

## 2

# FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### 2.1

#### Revisão Teórica

Fluidos são definidos como substâncias que se deformam continuamente sob a ação de uma tensão de cisalhamento. Os fluidos podem ser classificados, de modo geral, de acordo com a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de deformação. (20)

#### - Fluidos newtonianos

São classificados como fluidos newtonianos aqueles para os quais a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação. A constante de proporcionalidade representada por  $\mu$  é uma propriedade do fluido e é denominada viscosidade absoluta ou dinâmica. Alguns exemplos de fluidos newtonianos comumente encontrados são a água, o ar e a glicerina. A unidade de viscosidade no Sistema Internacional é  $[\mu] = \frac{N.s}{m^2} = Pa.s$  e no Sistema Métrico absoluto é  $[\mu] = \frac{g}{cm.s} = poise$ .

Aparelhos utilizados para medir a viscosidade de fluidos newtonianos são chamados de viscosímetros. Em geral, o tempo  $t$  que um determinado volume de líquido demora para escoar através de um tubo capilar num viscosímetro Cannon-Fenske é medido. A viscosidade absoluta é então determinada através da equação  $\mu = C.t.\rho$  onde  $C$  é a constante do viscosímetro e  $\rho$  a massa específica do fluido. A figura refviscosimetro a seguir mostra um desenho esquemático de um viscosímetro Cannon-Fenske.

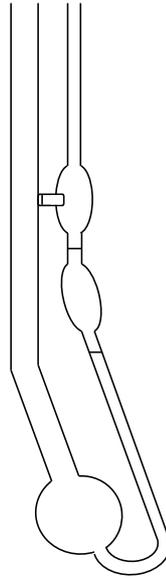


Figura 2.1: Desenho esquemático de um viscosímetro Cannon-Fenske.

### - Fluidos não newtonianos

Fluidos para os quais a tensão não é diretamente proporcional à taxa de deformação são ditos não newtonianos. Muitos fluidos comuns apresentam esse comportamento. Dois exemplos familiares são a pasta de dente e a tinta para pintar paredes. A tinta é muito “espessa” quando na lata, mas torna-se “fina” quando trabalhada pelo pincel. A pasta dental se comporta como um fluido quando espremida do tubo, contudo ela não escorre por si só quando a tampa é removida. Há uma demarcação, uma tensão limítrofe abaixo da qual a pasta de dente se comporta como um líquido extremamente viscoso.

Os fluidos nos quais a viscosidade aparente (viscosidade medida num ponto sob cisalhamento constante) diminui com uma taxa de deformação crescente são chamados pseudoplásticos, ou “shear thinning”. Quando a viscosidade aparente aumenta com uma taxa de deformação crescente, o fluido é chamado dilatante ou “shear thickening”.

Um fluido que é extremamente viscoso até que uma tensão limítrofe, chamada tensão limite de escoamento  $\tau_0$ , seja excedida, e subsequente apresenta uma relação linear entre tensão e taxa de deformação é denominado plástico de Bingham, ou viscoplástico.

A viscosidade pode decrescer muitas ordens de grandeza em uma estreita faixa de tensão de cisalhamento. Pode haver uma queda da ordem de milhão na viscosidade para uma pequena região de crescimento da tensão cisalhante, da ordem de uma década ou até menor. (3)

A interpretação para o comportamento dos plásticos de Bingham é baseada no fato do fluido em repouso apresentar uma estrutura tridimensional de

rigidez suficiente para resistir a qualquer tensão menor do que  $\tau_0$ . Se a tensão for superior a  $\tau_0$ , a estrutura se destrói e o sistema se comporta como um fluido newtoniano sob uma tensão  $\tau$  igual a  $\tau_0$ . Quando a tensão de cisalhamento cai a valores inferiores a  $\tau_0$  a estrutura se reconstrói.

O ramo da mecânica dos fluidos que descreve a deformação de um corpo sob a influência de tensões é chamado de reologia (37). A reologia estuda as propriedades físicas que influenciam a forma e o fluxo do material, englobando variantes tais como viscosidade, plasticidade e elasticidade entre outras.

Um instrumento capaz de medir a história da tensão e deformação de um material é o reômetro. Os reômetros são classificados de acordo com a cinemática do escoamento (cisalhamento ou extensão), a intensidade e o tipo de deformação (pequena, grande, regime permanente) e o tipo de escoamento (homogêneo ou não homogêneo).

Os reômetros são divididos em dois grupos:

- Reômetros rotacionais, quando o escoamento é causado pelo movimento de uma superfície
- Reômetros com gradiente de pressão, quando o escoamento é causado por um gradiente de pressão.

