

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, C.; GOMES, R.; LEITE, A. ; VICENTE, J.. **Does curvature enhance forecasting?** Fundação Getúlio Vargas, Working Paper, 2007. 1, 5
- [2] ARELLANO-VALLE, R. B.; BRANCO, M. D. ; GENTON, M. G.. **A unified view on skewed distributions arising from selections.** The Canadian Journal of Statistics, 34(4):1–21, 2006. 1
- [3] AZZALINI, A.. **A class of distributions which includes the normal ones.** Scad. J. Statist., 12:171–178, 1985. 1, 4, 4.1
- [4] AZZALINI, A.. **Further results on a class of distributions which includes the normal ones.** Statistica, 46:199–208, 1986. 4
- [5] AZZALINI, A.; VALLE, A.. **The multivariate skew-normal distribution.** Biometrika, 83(4):715–726, 1996. 4, 4.2
- [6] BRANCO, M. D.; DEY, D. K.. **A general class of multivariate skew-elliptical distributions.** J.Multivariate Anal., 79:93–113, 2001. 1
- [7] CASELLA, G.; BERGER, R. L.. **Statistical Inference.** Duxbury Thomson Learning, 2 edition, 2002. 1, 4.1
- [8] COLES, S.. **An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values.** Springer, 2001. 5.1
- [9] DEHEUVELS, P.. **Caractèrisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extremes.** Publ Inst Statist Univ Paris, (23):1–37, 1978. 5.1
- [10] DEMARTA, S.; MCNEIL, A. J.. **The t copula and related copulas.** Department of Mathematics Federal Institute of Technology, maio 2004. 5.3
- [11] EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A. ; STRAUMANN, D.. **Correlation and dependency in risk manegement.** Department of Mathematik, ETH Zentrum, CH 8092, Zürich, embrechts/mcneil/strauman@math.eth.ch, Janeiro 1999. 1, 2

- [12] HEFFERNAN, J. E.; TAWN, J.. **A conditional approach for multivariate extremes.** Journal of the Royal Statistical B, (3):497–546, 2004. 5.1
- [13] HOEFFDING, W.. **Masstabinvariante korrelationstheorie.** Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin 5 Heft 3, p. 179–233, 1940. 2.1
- [14] HU, W.. **Calibration of Multivariate Generalized Hyperbolic Distributions Using the EM Algorithm, with Applications in Risk Management, Portfolio Optimization and Portfolio Credit Risk.** PhD thesis, The Florida State University, 2005. 1
- [15] JOE, H.. **Multivariate Models and Dependence Concepts.** CHAPMAN&HALL/CRC, 1997. 1, 2.1, 5.1, 5.1, 5.1
- [16] LING, C.-H.. **Representation of associative functions.** Publ Math Debrecen, 12:189–212, 1965. 2.2, 2.2
- [17] MARI, D. D.; KOTZ, S.. **Correlation and Dependence.** Imperial College Press, 2001. 2.1
- [18] MCNEIL, A. J.; FREY, R. ; EMBRECHTS, P.. **Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques and Tools.** Princeton University Press, 2005. 2.1, 3.1, 5.1, 5.1
- [19] MENDES, B. V. M.. **Introdução à Análise de Eventos Extremos.** E-Papers Serviços Editoriais, 2004. 1, 2.1
- [20] MM, A.; NN, M. ; MS, H.. **A class of bivariate distributions including the bivariate logistic.** J Multivariate Anal 8, p. 405–412, 1978. 2.1
- [21] NELSEN, R. B.. **An Introduction to Copulas.** Springer Series in Statistics, 2006. 1, 2.1, 2.1, 2.1, 2.1, 2.1, 2.1, 2.1, 2.2, 2.2, 3.1, 3.2, 5.1, A
- [22] SCHUCANY, W.; PARR, W. ; BOYER, J.. **Correlation structure in farlie-gumbel-morgenstern distributions.** Biometrika, 65(3):650–653, 1978. 2.1
- [23] SCHWEIZER, B.; WOLFF, E.. **On nonparametric measures of dependence for random variables.** Ann Statist 9, p. 879–885, 1981. 2.1
- [24] SKLAR, A.. **Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges.** Publ Inst Statist Univ Paris, p. 229–231, 1959. 2.1

- [25] S.ZACKS. **Parametric Statistical Inference**. Pergamon Press, Oxford, 1981. 1, 2, 4.3
- [26] ZHANG, M.-H.. **Modelling total tail dependence along diagonals**. Insurance: Mathematics and Economics, 2007. 1, 3, 3.1
- [27] ZIVOT, E.; WANG, J.. **Modelling Financial Time Series with S-Plus**. Springer, second edition, 2006. 5.1

A

As cópulas Gumbel, BB7 e Clayton

Exemplo 18. (Cópula Gumbel). A família de cópulas Gumbel, C_θ^G , $\forall \theta \geq 1$, é definida por

$$C_\theta^G(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \quad (u, v) \in I^2.$$

A sua função geradora é dada por $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$, $t \in [0, 1]$. Note que para $C_{\theta=1}^G = \Pi$ e $C_\theta^G(u, v) \rightarrow M(u, v)$ quando $\theta \rightarrow \infty$, $\forall (u, v) \in I^2$. ■

Na Figura A.1 temos as curvas de nível da cópula de Gumbel para $\theta = 2$ e $\theta = 10$.

