x} \\ {}^tP_{r\theta} & {}^tP_{rr} & {}^tP_{rx} \\ {}^tP_{x\theta} & {}^tP_{xr} & {}^tP_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^t\epsilon_{\theta} \\ {}^t\epsilon_r \\ {}^t\epsilon_x \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

onde

$$\lambda' = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.15.a)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.15.b)$$

$${}^tP_{mn} = \frac{3G}{(1+H'/(G)){}^t\bar{S}^2} {}^tS_{mm} {}^tS_{nn} \quad \text{para } m, n = \theta, r, x \quad (3.15.c)$$

Na nomenclatura acima índices repetidos não indicam soma e o valor do parâmetro H' é:

$$H' = \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (3.16)$$

sendo E e E_T os modulo de rigidez para o caso da relação tensão deformação bi linear usada nesta formulação.

Os subíndices θ e r representam as direções circunferencial e radial. O tensor desviador de tensões é definido como:

$${}^t s_{ij} = {}^t S_{ij} - \frac{1}{3} {}^t S_{kk} \delta_{ij} \quad (3.17)$$

Para a hipótese de tensão radial nula, a componente normal do tensor desviador de tensões fica:

$${}^t s_{\theta} = \frac{1}{3} (2 {}^t S_{\theta} + {}^t S_x) \quad (3.18.a)$$

$${}^t s_r = \frac{-1}{3} ({}^t S_{\theta} + {}^t S_x) \quad (3.18.b)$$

$${}^t s_x = \frac{1}{3} (2 {}^t S_x - {}^t S_{\theta}) \quad (3.18.c)$$

Entre as componentes da deformação incremental plástica, a componente na direção x é independente. As outras duas componentes relacionam-se à componente axial através das restrições de tensões incrementais nulas nessas direções. Portanto a relação entre a tensão incremental independente e a deformação incremental independente pode ainda ser considerada como um tipo especial de relação tensão-deformação uniaxial.

Se tensões cisalhantes e correspondentes deformações cisalhantes são desprezadas, a relação incremental tensão-deformação pode ser expressa da seguinte forma:

Índices simples são usados porque só as componentes normais são consideradas.

A tensão circunferencial ${}^t S_{\theta}$ pode ser calculada como:

$${}^t S_{\theta} = \left(\frac{D-2t}{2t} p \right) \quad (3.19)$$

Sendo D e t , diâmetro exterior e espessura do duto, e p a pressão interna respectivamente.

As tensões incrementais na direção radial e circunferencial são nulas porque a tensão radial é assumida nula e a tensão circunferencial é constante devido à condição de pressão interna de operação constante no duto.

Aplicando estas condições às duas primeiras equações obtemos o seguinte:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \lambda' & \lambda \\ \lambda & \lambda' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^t P_{\theta\theta} & {}^t P_{\theta r} \\ {}^t P_{r\theta} & {}^t P_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} {}_t \varepsilon_{\theta} \\ {}_t \varepsilon_r \end{Bmatrix} + \left(\begin{Bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^t P_{\theta x} \\ {}^t P_{rx} \end{Bmatrix} \right) {}_t \varepsilon_x \quad (3.20)$$

resolvendo a equação acima tem-se:

$$\begin{Bmatrix} {}_t \varepsilon_{\theta} \\ {}_t \varepsilon_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t C_{\theta x} \\ {}^t C_{rx} \end{Bmatrix} \cdot {}_t \varepsilon_x \quad (3.21)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} {}^t C_{\theta x} \\ {}^t C_{rx} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda' - {}^t P_{\theta\theta} & \lambda - {}^t P_{\theta r} \\ \lambda - {}^t P_{r\theta} & \lambda' - {}^t P_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \lambda - {}^t P_{\theta x} \\ \lambda - {}^t P_{rx} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

A terceira linha da equação (3.14) descreve a relação tensão-deformação incremental entre a tensão independente e deformação longitudinal que pode ser expressa como:

$${}_t S_x = {}^t C^{EP} {}_t \varepsilon_x \quad (3.23)$$

onde

$${}^t C^{EP} = {}^t C_{\theta x} (\lambda - {}^t P_{x\theta}) + {}^t C_{rx} (\lambda - {}^t P_{xr}) + \lambda' - {}^t P_{xx} \quad (3.24)$$

