

4

Distribuição normal assimétrica

A grande motivação para a definição da distribuição normal assimétrica é obter uma classe de distribuições paramétricas que apresente uma transição contínua da normalidade para a não-normalidade.

Muitas famílias de f.d.p.'s têm a distribuição normal como um caso limite, como a distribuição t de Student com ν graus de liberdade, quando $\nu \rightarrow \infty$. Entretanto, existem poucas classes de distribuições paramétricas que incluem a normal como um de seus membros e não apenas como um caso limite. Dentre as classes que incluem propriamente a normal, algumas possuem expressões complicadas para a f.d.p. e outras são obtidas de modo artificial ((3)).

Azzalini ((3)) definiu uma família de distribuições paramétricas e tratável matematicamente que inclui, propriamente, a distribuição normal padrão, porém com um parâmetro extra que permite controlar a assimetria da distribuição. Os membros dessa família recebem o nome de normal assimétrica (SN), abreviatura com origem na denominação em inglês “skew normal”. Ainda, como veremos, essa família permite uma variação contínua da normalidade para a não-normalidade através da variação de um único parâmetro. Em novo trabalho, Azzalini ((4)) apresenta novas propriedades da distribuição normal univariada assimétrica. Apesar da sua importância teórica, as distribuições normais assimétricas aparecem na modelagem de problemas práticos, como veremos nos três métodos de construção dessas distribuições apresentados na próxima subseção.

Azzalini e Dalla-Valle ((5)) estendem os resultados obtidos nos trabalhos de Azzalini para o caso multivariado e definem uma família paramétrica multivariada na qual as f.d.p.'s marginais são normais assimétricas. Também, essa família inclui a distribuição normal simétrica multivariada como um caso particular.

Na Seção 4.1 apresentamos a distribuição normal assimétrica univariada; a influência da introdução de parâmetro de escala nos valores do excesso de curtose é estudada. Na Seção 4.2 apresentamos a distribuição normal assimétrica multivariada. Na Seção 4.3 calculamos os coeficientes de dependência homogênea de cauda da distribuição normal assimétrica.

4.1

Caso univariado

Apesar de apresentado nesta Seção, o Lema a seguir tem grande importância na teoria das distribuições assimétricas em geral e pode ser usado para definir o que vem a ser a f.d.p. de uma distribuição t assimétrica. Como veremos, esse resultado foi usado por Azzalini ((3)) para definir a f.d.p. de uma distribuição normal assimétrica univariada.

Lema 4. *Seja f uma f.d.p. univariada simétrica em torno da origem e G uma f.d.a. absolutamente contínua tal que G' é simétrica em torno de 0. Então*

$$2G(\lambda y)f(y), \text{ com } -\infty < y < \infty, \quad (4-1)$$

é uma f.d.p. para todo número real λ .

Dem.: Sejam Y e X v.a.'s independentes com f.d.p.'s f e G' , respectivamente. Então

$$1/2 = \mathbb{P}\{X - \lambda Y < 0\} = \mathbb{E}_Y[\mathbb{P}\{X < \lambda y | Y = y\}] = \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda y)f(y)dy,$$

onde a primeira das igualdades acima segue do fato da f.d.p. de $Z = X - \lambda Y$ ser simétrica em torno da origem. ■

Definição 17. *Se uma variável aleatória Z tem f.d.p. dada por*

$$\phi(z; \lambda) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z), \quad (4-2)$$

para $-\infty < z < \infty$, onde ϕ e Φ são a f.d.p. e a f.d.a. da normal padrão, respectivamente, então dizemos que Z é uma variável aleatória com distribuição normal assimétrica com parâmetro de assimetria λ , cuja notação é dada por $Z \sim SN(\lambda)$.

Na Figura 4.1 são plotados os gráficos das f.d.p.'s da distribuição normal-padrão e das distribuições $SN(\lambda = \pm 1)$, $SN(\lambda = \pm 2)$, $SN(\lambda = \pm 3)$ e $SN(\lambda = \pm 4)$.

Note que o símbolo ϕ foi usado em (4-2) com dois diferentes significados: para denotar as f.d.p.'s da normal assimétrica e da normal padrão; essa notação é justificada pela primeira das propriedades listadas abaixo:

- A.** A densidade $SN(0)$ é a densidade da normal padrão $\mathcal{N}(0, 1)$;
- B.** Quando $\lambda \rightarrow \infty$, $\phi(z; \lambda)$ tende para a f.d.p. da semi-normal, isto é, para a densidade de $|X|$, onde X tem distribuição normal padrão. Alguns autores denominam por half-normal a distribuição de $|X|$ e usam a simbologia $|X| \sim HN(0, 1)$;

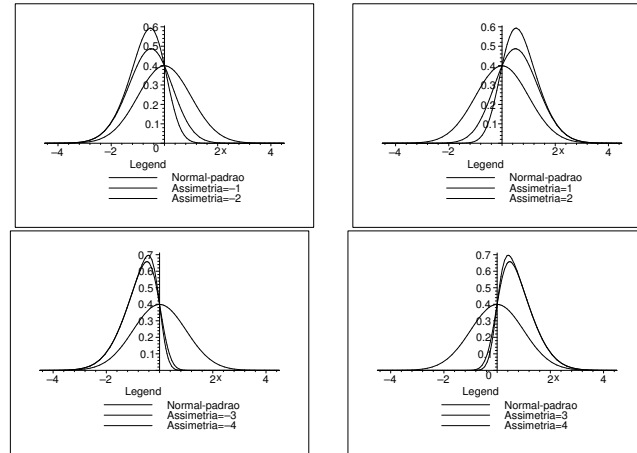


Figura 4.1: Gráfico das f.d.p.'s das distribuições normal-padrão, $SN(\lambda = \pm 1)$, $SN(\lambda = \pm 2)$, $SN(\lambda = \pm 3)$ e $SN(\lambda = \pm 4)$.