Do Teorema 14 e das igualdades (3 – 13) e (3 – 14) temos que

$$\begin{aligned} \lambda_{UU} &= 2 - \lim_{x \searrow 0} \frac{1 - \exp \left\{ -(2x)^{\frac{1}{\theta}} \right\}}{1 - \exp \left\{ -(x)^{\frac{1}{\theta}} \right\}}, \text{ da Regra de l'Hôpital,} \\ &= 2 - 2^{\frac{1}{\theta}} \lim_{x \searrow 0} \frac{\exp \left\{ -(2x)^{\frac{1}{\theta}} \right\}}{\exp \left\{ -(x)^{\frac{1}{\theta}} \right\}} \\ &= 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Logo, a cópula Gumbel é assintoticamente dependente na cauda superior para $\theta > 1$. Para $\theta = 1$ temos que $C^G = \Pi$ e, portanto, $\lambda_{UU} = 0$. Como $\varphi(0) = \infty$, é simples ver que $\lambda_{LL} = 0$. Para o cálculo de $\lambda_{LU} = \lambda_{LU}$ precisamos do seguinte resultado: dados $\theta_1 \leq \theta_2$ então $C_{\theta_1}^G(u, v) \leq C_{\theta_2}^G(u, v)$, $\forall (u, v) \in I^2$ (21); deste resultado e do Teorema 12 vem que $\lambda_{UL} = 0 = \lambda_{LU}$:

$$0 \leq 1 - \lim_{x \nearrow 1} \frac{C_\theta^{GH}(1-x, x)}{1-x} \leq 1 - \lim_{x \nearrow 1} \frac{\Pi(1-x, x)}{1-x} = 0.$$

Exemplo 19. (Cópula BB7). A família de cópulas BB7, $C_{\theta, \delta}^{BB7}$, $\theta \geq 1$ e $\delta > 0$ é definida por

$$C_{\theta, \delta}^{BB7}(u, v) = 1 - \left(1 - \left[(1 - (1-u)^\theta)^{-\delta} + (1 - (1-v)^\theta)^{-\delta} - 1 \right]^{-\frac{1}{\delta}} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad (u, v) \in I^2.$$

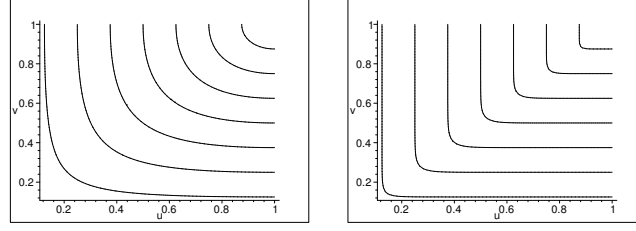


Figura A.1: Curvas de nível da cópula Gumbel para $\theta = 2$ e $\theta = 10$.

A sua função geradora é dada por $\varphi(t) = (1 - (1 - t)^\theta)^{-\delta} - 1$.

O parâmetro λ_{LL} é dado por $2^{-\frac{1}{\delta}}$, independente de θ ; o parâmetro λ_{UU} é dado por $2 - 2^{\frac{1}{\delta}}$, independente de δ . É simples, mas trabalhoso, ver que $\lambda_{UL} = 0 = \lambda_{LU}$.

Exemplo 20. (Cópula Clayton). A família de cópulas Clayton, C_θ^C , $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$, é definida por

$$C_\theta^C(u, v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad (u, v) \in I^2.$$

A sua função geradora é dada por $\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$, $t \in [0, 1]$. Note que $C_{\theta=-1}^C = W$ e, $\forall (u, v) \in I^2$, temos os casos limites: $C_\theta^C(u, v) = \Pi(u, v)$, para $\theta \rightarrow 0$, e $C_\theta^C(u, v) = M(u, v)$, para $\theta \rightarrow \infty$. ■

Na Figura A.2 temos as curvas de nível da cópula de Clayton para $\theta = 1$ e $\theta = 15$. Para o cálculo de λ_{UU} e $\lambda_{UL} = \lambda_{LU}$ vamos usar o Teorema 12. Para

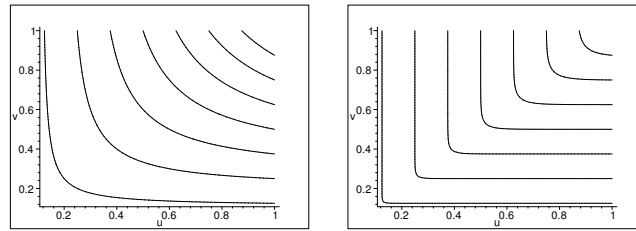


Figura A.2: Curvas de nível da cópula Clayton para $\theta = 1$ e $\theta = 15$.

$\theta > 0$ temos:

$$\begin{aligned} \lambda_{UU} &= 2 - \lim_{x \nearrow 1} \frac{1 - (2x^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}}{1 - x}, \text{ da Regra de l'Hôpital,} \\ &= 2 + \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{\theta} (-2\theta x^{-\theta-1}) (2x^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}-1} \\ &= 0; \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{UL} = \lambda_{LU} &= 1 - \lim_{x \nearrow 1} \frac{[(1-x)^{-\theta} + x^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}}{1-x}, \text{ pela Regra de l'Hôpital,} \\
&= 1 + \lim_{x \nearrow 1} \left\{ -\frac{1}{\theta} [\theta(1-x)^{-\theta-1} - \theta x^{-\theta-1}] [(1-x)^{-\theta} + x^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}-1} \right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Do Exemplo 20 vem que para $\theta > 0$ temos: $\varphi(0) = \infty$ e $\varphi^{-1}(x) = (\theta x + 1)^{-\frac{1}{\theta}}$, para $x \in [0, \infty]$. Assim, do Teorema 14, temos:

$$\begin{aligned}
\lambda_{LL} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2\theta x + 1)^{-\frac{1}{\theta}}}{(\theta x + 1)^{-\frac{1}{\theta}}} \\
&= 2^{-\frac{1}{\theta}}.
\end{aligned}$$