Observa-se que para incrementos elásticos de deformação o coeficiente do material recai na relação elástica.

$${}_t S_x = E {}_t \varepsilon_x \quad (3.25)$$

A deformação plástica efetiva incremental pode ser expressa pela seguinte expressão:

$$\overline{\varepsilon^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \left((\varepsilon_\theta^p)^2 + (\varepsilon_r^p)^2 + (\varepsilon_x^p)^2 \right)} \quad (3.26)$$

onde os componentes da deformação plástica incremental são:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta^p \\ \varepsilon_r^p \\ \varepsilon_x^p \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tP_{\theta\theta} & {}^tP_{\theta r} & {}^tP_{\theta x} \\ {}^tP_{r\theta} & {}^tP_{rr} & {}^tP_{rx} \\ {}^tP_{x\theta} & {}^tP_{xr} & {}^tP_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^tC_{\theta x} \\ {}^tC_{rx} \\ 1 \end{Bmatrix} {}^t\varepsilon_x \quad (3.27)$$

É essencialmente correto assumir que seções planas permanecem planas e circulares porque os efeitos de enrugamento local não são levados em conta. Conseqüentemente as forças internas do elemento viga-duto são dependentes somente da distribuição de tensões longitudinais.

Os esforços resultantes podem ser definidos como:

$${}^tF = \int_A {}^tS_x dA \quad (3.28)$$

$${}^tM = \int_A {}^tS_x y dA \quad (3.29)$$

onde tF e tM são força axial e momento flexor, respectivamente e y é a coordenada no plano de flexão.

A relação constitutiva pode ser especificada no nível de tensão-deformação onde as tensões podem ser avaliadas diretamente para deformação incremental.

Para um estado de tensões obtido pelo procedimento anterior as forças internas tF e tM na seção transversal são integradas numericamente. O número de pontos onde são avaliadas as forças internas na seção transversal depende da divisão adotada para a mesma, isto é cada parcela de área tem um incremento de força interna segundo sua posição e sua área.

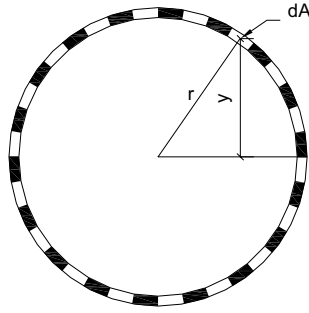


Figura 3.4 - Exemplo de divisão da seção transversal do duto.

Finalmente a descrição do comportamento elastoplástico implementado neste trabalho, atende também as seguintes definições.

Lei de evolução das deformações plásticas.

$$\chi \left(\frac{\partial F}{\partial S} \right) = \chi(\psi) \quad (3.30)$$

Critério de plastificação.

$$F(S, \kappa) = f(S) - S(\kappa) \leq 0 \quad (3.31)$$

Lei de evolução do encruamento

$$\kappa = \int d\kappa = \int d\bar{\epsilon}^p \quad (3.32)$$

onde κ é o parâmetro de encruamento definido em função do incremento de deformação plástica equivalente.

A noção de carregamento/descarregamento pode ser definida através das condições de Kuhn-Tucker, expressas como:

$$F(S, \kappa) \leq 0, \quad \chi \geq 0, \quad \chi F(S, \kappa) = 0 \quad (3.33)$$

A relação 3.31 é conhecida como princípio da normalidade, pode ser interpretada como a condição de que o vetor incremento de deformação plástica

seja normal à superfície de plastificação no espaço das tensões, pois $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}$ é um vetor de direção normal à superfície de escoamento no ponto referente ao estado de tensão como apresenta a figura 3.5.

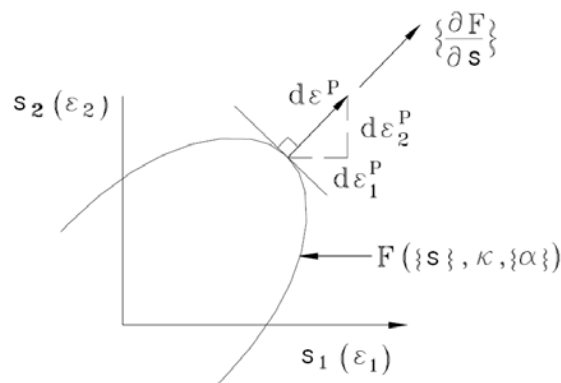


Figura 3.5 - Superfície de plastificação: princípio da normalidade.