Nos reômetros rotacionais podem ser utilizadas diferentes geometrias, tais como: placa-placa, cone-placa ou cilindros concêntricos (couette). A escolha da geometria depende do fluido, faixa de viscosidade e taxa de deformação.

## 2.2

### Formulação Matemática

A figura 2.2 mostra um esquema da geometria de um espaço anular concêntrico.

As equações que governam o problema são: as equações de conservação da massa e da quantidade de movimento linear e equações constitutivas. Essas equações são apresentadas e discutidas a seguir.

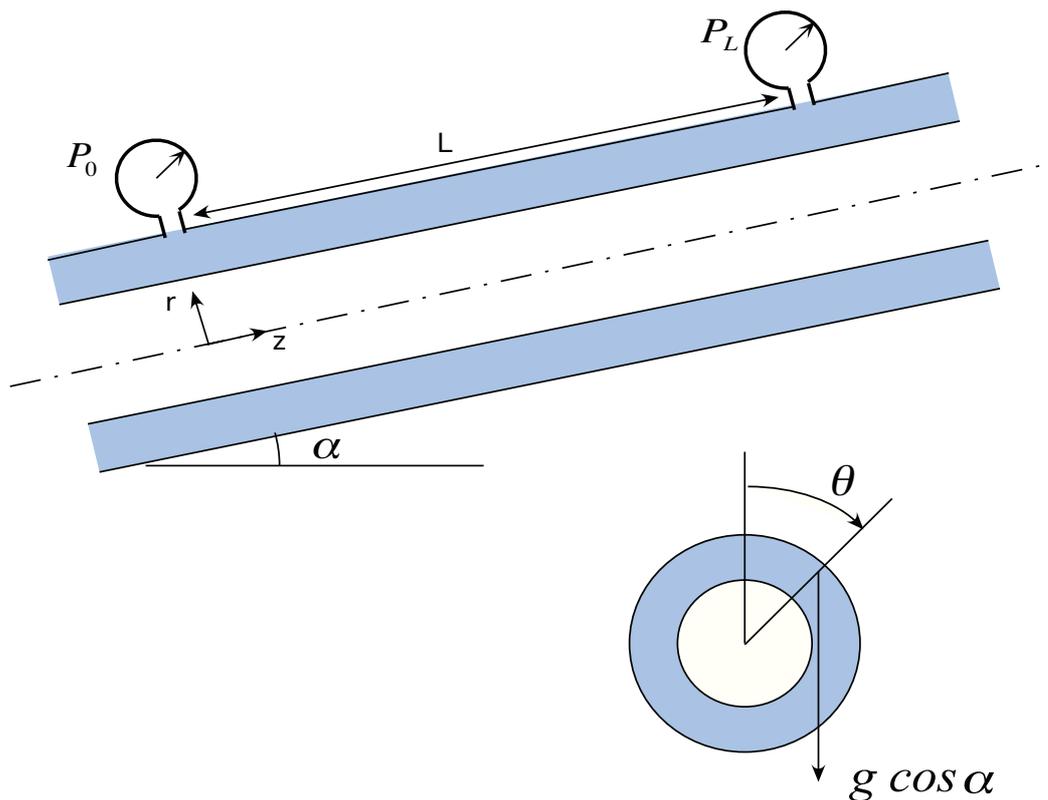


Figura 2.2: Esquema de uma geometria anular.

### 2.2.1 Conservação da massa

A interpretação para a equação de conservação da massa é que para um volume de controle arbitrário, como o representado na figura 2.3, a soma da taxa de variação da massa dentro do volume de controle é igual à taxa do fluxo de massa que cruza a superfície de controle. Matematicamente isso pode ser escrito na equação 2-1 a seguir: (6)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S (n \cdot \rho v) dS \quad (2-1)$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $\vec{v}$  é o vetor velocidade.