C. Se $Z \sim SN(\lambda)$, então $-Z \sim SN(-\lambda)$; e

D. A densidade (4-2) é fortemente unimodal, isto é, $\log \phi(z; \lambda)$ é uma função côncava em z .

Sabemos que o quadrado de uma v.a. normal-padrão tem distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade, que denota-se por χ_1^2 . A extensão dessa propriedade à distribuição normal assimétrica segue de um caso particular do resultado a seguir:

Lema 5. Dadas as hipóteses do Lema 4, sejam as v.a.'s Y e Z com f.d.p.'s f e (4-1), respectivamente. Então $|Y|$ e $|Z|$ são identicamente distribuídas.

Dem.: Sejam F_Z , f_Z e $F_{|Z|}$, $f_{|Z|}$ a f.d.a. e a f.d.p. de Z e de $|Z|$, respectivamente; para $z > 0$ temos:

$$\begin{aligned} F_{|Z|}(z) &= \mathbb{P}[|Z| \leq z] \\ &= F_Z(z) - F_Z(-z). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f_{|Z|}(z) &= 2G(\lambda z)f(z) + 2G(-\lambda z)f(-z) \\ &= 2G(\lambda z)f(z) + 2(1 - G(\lambda z))f(z) \\ &= 2f(z). \end{aligned}$$

■

Do resultado acima, segue a propriedade:

E. O quadrado de uma variável aleatória com distribuição $SN(\lambda)$ tem distribuição χ_1^2 .

Logo, os momentos de ordem par de uma v.a. com distribuição normal assimétrica são iguais àqueles da distribuição normal padrão.

Definição 18. A função geradora de momentos de uma v.a. X é definida por

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[\exp\{tX\}], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim, temos a propriedade

F. A função geradora de momento de $Z \sim SN(\lambda)$ é dada por

$$\psi_Z(t) = 2\exp(t^2/2)\Phi(\delta t), \quad \text{onde } \delta = \lambda/\sqrt{1+\lambda^2}.$$

A demonstração desse resultado será dada na Seção 4.3.

Um resultado que nos fornece a motivação para a denominação da função ψ , nos diz que se $\psi_X(\epsilon) < \infty$ para algum $\epsilon > 0$ então ψ_X possui derivadas contínuas de toda ordem em $(-\epsilon, \epsilon)$ e $\psi_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$ para $k = 1, 2, \dots$ ((7)).

Dos resultados acima e das Propriedades **E** e **F** segue que:

G. A média de Z é dada por

$$\mathbb{E}(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta; \quad \text{e} \tag{4-3}$$

H. A variância de Z é dada por

$$\text{Var}[Z] = 1 - \frac{2}{\pi}\delta^2.$$

Vamos denotar por μ_n e por σ , respectivamente, o n -ésimo momento central e o desvio-padrão de uma v.a. X , ou seja, $\mu_n = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^n]$ e $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]}$.

Definição 19. O coeficiente de assimetria, $\gamma^{(1)}(X)$, e o excesso de curtose, $\gamma^{(2)}(X)$, de X são definidos por:

$$\gamma^{(1)}(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{4-4}$$

e

$$\gamma^{(2)}(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \tag{4-5}$$

respectivamente, dado que esses coeficientes sejam definidos.

O coeficiente de assimetria, como esperado, é uma medida da assimetria da distribuição. Intuitivamente, comparando-se com a normal, um valor negativo desse índice indica que a variável aleatória tem uma probabilidade maior de assumir valores na cauda esquerda da distribuição. Idêntica relação para valor positivo do índice e a cauda direita.

O “menos 3” no final da fórmula de $\gamma^{(2)}(X)$ pode ser explicado como a inserção de um fator de correção para tornar a curtose da distribuição normal igual a zero. Uma distribuição com excesso de curtose positivo tem, em comparação com a normal, uma maior probabilidade de assumir valores próximos do valor médio e, ainda em comparação com a normal, têm caudas “mais pesadas”, ou seja, uma maior probabilidade de ocorrência de valores extremos. Uma distribuição com excesso de curtose negativo, em comparação com a normal, tem menor probabilidade de assumir valores próximos ao valor médio e caudas mais leves, ou seja, a probabilidade de assumir valores extremos é menor, quando comparada à distribuição normal.