O comportamento elastoplástico neste trabalho é aproximado por meio de técnicas de integração implícita considerando plasticidade associativa com encruamento isotrópico e critério de von Mises.

3.4.1 Algoritmo implícito de Euler (Backward Euler)

O procedimento implícito por si só garante a convergência e estabilidade, evitando a aplicação de técnicas, tais como sub-incrementação. Este é incondicionalmente estável e caracteriza-se, através de uma interpretação geométrica, por proporcionar um retorno à superfície de plastificação segundo a direção normal à própria superfície na posição atual, como pode ser observado na figura 3.6. Para o caso específico do critério de von Mises e lei de fluxo associativa a projeção proporcionada pelo procedimento implícito ocorre sempre na direção radial, sendo por isso denominado “Radial Return Mapping”.

Segundo Simo & Hughes (1988), este procedimento implícito garante a convergência quadrática inerente ao método de Newton-Raphson fazendo uso da matriz tangente elastoplástica consistente.

As relações do algoritmo implícito, particularizadas para o modelo proposto, podem ser escritas, da seguinte forma:

Deformações totais

$$\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_t + \nabla u \quad (3.34)$$

Tensões

$$S_{t+1} = D_e (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_{t+1}^p) \quad (3.35)$$

Deformações plásticas

$$\varepsilon_{t+1}^p = \varepsilon_t^p + \chi \left(\frac{\partial F}{\partial S} \right)_{t+1} = \varepsilon_t^p + \chi(\psi)_{t+1} \quad (3.36)$$

Parâmetro de encruamento

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + \Delta \kappa_{t+1} = \kappa_t + \Delta \bar{\varepsilon}_{t+1}^p \quad (3.37)$$

Deformação plástica efetiva

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{t+1}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\Delta \varepsilon_{t+1}^p\| \quad (3.38)$$

Lei de encruamento

$$S(\kappa_{t+1}) = S_y + H' \kappa_{t+1} \quad (3.39)$$

Critério de plastificação

$$F(S_{t+1}, \kappa_{t+1}) = f(S_{t+1}) - S(\kappa_{t+1}) \leq 0 \quad (3.40)$$

onde ∇ é o operador de deformações que atua sobre o campo de deslocamentos u definido no passo de tempo $[t, t + \Delta t]$, D_e é a matriz constitutiva elástica, S_y é tensão de escoamento inicial.

A figura 3.6 mostra em forma gráfica o procedimento de integração implícito e explícito.

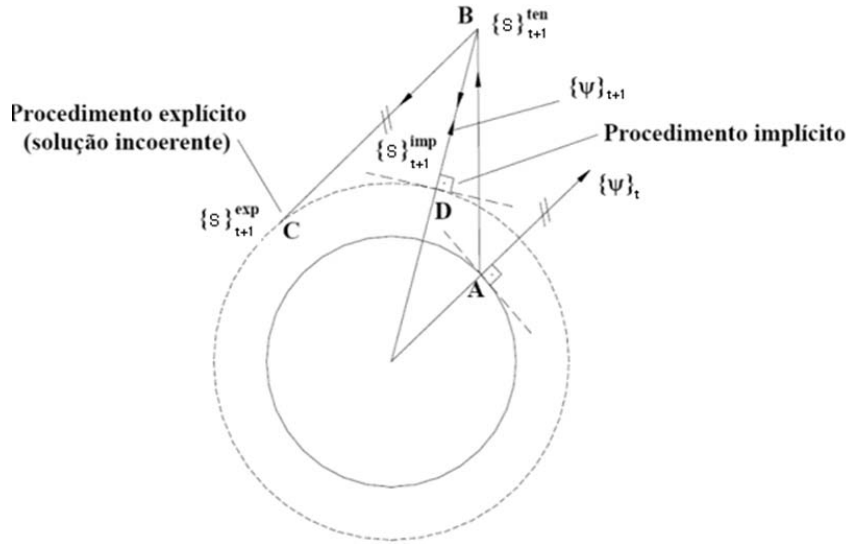


Figura 3.6 - Procedimento de integração implícito e explícito.