Usando o teorema da divergência de Gauss a integral na superfície pode ser transformada em uma integral no volume como na equação 2-2: (6)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V (\nabla \cdot \rho v) dV \quad (2-2)$$

Rearrmando a equação 2-2: (6)

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho v) \right] dV = 0 \quad (2-3)$$

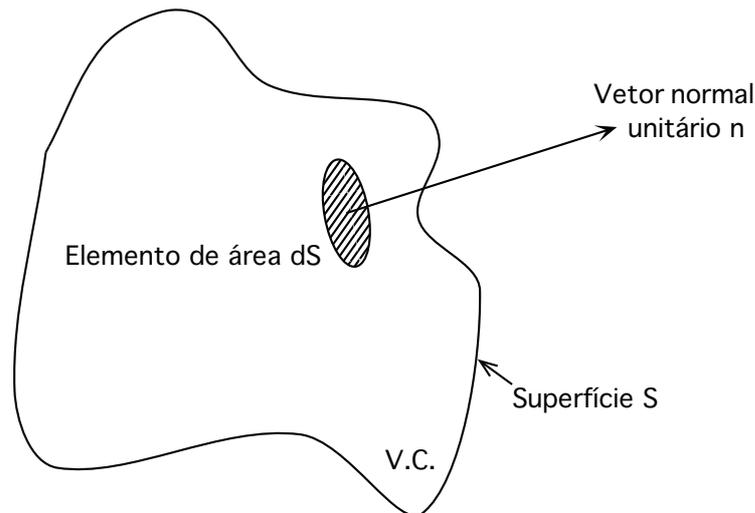


Figura 2.3: Volume de controle arbitrário.

Como o volume de controle é arbitrário, o integrando pode ser igualado a zero. A equação da conservação de massa fica então: (6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2-4)$$

Levando em conta a hipótese de fluido incompressível, a equação 2-4 é simplificada para: (6)

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2-5)$$

A geometria estudada no problema é o espaço anular e portanto a utilização de coordenadas cilíndricas é mais apropriada. Desenvolvendo a equação 2-5 para o sistema de coordenadas cilíndricas temos: (6)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2-6)$$

### 2.2.2

#### Conservação da quantidade de movimento linear

Também conhecida como a segunda lei de Newton, a equação de conservação da quantidade de movimento linear mostra que o produto da massa pela aceleração é igual ao somatório das forças externas. A equação 2-7 expressa a conservação da quantidade de movimento por unidade de volume (6)

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{T}} + \rho \vec{g} \quad (2-7)$$

onde  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$  é a aceleração total e  $\underline{\underline{T}}$  o tensor das tensões.

O tensor das tensões  $\underline{\underline{T}}$  pode ser escrito em função da pressão e do tensor extra-tensão da seguinte maneira: (6)

$$\underline{\underline{T}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (2-8)$$

onde  $\underline{\underline{I}}$  é a matriz identidade,  $p$  é a pressão e  $\underline{\underline{\tau}}$  é o tensor extra-tensão.

Levando em conta a equação 2-8 e expandindo a equação 2-7 em coordenadas cilíndricas temos: (6)

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left| \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right| + \rho g_r \quad (2-9)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left| \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right| + \rho g_\theta \quad (2-10)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left| \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \right| + \rho g_z \quad (2-11)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $\frac{\partial p}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z}$  são os componentes do gradiente de pressão em coordenadas cilíndricas.

### 2.2.3 Equações constitutivas

As equações constitutivas relacionam a tensão com a cinemática, descrevendo assim o comportamento mecânico dos materiais.

Fluidos newtonianos são aqueles para os quais a relação entre tensão de cisalhamento e a taxa de deformação é linear, com coeficiente de proporcionalidade igual a  $\mu$ . A equação 2-12 a seguir descreve o comportamento de um fluido newtoniano:(20)

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu \dot{\gamma} \quad (2-12)$$

Os fluidos não newtonianos têm seu comportamento modelado pelas equações de Fluido Newtoniano Generalizado 2-13 - 2-15, mostradas a seguir:

(6)

$$\underline{\underline{\tau}} = \eta(\dot{\gamma})\underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad (2-13)$$

$$\underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T \quad (2-14)$$

$$\dot{\gamma} \equiv |\underline{\underline{\dot{\gamma}}}| = \sqrt{\frac{1}{2}tr(\dot{\gamma}^2)} \quad (2-15)$$

onde  $\eta$  é a função viscosidade,  $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$  o tensor taxa de deformação e  $\dot{\gamma}$  a intensidade da taxa de deformação.

Os componentes do tensor extra-tensão em coordenadas cilíndricas são os seguintes: (6)

$$\tau_{rr} = 2\eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \quad (2-16)$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \quad (2-17)$$

$$\tau_{zz} = 2\eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (2-18)$$

$$\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = \eta(\dot{\gamma}) \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (2-19)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (2-20)$$

$$\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \quad (2-21)$$

As equações completas de conservação da quantidade de movimento linear são obtidas ao substituírmos as equações 2-16 - 2-21 em 2-9 - 2-11.

#### 2.2.4

##### Funções viscosidade

Fluidos newtonianos têm a função viscosidade constante,  $\eta(\dot{\gamma}) = \mu$ , onde  $\mu$  é a viscosidade absoluta.

