2
Cópulas

A estrutura de dependência das variáveis aleatórias (v.a.'s) reais é completamente determinada pela função de distribuição acumulada (f.d.a.) conjunta; assim, toda função de distribuição acumulada de um vetor aleatório implicitamente contém tanto as descrições dos comportamentos individuais de cada uma das v.a.'s componentes do vetor quanto a descrição da estrutura de dependência existente entre as variáveis.

Zacks ((25)) vai além e afirma que, do ponto de vista da teoria estatística, uma completa caracterização do fenômeno estatístico (por exemplo, os resultados aleatórios de um experimento) é dada pela f.d.a. conjunta associada.

As cópulas estão relacionadas ao estudo das distribuições multivariadas quando suas distribuições marginais univariadas são previamente dadas ou fixadas. Dentre as propriedades das cópulas que estudaremos, destacamos o fato das cópulas serem funções que unem as f.d.a.'s multivariadas as suas respectivas marginais univariadas. Além disso, as cópulas são invariantes por transformações estritamente crescentes q.c. das v.a.'s em análise. Devido a essas duas propriedades, diz-se que as cópulas capturam toda a estrutura de dependência envolvida, o que explica o motivo pelo qual o estudo das cópulas ganhou grande destaque nos últimos anos ((11)).

Na Seção 2.1 definimos uma cópula e apresentamos os resultados que motivam o seu uso no estudo da estrutura de dependência entre variáveis. Na Seção 2.2 estudamos a classe das cópulas Arquimedianas.

2.1
Definições e resultados básicos

Definição 1. (***Cópula***). *Uma cópula bivariada é uma função $C : I^2 \to I$, onde $I = [0,1]$, com as seguintes propriedades:*

(i) para todo u, v em I temos que

$$C(u,0) = 0 = C(0,v) \tag{2-1}$$

e

$$C(u,1) = u \text{ e } C(1,v) = v; \tag{2-2}$$

(ii) para todo u_1,u_2, v_1 *e* v_2 *em* I *tais que* $u_1 \leq u_2$ *e* $v_1 \leq v_2$,

$$V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0, \quad (2\text{-}3)$$

onde V_C *é chamado de* $C-$*volume do retângulo* $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$. *A condição* $(2-3)$ *recebe o nome de* $2-$*crescente.*

Segue que C é não-decrescente em cada variável (basta tomar $v_1 = 0$ ou $u_1 = 0$ em $(2-3)$) e é uniformemente contínua, ou seja,

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|, \ \forall \ u_1, u_2, v_1, v_2 \in I,$$

resultado cuja demonstração pode ser encontrada em (21).

Como $C(u, v) = V_C([0, u] \times [0, v])$, podemos pensar o valor da cópula C no ponto (u, v), $C(u, v)$, como um valor de I que é atribuído a todo retângulo $[0, u] \times [0, v]$ de I^2.

Teorema 1. *Seja* C *uma cópula. Então para todo* $(u, v) \in [0, 1]^2$

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v). \quad (2\text{-}4)$$

Dem.: A desigualdade à direita segue do fato da cópula C ser não-decrescente em cada variável e das igualdades em $(2-2)$. Para obter a desigualdade à esquerda, basta calcular o $C-$volume do retângulo $[u, 1] \times [v, 1]$. ■

É fácil verificar que as quotas dadas em $(2-4)$ são, de fato, cópulas, cujas denominações são dadas nos dois próximos exemplos:

Exemplo 1. (***Quota superior de Frèchet-Hoeffding***). *A cópula quota superior de Frèchet-Hoeffding é denotada por* M *e é definida por*

$$M(u, v) = \min(u, v), \ (u, v) \in I^2. \quad (2\text{-}5)$$

O gráfico e as curvas de nível da cópula M são dados na Figura 2.1.

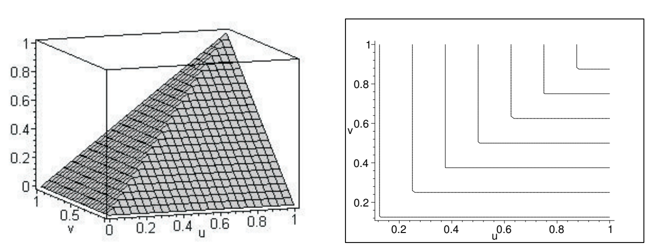


Figura 2.1: Gráfico e curvas de nível da cópula M.