3.4.2 Integração das tensões

No processo de integração das tensões pelo procedimento implícito, é necessário considerar uma etapa de previsão, que é tomado como um passo puramente elástico, através das seguintes relações:

$$\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_t + \nabla u \quad (3.41)$$

$$S_{t+1}^{ten} = D_e (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t^p) \quad (3.42)$$

$$F(S_{t+1}^{ten}, \kappa_t) = f(S_{t+1}^{ten}) - S(\kappa_t) \quad (3.43)$$

Se o estado de tensão, obtido na previsão elástica, não violar a condição de plastificação, encontrando-se na superfície de plastificação ou em seu interior, significa que o estado obtido é admissível e compatível com o modelo adotado. Por outro lado, se as tensões obtidas estiverem fora da superfície de plastificação um outro estado de tensão deve ser procurado de modo a se tornar compatível com o modelo adotado. Desta forma tem-se:

$$S_{t+1} = [\Xi(\chi)] D_e^{-1} S_{t+1}^{ten} \quad (3.44)$$

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + \Delta \kappa_{t+1} = \kappa_t + \Delta \bar{\varepsilon}_{t+1}^P \chi \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{t+1}^p = \varepsilon_t^p + \chi \left(\frac{\partial F}{\partial S} \right)_{t+1} = \varepsilon_t^p + \varepsilon_t^p + \chi(\psi)_{t+1} \quad (3.46)$$

onde Ξ é a matriz tangente elástica modificada definida como:

$$[\Xi] = \left[\left[D_e^{-1} \right] + \chi \left(\frac{\partial \psi}{\partial S} \right)_{t+1} \right]^{-1} \quad (3.47)$$

Deve-se observar que as expressões 3.44, 3.45 e 3.46 dependem da determinação do parâmetro χ (multiplicador plástico).

Para uma melhor compreensão de todo o procedimento implícito aqui discutido, apresenta-se, de forma resumida, os passos do algoritmo.

- Atualizar as deformações e calcular as tensões de tentativa

$$\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_t + \nabla u$$

$$S_{t+1}^{ten} = D_e (\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t^p)$$

- Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$F(S_{t+1}^{ten}, \kappa_t) = f(S_{t+1}^{ten}) - S(\kappa_t)$$

- Se $F_{t+1}^{ten} \leq 0$

Então: finalizar

Senão: resolver a equação de consistência e determinar χ

$$F(S_{t+1}, \kappa_{t+1}) = f(S(\chi)_{t+1}) - S(\kappa(\chi)_{t+1}) = 0$$

- Atualizar as variáveis internas com o valor de χ

$$S_{t+1} = [\Xi(\chi)] D_e^{-1} S_{t+1}^{ten}$$

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + \Delta \kappa_{t+1} = \kappa_t + \Delta \bar{\varepsilon}_{t+1}^P \chi$$

$$\varepsilon_{t+1}^p = \varepsilon_t^p + \chi \left(\frac{\partial F}{\partial S} \right)_{t+1} = \varepsilon_t^p + \varepsilon_t^p + \chi(\psi)_{t+1}$$

3.5 Equação de trabalho virtual incremental

Definidos os tensores de tensão e deformação e a relação constitutiva, a equação de trabalho virtual do duto pode ser desenvolvida.

Considere-se um duto sujeito a um conjunto de forças que lhe provocam uma deformação. Com base no seu estado de equilíbrio, a configuração do corpo é modificada por um conjunto de deslocamentos pequenos e compatível com as condições fronteira, que se designam deslocamentos virtuais. O princípio dos trabalhos virtuais ou princípio dos deslocamentos virtuais estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas na deformação virtual do duto é igual ao trabalho realizado pelas forças exteriores nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação. De um modo mais simplista é correto afirmar que o trabalho interno de deformação é igual ao trabalho externo das forças aplicadas.

$$\text{Trabalho Interno} = \text{Trabalho Externo} \quad (3.48)$$

Apresenta-se em seguida a expressão do princípio dos trabalhos virtuais (PTV) adaptada ao caso da viga-duto de acordo com as hipóteses apresentadas. Nas expressões que se seguem, o prefixo δ indica que os deslocamentos ou deformações são virtuais.