Após alguns algebrismos, de (4 – 4) e (4 – 5) temos as seguintes propriedades para Z :

I. O coeficiente de assimetria é dado por

$$\begin{aligned}\gamma^{(1)}(Z) &= \frac{1}{2}(4 - \pi) \left[\frac{(\mathbb{E}(Z))^3}{\text{Var}^{\frac{3}{2}}(Z)} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}(4 - \pi)\delta^3}{(\pi - 2\delta^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Dem.: Por 4 – 4, temos que

$$\gamma^{(1)}(Z) = \frac{\mathbb{E}[Z^3] - 3\mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[Z]^2 + 2(\mathbb{E}[Z])^3}{\text{Var}(Z)^{\frac{3}{2}}},$$

como $\mathbb{E}[Z^3] = M'''(0) = \frac{6\delta}{\sqrt{2\pi}} - \frac{2\delta^3}{\sqrt{2\pi}}$, o resultado segue; e

J. O excesso de curtose de Z é dado por

$$\begin{aligned}\gamma^{(2)}(Z) &= 2(\pi - 3) \left[\frac{\mathbb{E}^2(Z)}{\text{Var}(Z)} \right]^2 \\ &= \frac{8\delta^4(\pi - 3)}{(\pi - 2\delta^2)^2}.\end{aligned}$$

Dem.: Por 4 – 5 temos que

$$\gamma^{(2)}(Z) = \frac{-4\mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[Z^3] + 12(\mathbb{E}[Z])^2 - 6(\mathbb{E}[Z])^4}{(1 - (\mathbb{E}[Z])^2)^2},$$

como $\mathbb{E}[Z^4] = 1 = \mathbb{E}[Z^2]$, pois os momentos pares de Z são iguais àqueles da distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$, e a expressão de $\mathbb{E}[Z^3]$ foi obtida na demonstração do item acima, o resultado segue.

Na Figura 4.2 apresentamos os gráficos das f.d.p.'s das distribuições normal-padrão, $SN(\lambda = -5)$ e $SN(\lambda = 5)$.

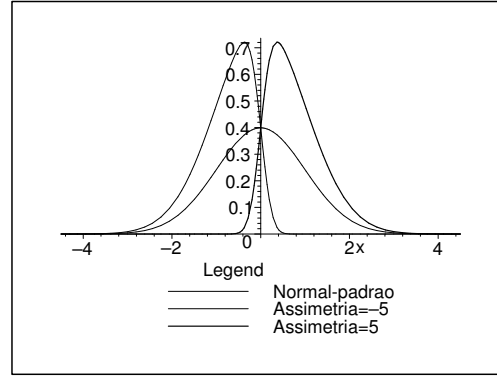


Figura 4.2: Fdp's das distribuições $\mathcal{N}(0, 1)$, $SN(\lambda = -5)$ [coeficiente de assimetria = $-0,779$ e curtose = $0,705$] e $SN(\lambda = 5)$ [coeficiente de assimetria = $0,779$ e curtose = $0,705$].

Os valores atingidos pelo coeficiente de assimetria variam no intervalo $(-0.995, 0.995)$, enquanto que o excesso de curtose varia no intervalo $(0, 0.869)$. Assim, concluímos que a introdução da assimetria na distribuição normal como apresentada acima não define uma família de distribuições que atinge uma vasta gama de valores para o coeficiente de assimetria e para o excesso de curtose. Veremos a seguir que a introdução de um parâmetro de escala permite controlar o valor do excesso de curtose.

O controle sobre o excesso de curtose não é o objetivo principal da introdução de parâmetros de escala na distribuição normal assimétrica. Na verdade, para torná-la mais flexível para a modelagem de problemas reais, é necessária a introdução de parâmetros de localização e escala à sua definição original.

Definição 20. Uma v.a. Y tem distribuição normal assimétrica com parâmetros de localização β e de escala α , onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$, se sua f.d.p. é dada por

$$f_Y(y) = \frac{2}{\alpha} \phi\left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right) \Phi\left(\frac{\lambda(y - \beta)}{\alpha}\right), \quad (4-6)$$

e utilizamos a notação $Y \sim SN(\alpha, \beta, \lambda)$.

Das Propriedades **G**, **H**, **I** e **J** temos que:

G'. A média de Y é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \alpha\mathbb{E}(Z) + \mu \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta\alpha + \mu;\end{aligned}$$

H'. A variância de Y é dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar[Y] &= \alpha^2\mathbb{V}ar(Z) \\ &= \left(1 - \frac{2}{\pi}\delta^2\right)\alpha^2;\end{aligned}$$

I'. A introdução de parâmetros de localização e escala não altera o valor do coeficiente de assimetria; e

J'. O excesso de curtose de Y é dado por

$$\begin{aligned}\gamma^{(2)}(Y) &= \alpha^2\gamma^{(2)}(Z) + 3(\alpha^2 - 1) \\ &= \frac{8\alpha^2\delta^4(\pi - 3)}{(\pi - 2\delta^2)^2} + 3(\alpha^2 - 1).\end{aligned}$$

Dem.: Por 4 – 5 temos que

$$\begin{aligned}\gamma^{(2)}(Y) &= \frac{\mathbb{E}[(\alpha Z + \beta - \alpha\mathbb{E}[Z] - \beta)^4]}{\mathbb{E}[(\alpha Z + \beta - \alpha\mathbb{E}[Z])^2]} - 3 \\ &= \alpha^2 \left(\frac{\mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^4]}{\mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2]^2} - 3 \right) + 3\alpha^2 - 3,\end{aligned}$$

e o resultado segue da Propriedade **J**.