Numerosas equações empíricas têm sido propostas para modelar as relações observadas entre a viscosidade  $\eta$  e a taxa de cisalhamento  $\dot{\gamma}$  para fluidos não newtonianos.

Para fluidos viscoplásticos, a função viscosidade pode ser representada pelo modelo de Bingham, como mostra a equação 2-22 a seguir: (20)

$$\eta = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_p & \text{para } \tau \geq \tau_0 \\ \infty & \text{para } \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (2-22)$$

Nos últimos anos foi proposta uma nova configuração para modelar a viscosidade de fluidos viscoplásticos baseada no fato de que para  $\tau < \tau_0$  a viscosidade do fluido não é infinita, mas apenas um valor muito elevado e aproximadamente constante. O modelo Souza Mendes Dutra (SMD) é descrito pela equação 2-23 a seguir: (14)

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left\{ 1 - \exp\left(\frac{-\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right) \right\} \left[ \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \right] + \eta_\infty \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\eta_\infty}{K \dot{\gamma}^{n-1}}\right) \right\} \quad (2-23)$$

onde  $\eta_0$  é a viscosidade a altas taxas de cisalhamento,  $\tau_0$  a tensão limite de escoamento,  $K$  o índice de consistência,  $n$  o índice de comportamento e  $\eta_\infty$  a viscosidade a baixas taxas de cisalhamento.

A figura 2.4 a seguir mostra o comportamento de fluidos viscoplásticos e os parâmetros da equação 2-23.

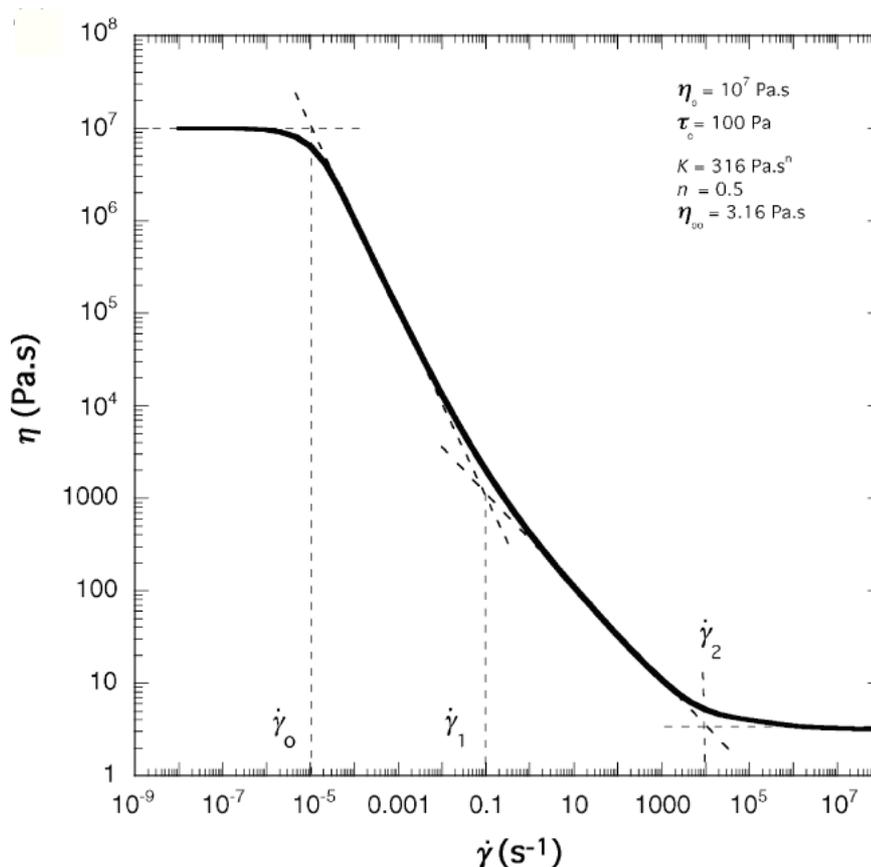


Figura 2.4: Função viscosidade para líquidos viscoplásticos.

Como pode ser observado na figura 2.4 existem três taxas de cisalhamento de transição nessa função viscosidade, a saber:

$$\dot{\gamma}_0 = \frac{\tau_0}{\eta_0} \quad (2-24)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \left( \frac{\tau_0}{K} \right)^{1/n} \quad (2-25)$$

$$\dot{\gamma}_2 = \left( \frac{K}{\eta_\infty} \right)^{1/(1-n)} \quad (2-26)$$

## 2.3

### Análise Dimensional

A análise dimensional é uma importante ferramenta que facilita a comparação do processo no laboratório e em campo. Os parâmetros adimensionais obtidos são usados na correlação dos dados, isto é, o escoamento no problema real e no modelo do laboratório são relacionados por leis de escala conhecidas.