A equação do trabalho virtual do sistema é

$$\int_{0_v}^{t+\Delta t} {}_0S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} {}_0\varepsilon_{ij} d^0V = \int_{0_v} F_i \delta {}^{t+\Delta t} u_i d^0V + \int_{0_s} T_i \delta {}^{t+\Delta t} u_i d^0S \quad (3.49)$$

onde

$${}^{t+\Delta t} {}_0S_{ij} = {}^t {}_0S_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (3.50)$$

$${}^{t+\Delta t} {}_0\varepsilon_{ij} = {}^t {}_0\varepsilon_{ij} + {}_0\varepsilon_{ij} \quad (3.51)$$

A equação de trabalho virtual pode ser obtida levando em conta as componentes de tensão e deformação do elemento viga-duto. Isto poder ser expresso como:

$$\int_{l_v}^{t+\Delta t} S_x \delta^{t+\Delta t} \epsilon_x d'V + \int_{l_v}^{t+\Delta t} S_\theta \delta^{t+\Delta t} \epsilon_\theta d'V = \delta^{t+\Delta t} W_{ext} \quad (3.52)$$

Os dois primeiros termos representam o trabalho virtual das tensões do duto e a parte direita da equação é o trabalho virtual externo originado pela aplicação de carga. Considerando as seguintes relações:

$$^{t+\Delta t} S_x = {}^t S_x + {}_t S_x \quad (3.53)$$

$$^{t+\Delta t} S_\theta = {}^t S_\theta = \text{Constante} \quad (3.54)$$

$$\delta^{t+\Delta t} \epsilon_x = \delta_t \epsilon_x \quad (3.55)$$

$$\delta^{t+\Delta t} \epsilon_\theta = \delta_t \epsilon_\theta = {}^t C_{\theta x} \delta_t \epsilon_x \quad (3.56)$$

onde as equações (3.18) e (3.21) são usadas para obter respectivamente as equações (3.53), (3.54), (3.55) e (3.56), logo os dois termos na equação (3.49) resultam:

$$I + II = \int_{l_v} ({}^t S_x \delta_t \epsilon_x + {}_t S_x \delta_t \epsilon_x) d'V + \int_{l_v} ({}^t S_\theta {}^t C_{\theta x} \delta_t \epsilon_x) d'V \quad (3.57)$$

Os algarismos romanos I e II representam os termos da equação (3.52). Substituindo a equação (3.23) na equação anterior e integrando na seção transversal temos:

$$I + II = \int_{l_v} \left(({}^t K_{1t} \epsilon_o + {}^t K_{3t} \phi) \delta_t \epsilon_o + ({}^t K_{3t} \epsilon_o + {}^t K_{2t} \phi) \delta_t \phi \right) d'x + \int_{l_v} ({}^t F_{eq} \delta_t \epsilon_o + {}^t M_{eq} \delta_t \phi) d'x \quad (3.58)$$

onde os termos de mais alta ordem são ignorados. Os coeficientes

$${}^tK_1 = \int_A {}^tC^{EP} d^tA \quad (3.59.a)$$

$${}^tK_2 = \int_A {}^tC^{EP} y^2 d^tA \quad (3.59.b)$$

$${}^tK_3 = - \int_A {}^tC^{EP} y d^tA \quad (3.59.c)$$

Representam a rigidez da seção transversal. As forças internas totais equivalentes no tempo t são definidas como

$${}^tF_{eq} = \int_A ({}^tS_x + {}^tC_{\theta x} + {}^tS_\theta) d^tA \quad (3.60.a)$$

$${}^tM_{eq} = - \int_A ({}^tS_x + {}^tC_{\theta x} + {}^tS_\theta) y d^tA \quad (3.60.b)$$

As forças internas totais equivalentes constam da contribuição de tensão axial da tensão circunferencial e são definidas com base no trabalho virtual equivalente.

$$\begin{aligned} & \int_L \left(({}^tK_{1t} \varepsilon_o + {}^tK_{3t} \phi) \delta_t \varepsilon_o + ({}^tK_{3t} \varepsilon_o + {}^tK_{2t} \phi) \delta_t \phi \right) d^t x \\ & = \delta^{t+\Delta t} W_{ext} - \int_L ({}^tF_{eq} \delta_t \varepsilon_o + {}^tM_{eq} \delta_t \phi) d^t x \end{aligned} \quad (3.61)$$

Esta é a equação de trabalho virtual incremental para um elemento viga-duto.