Exemplo 17. Sejam $Z \sim SN(\lambda)$, $Y := 2Z$ e o parâmetro de escala $\alpha = 2$; para $\lambda = -2$, obtemos que $\gamma^{(2)}(Z) = 0,305$; a partir deste valor, obtemos $\gamma^{(2)}(Y) = 10,22$. Para um coeficiente de assimetria $\lambda = 5$, temos que $\gamma^{(2)}(Z) = 0,705$; para este caso, $\gamma^{(2)}(Y) = 10,816$. ■

Na Figura 4.3 plotamos as modificações sofridas pelos gráficos das f.d.p.'s das distribuições normal-padrão e $SN(\lambda = \pm 5)$ quando introduzimos o parâmetro de escala $\alpha = 2$. Note que a distribuição $\mathcal{N}(0, 4)$ é obtida a partir da aplicação do parâmetro de escala $\alpha = 2$ à normal-padrão.

Agora, temos todos os resultados necessários para demonstrar o Teorema

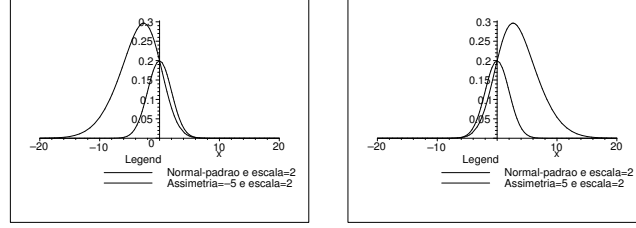


Figura 4.3: Fdp's das distribuições $\mathcal{N}(0, 4)$ e $SN(2, 0, \lambda = \pm 5)$.

4. De (4 – 3), segue que a esperança de XY , com $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, é dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy h_{\theta}(x, y) dx dy \\
 &= (1 + \theta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \phi(x) \phi(y) dx dy \\
 &\quad - \theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} y (2\phi(y) \Phi(y)) dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y \phi(x) dx \right) \\
 &\quad + \left(\int_{-\infty}^{\infty} x (2\phi(x) \Phi(x)) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y \phi(y) dy \right) \\
 &\quad + \theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} x (2\phi(x) \Phi(x)) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y (2\phi(y) \Phi(y)) dy \right) \\
 &= \frac{\theta}{\pi}.
 \end{aligned}$$

Assim, (2 – 12) segue de (1 – 1). ■

Na definição de distribuição normal assimétrica multivariada usaremos o resultado a seguir. Seja o vetor aleatório (X_1, X_2) com distribuição normal bivariada, $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e coeficiente de correlação linear igual a ρ , cuja f.d.p. foi dada na Seção 3.3, temos o

Teorema 17. *Suponha $\rho = 0$. Defina a v.a. $Z = \delta|X_1| + \sqrt{1 - \delta^2}X_2$, com $|\delta| < 1$. Então $Z \sim SN(\frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}})$.*

Dem.: Do fato de $\rho = 0$ segue que X_1 e X_2 são independentes e têm distribuição normal padrão. Seja $W = |X_1|$. Por um resultado da teoria da medida, as v.a.'s W e X_2 são independentes e, portanto, a densidade conjunta é dada por

$$f_{W, X_2}(w, x_2) = 2\phi(w)\phi(x_2)1_{(0, +\infty)}(w).$$

Pelo método do Jacobiano, temos que

$$f_{W, Z}(w, z) = \frac{2}{\sqrt{1 - \delta^2}} \phi(w) \phi\left(\frac{z - \delta w}{\sqrt{1 - \delta^2}}\right) \mathbb{I}_{(0, +\infty)}(w) dw dz, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\delta^2}} \phi(w) \phi\left(\frac{z-\delta w}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) dw \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(w-\delta z)^2}{2(1-\delta^2)}\right\} \exp\left\{-\frac{(z^2-\delta^2 z^2)}{2(1-\delta^2)}\right\} dw \\
 &= \frac{2 \exp\{-z^2/2\}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(w-\delta z)^2}{2(1-\delta^2)}\right\} dw,
 \end{aligned}$$

como o integrando é a f.d.p. de uma normal com média δz e variância $1-\delta^2$ então

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= 2\phi(z) \int_{\frac{-\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}^{+\infty} \phi(w) dw \\
 &= 2\phi(z) \Phi\left(\frac{\delta z}{\sqrt{1-\delta^2}}\right).
 \end{aligned}$$

■

Para obter a expressão dada na Definição 17 basta considerar $\lambda = \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$.

4.2

Distribuição normal assimétrica multivariada

A introdução de uma versão multivariada da distribuição normal assimétrica foi o objetivo do trabalho de Azzalini e Dalla Valle ((5)). À época, os autores ressaltaram o relevante potencial para aplicações práticas dessa versão, dado que no caso multivariado há uma maior escassez de distribuições capazes de modelar dados “não normais” em comparação com o caso univariado, em especial quando as marginais possuem moderada assimetria.

A família de distribuições normais assimétricas multivariadas caracteriza-se por incluir a distribuição normal multivariada como um de seus membros e possuir as distribuições normais assimétricas univariadas como suas marginais.

No trabalho de Azzalini e Dalla Valle ((5)) foram apresentados dois métodos para a construção dessa família de distribuições multivariadas: via transformação das marginais e via condicionamento; o primeiro método é apresentado abaixo.