Para uma dada geometria e condições iniciais, o maior benefício de analisar um problema de mecânica dos fluidos na forma adimensional é a redução do número de parâmetros governantes.

#### 2.3.1

##### Fluidos newtonianos

Para o caso do escoamento envolvendo fluidos newtonianos, os parâmetros adimensionais que governam o problema são:

$$\text{A razão de aspecto} = \frac{h}{D} \quad (2-27)$$

$$\text{O número de Reynolds} = Re = \frac{\rho \bar{u} h}{\mu} \quad (2-28)$$

$$\text{O número de Froude} = Fr = \frac{\rho_1 \bar{u}^2}{|\Delta\rho|gh} \quad (2-29)$$

$$\text{O número de Capilaridade} = Ca = \frac{\mu \bar{u}}{\sigma} \quad (2-30)$$

#### 2.3.2

##### Fluidos não newtonianos

Souza Mendes (14) sugeriu uma nova proposta para a adimensionalização de problemas envolvendo fluidos não newtonianos na qual a velocidade característica é relacionada com dados reológicos.

O primeiro passo para este procedimento é escolher uma taxa de deformação característica a partir dos dados reológicos que corresponda à faixa observada no escoamento. Para escoamentos classificados como de cisalhamento, como no caso estudado, a viscosidade do fluido depende da taxa de cisalhamento. Uma escolha apropriada para a taxa de deformação característica

seria uma das taxas de cisalhamento de transição que aparecem na função viscosidade, ou seja,  $\dot{\gamma}_0$ ,  $\dot{\gamma}_1$  ou  $\dot{\gamma}_2$  definidas na figura 2.4 e nas equações 2-24 2-25 2-32.

Uma vez escolhida a taxa de deformação característica,  $\dot{\gamma}_c$ , a velocidade característica é definida como

$$u_c = L\dot{\gamma}_c \quad (2-31)$$

onde  $L$  é o comprimento característico do escoamento. Outros parâmetros característicos são obtidos a partir dos que já foram determinados. A viscosidade característica é obtida ao avaliarmos a função viscosidade  $\eta(\dot{\gamma})$  na taxa de deformação característica, ou seja:

$$\eta_c \equiv \eta(\dot{\gamma}_c) \quad (2-32)$$

A tensão característica é obtida ao multiplicarmos a viscosidade característica pela taxa de deformação característica, isto é  $\tau_c = \eta_c \dot{\gamma}_c$  e o tempo característico para escoamentos em regime permanente é dado por  $t_c = 1/\dot{\gamma}_c$ . Para líquidos viscoplásticos, uma boa escolha para  $\dot{\gamma}_c$  é  $\dot{\gamma}_c = \dot{\gamma}_1$ , onde  $\dot{\gamma}_1$  está definido na equação 2-25 e representado na figura 2.4.

Os parâmetros adimensionais então são os seguintes:

$$\frac{h}{D}, \quad \frac{\bar{u}}{\dot{\gamma}_1 h}, \quad \frac{|\Delta\rho|g}{\rho_1 \dot{\gamma}_1^2 h}, \quad \frac{\tau_{01} h}{\sigma}, \quad \frac{\tau_{01}}{\tau_{02}}, \quad \frac{\dot{\gamma}_{11}}{\dot{\gamma}_{12}}, \quad n_1 \quad e \quad n_2 \quad (2-33)$$

onde  $h$  é a folga do anular,  $D$  o diâmetro interno do tubo externo,  $\bar{u}$  a velocidade média no anular,  $|\Delta\rho|$  a diferença de densidades entre o fluido deslocador e o deslocado,  $g$  a aceleração da gravidade,  $\rho_1$  a densidade do fluido deslocador,  $\sigma$  a tensão superficial,  $\tau_{01}$  a tensão limite de escoamento do fluido deslocador,  $\tau_{02}$  a tensão limite de escoamento do fluido deslocado,  $\dot{\gamma}_{11}$  a taxa de cisalhamento de transição (definida anteriormente pela equação 2-25) do fluido deslocador,  $\dot{\gamma}_{12}$  a taxa de cisalhamento de transição do fluido deslocado,  $n_1$  o índice de comportamento do fluido deslocador e  $n_2$  o índice de comportamento do fluido deslocado.