3.6 Discretização em elementos finitos

Estabelecida a equação do trabalho incremental virtual na equação (3.61), a discretização em elementos finitos pode ser desenvolvida. O procedimento de discretização inclui: interpolação de deslocamentos, expressões matriciais da relação deformação - deslocamento e relações constitutivas, e finalmente a equação de equilíbrio para o elemento viga-duto com matrizes de rigidez e vetores de carga, e equilíbrio para a estrutura.

3.6.1 Interpolação de deslocamentos

Treliças, vigas retas e pórticos, em geral, são representados por seus eixos baricêntricos, que podem ser discretizados por um elemento finito unidimensional.

$${}^t\xi = \frac{2{}^t x}{{}^t L} \quad (3.62)$$

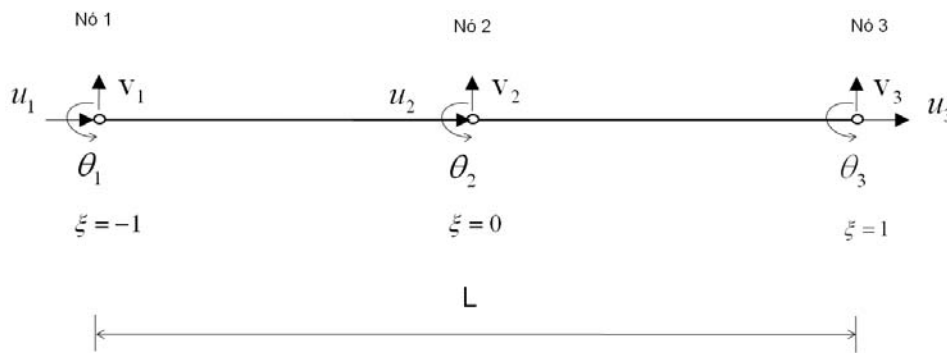


Figura 3.7 - Elemento de viga com três nós.

Para o elemento acima são considerados três graus de liberdade por nó: deslocamento axial, deslocamento transversal e rotação de nó.

Dados u_1 , u_2 e u_3 o deslocamento u em qualquer ponto do elemento finito fica determinado pela função aproximadora $u(\xi)$.

$$u({}^t\xi) = a_0 + a_1 {}^t\xi + a_2 {}^t\xi^2 \quad (3.63)$$

A partir desta função obtemos as seguintes funções de interpolação.

$${}^tN_1 = 1 - {}^t\xi \quad (3.64)$$

$${}^tN_4 = {}^t\xi \quad (3.65)$$

$${}^tN_7 = \frac{1}{2} {}^t\xi (1 + {}^t\xi) \quad (3.66)$$

Dados os deslocamentos transversais v_1 , v_2 e v_3 , e as rotações θ_1 , θ_2 e θ_3 , o deslocamento v em qualquer ponto do elemento finito fica determinado pela função $v(\xi)$.

$$v(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 \quad (3.67)$$

A partir desta função a obtemos as seguintes funções de interpolação.

$${}^tN_2 = \frac{1}{4} \xi^2 (3\xi + 4)(-1 + \xi)^2 \quad (3.68)$$

$${}^tN_3 = \frac{1}{8} \xi^2 L(1 + \xi)(-1 + \xi)^2 \quad (3.69)$$

$${}^tN_5 = (-1 + \xi)^2 (1 + \xi)^2 \quad (3.70)$$

$${}^tN_6 = \frac{1}{2} \xi L(-1 + \xi)^2 (1 + \xi)^2 \quad (3.71)$$

$${}^tN_8 = -\frac{1}{4} \xi^2 (3\xi - 4)(1 + \xi)^2 \quad (3.72)$$

$${}^tN_9 = \frac{1}{8} \xi^2 L(-1 + \xi)(1 + \xi)^2 \quad (3.73)$$

Os deslocamentos incrementais no sistema local de coordenadas podem ser expressos como:

$$\begin{Bmatrix} {}^t u_0 \\ {}^t v_0 \end{Bmatrix} = [{}^t N] \{ {}^t u_e \} \quad (3.74.a)$$