Construção via transformação das marginais. Seja um vetor aleatório k -dimensional $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_k)^t$ com matriz de correlação $\Psi > 0$ e marginais

$\mathcal{N}(0, 1)$ independentes de $Y_o \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Então:

$$\begin{pmatrix} Y_o \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_{k+1} \left\{ \mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \Psi \end{pmatrix} \right\},$$

onde $\mathbf{0}$ representa um vetor coluna $k \times 1$ cujas coordenadas são iguais a zero. Se $\delta_j \in (-1, 1)$, $j = 1, \dots, k$, definimos

$$Z_j = \delta_j |Y_o| + (1 - \delta_j^2)^{\frac{1}{2}} Y_j, \text{ para } j = 1, \dots, k. \quad (4-7)$$

Do Teorema 17 segue que as v.a.'s Z_j definida em (4-7) têm distribuição $\text{SN}(\lambda(\delta_j))$, onde $\lambda(\delta_j) = \frac{\delta_j}{\sqrt{1-\delta_j^2}}$.

Assim, obtemos uma vetor aleatório $\mathbf{Z}$ cujas distribuições marginais são normais assimétricas. Logo, é natural definir a distribuição conjunta de $\mathbf{Z}$ como sendo uma distribuição normal assimétrica multivariada.

A derivação da f.d.p. de $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_k)^t$ é simples, mas tediosa, e será omitida; seus principais passos podem ser encontrados no trabalho dos referidos autores e a expressão final para esta função é dada por

$$f_k(\mathbf{z}) = 2\phi(\mathbf{z}; \Omega)\Phi(\alpha^t \mathbf{z}), \text{ com } z \in \mathbb{R}^k, \quad (4-8)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha^t &= \frac{\underline{\lambda}^t \Psi^{-1} \Delta^{-1}}{(1 + \underline{\lambda}^t \Psi^{-1} \underline{\lambda})^t}; \\ \Delta &= \text{diag} \left((1 - \delta_1^2)^{\frac{1}{2}}, \dots, (1 - \delta_k^2)^{\frac{1}{2}} \right); \\ \underline{\lambda} &= (\lambda(\delta_1), \dots, \lambda(\delta_k))^t; \\ \Omega &= \Delta (\Psi + \underline{\lambda} \underline{\lambda}^t) \Delta; \end{aligned}$$

e $\phi_k(\mathbf{z}; \Omega)$ representa a densidade da distribuição normal k -dimensional com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ e matriz de covariância Ω .

Definição 21. *Seja $\mathbf{Z}$ um vetor aleatório cuja densidade é dada por (4-8). Então dizemos que $\mathbf{Z}$ tem distribuição normal assimétrica k -dimensional, com o vetor $\underline{\lambda}$ para parâmetro de forma (ou assimetria) e Ψ para parâmetro de dependência. A notação adotada é dada por:*

$$\mathbf{Z} \sim \text{SN}_k(\underline{\lambda}, \Psi). \quad (4-9)$$

Quando consideramos a construção de $\mathbf{Z}$ a partir do método de transformação das marginais, o cômputo da sua matriz de correlação torna-se simples. De fato, dado que Y_o é independente dos Y_j 's, Y_o^2 tem distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade e os resultados (4-3) e (4.1), temos que:

$$\rho(Z_i, Z_j) = \frac{\psi_{ij} \left\{ (1 - \delta_i^2)(1 - \delta_j^2) \right\}^{\frac{1}{2}} + \delta_i \delta_j (1 - 2\pi^{-1})}{\left\{ (1 - 2\pi^{-1} \delta_i^2) (1 - 2\pi^{-1} \delta_j^2) \right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (4-10)$$

para $i, j = 1, \dots, k$.

Na modelagem de dados reais, é necessário introduzir parâmetros de localização e de escala nas distribuições normais assimétricas multivariadas. Consideraremos esses parâmetros na derivação da f.d.p. no caso bivariado.

4.2.1

Distribuição normal assimétrica bivariada

A notação, bem como as restrições impostas aos parâmetros, são idênticas àquelas já adotadas nesta Subseção.

Como dito, a densidade da distribuição normal assimétrica bivariada será obtida a partir do método de construção via transformação das marginais.

Sejam $Y_o, Y_1, Y_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Z_1 = \delta_1 |Y_o| + (1 - \delta_1^2)^{\frac{1}{2}} Y_1$ e $Z_2 = \delta_2 |Y_o| + (1 - \delta_2^2)^{\frac{1}{2}} Y_2$. Seja, ainda, ρ o coeficiente de correlação linear das v.a.'s Y_1 e Y_2 . Temos:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\delta_1 - \delta_2 \omega}{\left\{ (1 - \omega^2) (1 - \omega^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_2 \omega) \right\}^{\frac{1}{2}}}; \\ \alpha_2 &= \frac{\delta_2 - \delta_1 \omega}{\left\{ (1 - \omega^2) (1 - \omega^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_2 \omega) \right\}^{\frac{1}{2}}}; \\ \underline{\lambda} &= \left(\frac{\frac{\delta_1}{\sqrt{1 - \delta_1^2}}}{\frac{\delta_2}{\sqrt{1 - \delta_2^2}}} \right); \\ \omega &= \rho \sqrt{(1 - \delta_1^2) (1 - \delta_2^2)} + \delta_1 \delta_2; \text{ e} \\ \Omega &= \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então, por (4-8), a densidade de uma distribuição normal assimétrica bivariada é dada por

$$f_Z(z_1, z_2) = 2\phi_2(z_1, z_2; \Omega) \Phi(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2). \quad (4-11)$$

Note que quando $\delta_1 = 0 = \delta_2$ obtemos a distribuição normal bivariada com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ e independentes.