Exemplo 2. (***Quota inferior de Frèchet-Hoeffding***). *A cópula quota inferior de Frèchet-Hoeffding é denotada por W e é definida por*

$$W(u,v) = \max(u+v-1,0),\ (u,v) \in I^2. \tag{2-6}$$

O gráfico e as curvas de nível da cópula W são dados na Figura 2.2.

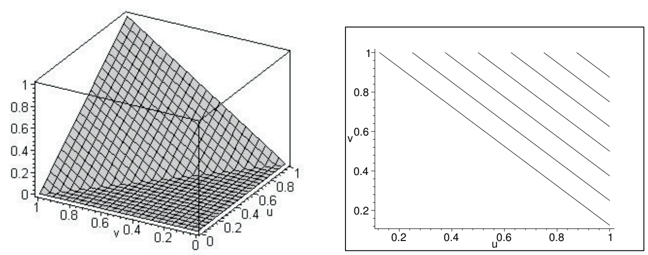


Figura 2.2: Gráfico e curvas de nível da cópula W.

Nesta Seção, daqui em diante, $\mathbf{H}$ é a f.d.a. conjunta associada ao vetor aleatório (X,Y) e suas marginais serão denotadas por F_X e F_Y, respectivamente.

A importância das cópulas no estudo das distribuições multivariadas pode ser resumida pelo famoso resultado abaixo, conhecido por Teorema de Sklar (ver (21), pág. 18), que mostra, primeiro, que todas as f.d.a.'s multivaridas têm uma cópula associada, e segundo, que toda cópula pode ser usada em conjunto com f.d.a.'s univariadas para construir f.d.a.'s multivariadas. Em seu enunciado usaremos as notações: $Im(F_X) := \{z; z = F_X(x)$ para algum $x \in \overline{\mathbb{R}}\}$ e $Im(F_Y) := \{z; z = F_Y(y)$ para algum $y \in \overline{\mathbb{R}}\}$.

De modo fundamentado, é o Teorema de Sklar que nos permite afirmar que toda f.d.a. conjunta contém tanto a descrição do comportamento marginal de cada uma das v.a.'s componentes do vetor aleatório quanto a descrição da estrutura de dependência entre as v.a.'s.

A versão para o espaço bidimensional é dada pelo

Teorema 2. (***Teorema de Sklar***). *Sejam $\boldsymbol{H}$, F_X e F_Y como definidas acima. Então existe uma cópula C tal que para todo x, y em $\bar{\mathbb{R}}$,*

$$\boldsymbol{H}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \tag{2-7}$$

Se F_X e F_Y são contínuas, então C é única; caso contrário, C é unicamente determinada em $Im(F_X) \times Im(F_Y)$. Reciprocamente, se C é uma cópula e F_X e F_Y são f.d.a.'s univariadas então a função $\boldsymbol{H}$, definida em $(2-7)$, é uma f.d.a. conjunta com marginais F_X e F_Y.

De $(2-7)$ segue a motivação que levou Sklar ((24)) a usar a palavra cópula para designar a função que descobrira. A palavra cópula é um substantivo com origem no Latim e significa união ou ligação.

O Teorema de Sklar sugere que, em caso de distribuições marginais contínuas, é natural definir a cópula associada a uma distribuição.

Definição 2. (***Cópula associada***). *Se o vetor aleatório (X, Y) tem f.d.a conjunta $\boldsymbol{H}$ com distribuições marginais contínuas F_X e F_Y, então a cópula associada à $\boldsymbol{H}$ (ou ao vetor aleatório (X, Y)) é a f.d.a. C de $(F_X(X), F_Y(Y))$.*

As cópulas M e W estão relacionadas à dependência perfeita entre v.a.'s: associamos a (X, Y) a cópula M (ou W) se, e somente se, cada uma v.a. é uma função estritamente crescente (ou decrescente) q.c. da outra ((21)).