onde

$$[{}^t N] = \begin{bmatrix} {}^t N_1 & 0 & 0 & {}^t N_4 & 0 & 0 & {}^t N_7 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t N_2 & {}^t N_3 & 0 & {}^t N_5 & {}^t N_6 & 0 & {}^t N_8 & {}^t N_9 \end{bmatrix} \quad (3.74.b)$$

e

$$\{ {}_t u_e \} = \begin{Bmatrix} {}_t u_1 \\ {}_t v_1 \\ {}_t \theta_1 \\ {}_t u_2 \\ {}_t v_2 \\ {}_t \theta_2 \\ {}_t u_3 \\ {}_t v_3 \\ {}_t \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

Há seis componentes de deslocamentos associados com o deslocamento transversal e três associados com o deslocamento longitudinal. A interpolação é quadrática para o deslocamento longitudinal e de quinto grau para o deslocamento transversal.

Os deslocamentos nodais incrementais no sistema de coordenadas local podem ser obtidos pela seguinte transformação:

$$\{ {}_t u_e \} = \begin{bmatrix} [{}^t T] & 0 & 0 \\ 0 & [{}^t T] & 0 \\ 0 & 0 & [{}^t T] \end{bmatrix} \{ {}_t \tilde{u}_e \} \quad (3.76)$$

onde $\{ {}_t \tilde{u}_e \}$ é o vetor de deslocamentos incrementais nodais no sistema de coordenadas global, e

$$[{}^t T] = \begin{bmatrix} \cos {}^t \alpha & \sin {}^t \alpha & 0 \\ -\sin {}^t \alpha & \cos {}^t \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

com

$${}^t \alpha = \arcsin \left(\frac{{}_t y_3 - {}^t y_1}{{}_t L} \right) \quad (3.78)$$

Esta é a forma incremental para a orientação do elemento.

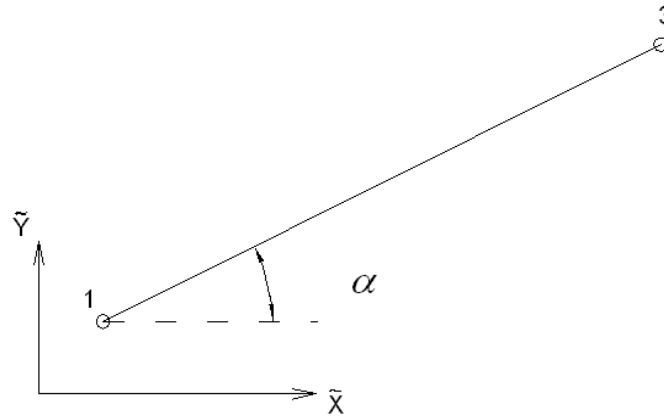


Figura 3.8 - Inclinação do elemento de viga-duto

3.6.2 Matrizes de deformação-deslocamento

As deformações foram definidas na seção (3.3) e suas os componentes estão dadas pelas equações (3.9) e (3.10). Substituindo os deslocamentos incrementais da equação (3.74) na equação (3.9) e (3.10) as componentes de deformação tornam-se:

$$\begin{Bmatrix} {}^t\epsilon_o \\ {}^t\phi \end{Bmatrix} = [{}^tB] \{ {}^tu_e \} \quad (3.79)$$

onde

$$[{}^tB^L] = \begin{bmatrix} {}^tN_1' & 0 & 0 & {}^tN_4' & 0 & 0 & {}^tN_7' & 0 & 0 \\ 0 & {}^tN_2'' & {}^tN_3'' & 0 & {}^tN_5'' & {}^tN_6'' & 0 & {}^tN_8'' & {}^tN_9'' \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

A prima simples e prima dupla na equação (3.80) representa a primeira e segunda derivada com respeito à coordenada tx local do elemento.