É fácil ver que $|\omega| < 1$ e, portanto, Ω é, de fato, uma matriz de correlação. Assim, sempre que for satisfeita a restrição

$$\delta_1 \delta_2 - \sqrt{(1 - \delta_1^2) (1 - \delta_2^2)} < \omega < \delta_1 \delta_2 + \sqrt{(1 - \delta_1^2) (1 - \delta_2^2)}$$

a equação

$$f_Z(z_1, z_2) = 2\phi_2(z_1, z_2; \omega) \Phi(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2), \quad (4-12)$$

é a f.d.p. de uma distribuição normal assimétrica bivariada, onde ω representa a correlação em uma distribuição normal bivariada cujas marginais são $\mathcal{N}(0, 1)$.

De (4 – 10) segue que a correlação de Z_1 e Z_2 é dada por:

$$\rho(Z_1, Z_2) = \frac{\rho \sqrt{(1 - \delta_1^2)(1 - \delta_2^2)} + \delta_1 \delta_2 (1 - 2\pi^{-1})}{\sqrt{(1 - 2\pi^{-1}\delta_1^2)(1 - 2\pi^{-1}\delta_2^2)}}. \quad (4-13)$$

Como no caso univariado, para a modelagem de dados reais é necessário a introdução de vetores de localização, $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^t \in \mathbb{R}^2$, e escala, $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)^t \in \mathbb{R}_+^2$. Seja

$$\mathbf{Z}' = (Z'_1, Z'_2)^t, \text{ com } Z'_j = \mu_j + \sigma_j Z_j, j = 1, 2.$$

Logo,

$$f_{\mathbf{Z}'}(z'_1, z'_2)$$

$$\parallel$$

$$\frac{2}{\sigma_1 \sigma_2} \phi_2 \left(\frac{z'_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{z'_2 - \mu_2}{\sigma_2}; \Omega \right) \Phi \left(\frac{\alpha_1}{\sigma_1} (z'_1 - \mu_1) + \frac{\alpha_2}{\sigma_2} (z'_2 - \mu_2) \right). \quad (4-14)$$

A densidade de Z'_j , para $j = 1, 2$, é dada por

$$f_{Z'_j}(z'_j) = \frac{2}{\sigma_j} \phi \left(\frac{z'_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \Phi \left(\frac{\delta_j}{\sigma_j \sqrt{1 - \delta_j^2}} (z'_j - \mu_j) \right). \quad (4-15)$$

Na Figura 4.4 são plotadas as f.d.p.'s das distribuições normais bivariadas para diversos valores de δ_1 , δ_2 e ρ . Usaremos a notação $SN(\delta_1, \delta_2, \rho)$. Para as distribuições $SN(0, 5; 0, 5; 0, 5)$, $SN(0, 5; 0, 5; -0, 5)$, $SN(-0, 8; 0, 8; 0, 7)$, $SN(0, 8; -0, 8; 0, 7)$, $SN(-0, 3; 0, 3; -0, 2)$ e $SN(0, 3; -0, 3; -0, 2)$ segue de (4 – 13) que os coeficientes de correlação linear dessas distribuições são dados por 0,554; -0,338; 0,033; 0,033; -0,228; e -0,228.

Distribuição condicional. A densidade condicional de Z_2 dado $Z_1 = z_1$ e de Z_1 dado $Z_2 = z_2$ são dadas por

$$f(z_1 | Z_2 = z_2) = \phi_c(z_1 | Z_2 = z_2; \omega) \frac{\Phi(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)}{\Phi(\lambda_2 z_2)}, \quad (4-16)$$

com $\lambda_2 = \frac{\delta_2}{\sqrt{1 - \delta_2^2}}$, e

$$f(z_2 | Z_1 = z_1) = \phi_c(z_2 | Z_1 = z_1; \omega) \frac{\Phi(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)}{\Phi(\lambda_1 z_1)}, \quad (4-17)$$

com $\lambda_1 = \frac{\delta_1}{\sqrt{1-\delta_1^2}}$; em ambas as expressões acima, $z_i \mapsto \phi_c(z_i | Z_j = z_j; \omega)$ denota a f.d.p. associada à $Z_i | Z_j = z_j \sim \mathcal{N}(\omega z_j, 1 - \omega^2)$, com $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2\}$.

4.3

Cálculo dos coeficientes de dependência homogênea de cauda da distribuição normal assimétrica

Para o cálculo dos coeficientes de dependência de cauda associados a uma distribuição normal assimétrica bivariada precisamos do lema abaixo. Tal resultado já foi enunciado na literatura científica ((25)), mas sua correta demonstração é dada abaixo.

Lema 6. *Seja X uma v.a. com distribuição $\mathcal{N}(\xi, \sigma^2)$. Então*

$$\mathbb{E}[\Phi(X)] = \Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{1 + \sigma^2}}\right), \quad (4-18)$$

onde Φ é a f.d.a. associada à distribuição normal padrão.