3.6.3 Equações de equilíbrio para o elemento finito

De acordo com a discretização dos deslocamentos, das deformações do duto e dos deslocamentos das molas discretizados, a equação de trabalho incremental virtual resulta na equação matricial de equilíbrio do elemento finito. Substituindo as equações (3.74) e (3.79) na equação (3.61) tem-se:

$$\sum_{^tL_e} \int \{\delta_{^t u_e}\}^T [^t B]^T [^t D^p] [^t B] \{^t u_e\} d^t x = \sum \left(\{\delta_{^t u_e}\}^T \{^t p_{ext}^e\} - \int_{^tL_e} \{\delta_{^t u_e}\}^T [^t B]^T \left\{ \begin{matrix} ^t F \\ ^t M \end{matrix} \right\} d^t x \right) \quad (3.81)$$

Nesta equação a matriz de rigidez da seção transversal para o duto e definida como:

$$[^t D^p] = \begin{bmatrix} ^t K_1 & ^t K_3 \\ ^t K_3 & ^t K_2 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Os coeficientes $^t K_1$, $^t K_2$ e $^t K_3$ são obtidos pela integração da equação (3.59). As matrizes de força interna são definidas como:

$$[^t F] = \begin{bmatrix} ^t F & 0 \\ 0 & ^t F \end{bmatrix} \quad (3.83.a)$$

$$[^t M] = \begin{bmatrix} ^t M & 0 \\ 0 & ^t M \end{bmatrix} \quad (3.83.b)$$

onde $^t F$ e $^t M$ são as forças internas totais equivalentes definidas na equação (3.60).

A matriz de rigidez elasto-plástica é definida como:

$$[^t K_{EP}^e] = \int_{^tL_e} [^t B]^T [^t D^p] [^t B] d^t x \quad (3.84)$$

os vetores de cargas internas ao nível de elemento, para o duto são definidos como:

$$\{^tQ_p^e\} = \int_{^tL_e} [^tB]^T \begin{Bmatrix} ^tF \\ ^tM \end{Bmatrix} d^t x \quad (3.85)$$

substituindo as equações (3.84) e (3.85) na equação (3.81) obtemos:

$$\sum \{\delta u_e\}^T \left([^tK_{EP}^e] \right) \{u_e\} = \sum \{\delta u_e\}^T \left(\{^tP_{ext}^e\} - \{^tQ_p^e\} \right) \quad (3.86)$$

As transformações para elementos das matrizes de rigidez e vetores de carga, do sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas globais são apresentadas como:

$$[^tK^e] = \begin{bmatrix} [^tT] & 0 \\ 0 & [^tT] \end{bmatrix} [^tK_{EP}^e] \begin{bmatrix} [^tT] & 0 \\ 0 & [^tT] \end{bmatrix} \quad (3.87.a)$$

e

$$[^tQ^e] = \begin{bmatrix} [^tT] & 0 \\ 0 & [^tT] \end{bmatrix} [^tQ_p^e] \quad (3.87.b)$$

A matriz acima $[^tT]$ é definida na equação (3.77).

Apos a aplicação do método da rigidez direta a equação de global incremental é dada por:

$$[^tK] \{^tu\} = \{^tP_{ext}\} - \{^tQ\} \quad (3.88)$$

Uma análise dinâmica completa não dispensa as parcela correspondente ao amortecimento e inércia na análise. Na literatura a forma mais comum de incorporação do amortecimento é através do amortecimento viscoso. Este tem origem em forças que se opõem ao movimento da estrutura à medida que esta se

desloca em um meio. Tais forças dependem de vários fatores, como tamanho e formato do corpo e da frequência de vibração da estrutura, além de serem proporcionais à velocidade com que esta se move. Considerando-se a parcela de amortecimento e inércia, obtemos a seguinte equação:

$$[M_{Dut}]\{\ddot{u}\} + [C_{Dut}]\{\dot{u}\} + [{}^tK]\{u\} = \{{}^tP_{ext}\} - \{{}^tQ\} \quad (3.89)$$

Na equação M_{Dut} , a matriz de massa total, esta última dada a partir do espalhamento das matrizes de massa M_{Dut}^e de todos os elementos da malha, onde para cada elemento temos.

$$M_{Dut}^e = \int_{V_e^{(m)}} \rho N^T N dV \quad (3.90)$$

Na equação 3.89, C_{Dut} é a matriz de amortecimento do duto segundo Rayleigh, definida pela combinação linear entre as matrizes de rigidez e de massas, Clough et al. (1975)

$$[C_{Dut}] = \lambda_M [M_{Dut}] + \lambda_K [{}^tK] \quad (3.91)$$

sendo λ_M e λ_K uma proporção das matrizes de massas e de rigidez.