Dem.: Seja U uma v.a. com distribuição normal padrão e independente de X . Vamos denotar por ϕ_X a f.d.p. de X .

$$\mathbb{E}[\Phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \phi_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(U \leq x) \phi_X(x) dx.$$

Da independência acima segue que $\mathbb{P}(U \leq x) = \mathbb{P}(U \leq X | X = x)$. Logo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(U \leq X | X = x) \phi_X(x) dx \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[I_{\{U \leq X\}} | X]] \\ &= \mathbb{E}[I_{\{U \leq X\}}] \\ &= \mathbb{P}(U \leq X) \\ &= \mathbb{P}(U - X \leq 0). \end{aligned}$$

O resultado segue do fato de $U - X \sim \mathcal{N}(-\xi, 1 + \sigma^2)$. ■

Vamos demonstrar a Propriedade **F** da distribuição normal assimétrica

univariada.

$$\begin{aligned}
 M(t) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{tz\} \phi(z) \Phi(\lambda z) dz \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2} + tz\right\} dz \\
 &= 2 \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z-t)^2\right\} dz; \text{ definindo } u := z - t : \\
 &= 2 \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda u + \lambda t) \phi(u) du; \text{ do Lema 6 temos:} \\
 &= 2 \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\} \Phi\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right) \\
 &= 2 \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\} \Phi(\delta t), \text{ onde } \delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}.
 \end{aligned}$$

■

Seja $\mathbf{Z}$ com distribuição normal assimétrica bivariada cujas f.d.p.'s condicionais são dadas por (4-16) e (4-17). Usaremos os resultados do Teorema 13 para calcular os coeficientes de dependência de cauda para o caso em que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, ou seja, as v.a.'s Z_1 e Z_2 têm distribuição normal assimétrica e seus respectivos parâmetros de assimetria, λ_1 e λ_2 , são positivos.

Teorema 18. *Seja $\mathbf{Z}$ um vetor aleatório bidimensional com f.d.p. dada em (4-11). Suponha $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\frac{1-\omega}{1+\omega} - \lambda_1^2 > 0$ e $\frac{1-\omega}{1+\omega} - \lambda_2^2 > 0$. Os coeficientes de dependência homogênea de cauda de $\mathbf{Z}$ são iguais a zero.*

Dem.: Em primeiro lugar, vamos provar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_1 \leq x \mid Z_2 = x) = 1.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_1 \leq x \mid Z_2 = x) \\
 &\quad \parallel \\
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(\lambda_2 x)} \int_{-\infty}^x \Phi(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 x) \phi_c(z_1 \mid Z_2 = x; \omega) dz_1,
 \end{aligned}$$

onde $z_1 \mapsto \phi_c(z_1 \mid Z_2 = x; \omega)$ denota a f.d.p. associada à distribuição $\mathcal{N}(\omega x, 1 - \omega^2)$.

Como $\alpha_1 > 0$, a integral acima pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{x(\alpha_1 + \alpha_2)} \Phi(z) \frac{1}{\alpha_1} \phi_c\left(\frac{z - \alpha_2 x}{\alpha_1} \mid Z_1 = x; \omega\right) dz.$$

Note que $z \mapsto \frac{1}{\alpha_1} \phi_c \left(\frac{z - \alpha_2 x}{\alpha_1} \mid Z_1 = x; \omega \right)$ é a f.d.p. da distribuição $\mathcal{N}(\alpha_1 \omega x + \alpha_2 x, \alpha_1^2 (1 - \omega^2))$, que denotaremos por $\tilde{\phi}$; com isso, podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_1 \leq x \mid Z_2 = x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(\lambda_2 x)} \int_{-\infty}^{x(\alpha_1 + \alpha_2)} \Phi(z) \tilde{\phi}(z) dz;$$

mas

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x(\alpha_1 + \alpha_2)}^{+\infty} \Phi(z) \tilde{\phi}(z) dz \leq \int_{x(\alpha_1 + \alpha_2)}^{+\infty} \tilde{\phi}(z) dz$$

e a integral à direita da desigualdade acima representa a probabilidade do intervalo $(x(\alpha_1 + \alpha_2), +\infty)$ com relação à distribuição $\mathcal{N}(\alpha_1 \omega x + \alpha_2 x, \alpha_1^2 (1 - \omega^2))$, ou de modo equivalente, representa a probabilidade do intervalo $(\alpha_1 x(1 - \omega), +\infty)$ com relação à distribuição $\mathcal{N}(0, \alpha_1^2 (1 - \omega^2))$, que é igual a zero quando $x \rightarrow +\infty$, para $\alpha_1 > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_1 \leq x \mid Z_2 = x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(\lambda_2 x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) \tilde{\phi}(z) dz \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Phi(\lambda_2 x)} \Phi \left(\frac{\alpha_1 \omega x + \alpha_2 x}{\sqrt{1 + \alpha_1^2 (1 - \omega^2)}} \right) = 1, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do Lema 6. Vale ressaltar que das restrições $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ segue que $\alpha_1 \omega + \alpha_2 > 0$.

Com idêntico raciocínio, obtemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_2 \leq x \mid Z_1 = x) = 1,$$

para $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\alpha_2 > 0$.

Portanto, $\lambda_{UU} = 0$ para as restrições dadas.

Para o cálculo de λ_{LL} , em primeiro lugar, vamos provar que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(Z_1 \leq x \mid Z_2 = x) = 0.$$

Com base na demonstração acima, temos que

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(Z_1 \leq x \mid Z_2 = x) \\ &\parallel \\ &\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\Phi(\lambda_2 x)} \int_{-\infty}^{x(\alpha_1 + \alpha_2)} \Phi(z) \tilde{\phi}(z) dz; \end{aligned}$$

note que

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\Phi(\lambda_2 x)} \int_{-\infty}^{x(\alpha_1 + \alpha_2)} \Phi(z) \tilde{\phi}(z) dz \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\tilde{\Phi}(x(\alpha_1 + \alpha_2))}{\Phi(\lambda_2 x)},$$

onde $z \mapsto \tilde{\Phi}(z)$ é a f.d. acumulada da distribuição $\mathcal{N}(\alpha_1 \omega x + \alpha_2 x, \alpha_1^2(1 - \omega^2))$; essas desigualdades podem ser escritas porque provaremos a seguir que esses limites existem para as restrições elencadas. Logo, supondo $\lambda_2 > 0$ e $\frac{1-\omega}{1+\omega} - \lambda_2^2 > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\tilde{\Phi}(x(\alpha_1 + \alpha_2))}{\Phi(\lambda_2 x)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\Phi\left(\frac{x\sqrt{1-\omega}}{\sqrt{1+\omega}}\right)}{\Phi(\lambda_2 x)} \\ &= \frac{\sqrt{1-\omega}}{\lambda_2 \sqrt{1+\omega}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} \left\{\frac{1-\omega}{1+\omega} - \lambda_2^2\right\}\right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da aplicação da Regra de l'Hôpital.

Com idêntico raciocínio, obtemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(Z_2 \leq x \mid Z_1 = x) = 0,$$

para as restrições $\lambda_1 > 0$ e $\frac{1-\omega}{1+\omega} - \lambda_1^2 > 0$.

Portanto, $\lambda_{LL} = 0$ para as restrições dadas. ■

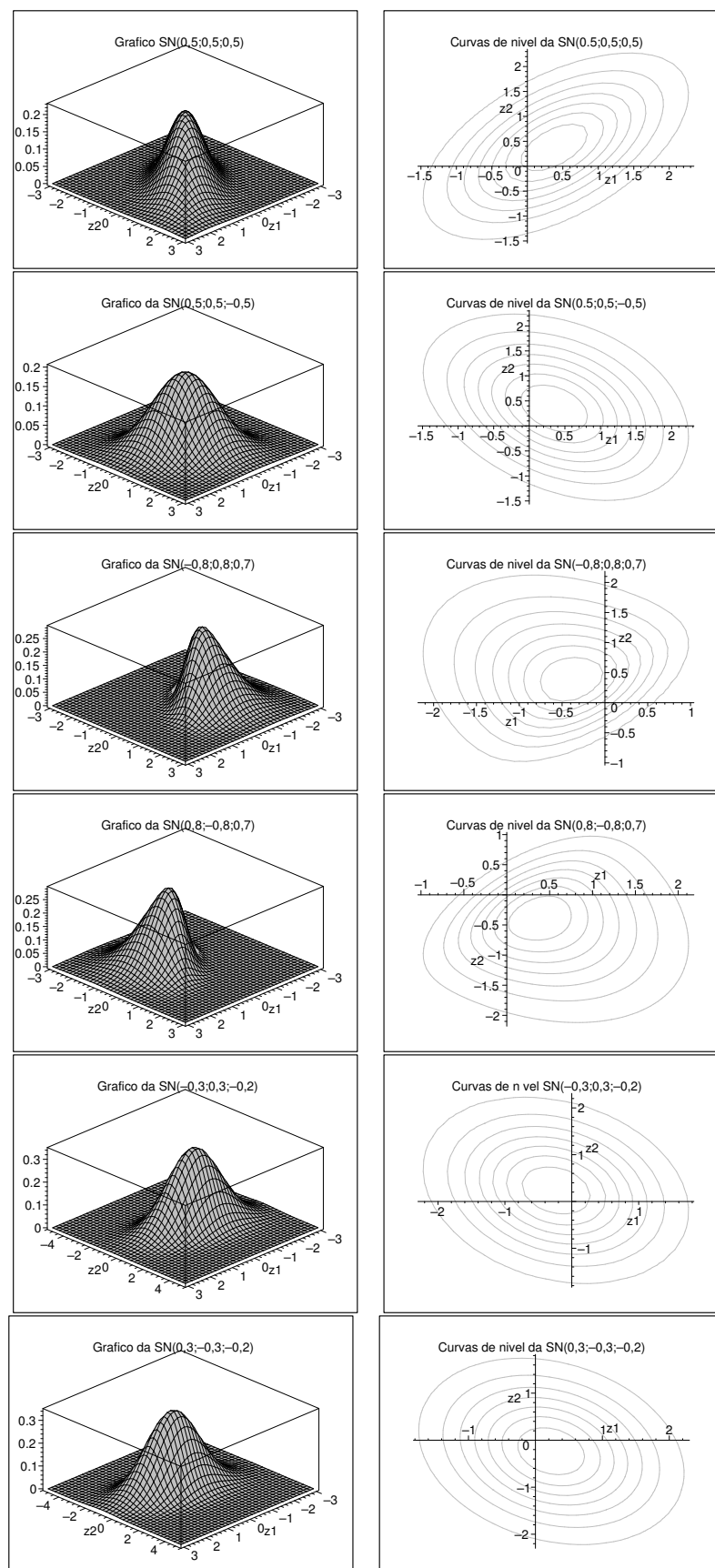


Figura 4.4: Gráficos e curvas de nível de distribuições normais assimétricas bivariadas.