Assim, do parágrafo acima, da desigualdade $(2-4)$ e da igualdade $(2-7)$, temos uma indicação concreta da importância das cópulas no estudo da dependência entre v.a.'s: com o uso de cópulas adequadas, a partir das distribuições marginais F_X e F_Y podemos obter f.d.a.'s conjuntas para X e Y que traduzem desde o fato de X e Y serem relacionadas por uma função estritamente decrescente q.c. até o fato de serem relacionadas por uma função estritamente crescente q.c..

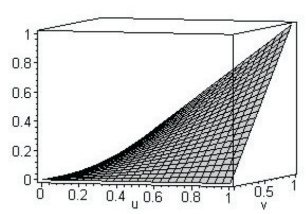
Com base na afirmação acima, é de se esperar a existência de uma cópula associada à independência de X e Y.

Sabemos que X e Y são independentes se, e somente se, $\mathbf{H}$ fatora como o produto de F_X e F_Y. Temos o

Exemplo 3. (***Cópula produto***). *A cópula associada a independência de v.a.'s contínuas é chamada de cópula produto,* Π, *e é definida por*

$$\Pi(u, v) = uv, \;\; (u, v) \in I^2. \tag{2-8}$$

O gráfico e as curvas de nível da cópula Π são dados na Figura 2.3.



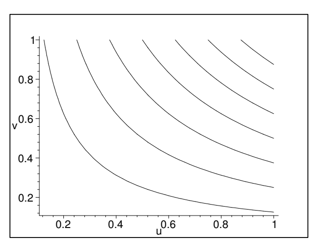


Figura 2.3: Gráfico e curvas de nível da cópula Produto

Segundo Nelsen ((21)) a "propriedade de dependência" para pares de v.a.'s pode ser pensada como um subconjunto do conjunto de todas as f.d.a.'s bivariadas, onde a cada um desses subconjuntos está associada uma determinada cópula.

As cópulas associadas à distribuição normal e à distribuição t-Student são muito utilizadas para modelar f.d.a.'s conjuntas e caracterizam estruturas de dependências interessantes. Suas definições serão dadas no próximo capítulo.

Teorema 3. *Sejam X, Y, F_X, F_Y, $\boldsymbol{H}$ e C como acima. Se f e g são funções estritamente crescentes q.c. nos conjuntos-imagem de X e Y, respectivamente, então a cópula associada ao vetor aleatório $(f(X), g(Y))$ é, também, a cópula C.*

Dem.: Ver (21).

Segundo Schweizer e Wolff ((23)) é precisamente a cópula que captura as propriedades da distribuição conjunta que são invariantes por transformações estritamente crescentes das v.a.'s associadas. Mendes ((19)) cita o fato dessa propriedade garantir, por exemplo, que retornos financeiros e seus logaritmos tenham a mesma cópula, e, também, o fato dessa propriedade ser útil em algumas situações nas quais seja mais conveniente trabalhar com transformações crescentes das v.a.'s observadas.

Assim como a independência corresponde ao subconjunto de distribuições cujos elementos estão associados à cópula $\boldsymbol{\Pi}$, muitas propriedades da dependência podem ser descritas através da identificação da cópula, ou simplesmente, através das propriedades da cópula associada às f.d.a.'s de um determinado subconjunto. Um exemplo é a medida τ de Kendall ((15)). Um outro exemplo de medida de dependência que é completamente definida pela cópula associada é a dependência de cauda, assunto do próximo capítulo.

Definição 3. (***Função quase-inversa***). *Seja F uma f.d.a. univariada. Então a função quase-inversa de F é qualquer função $F^{(-1)}$ com domínio $[0,1]$ tal que*

(i) Se $t \in Im(F)$ então $F^{(-1)}(t)$ é qualquer número $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$, isto é, para todo $t \in Im(F)$

$$F\left(F^{(-1)}(t)\right) = t; \;\; e$$

(ii) Se $t \notin Im(F)$ então

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x; F(x) \geq t\} = \sup\{x; F(X) \leq t\}.$$

Se F é estritamente crescente, então sua função quase-inversa é única e escrevemos $F^{(-1)} = F^{-1}$, onde F^{-1} é a função inversa usual.

Temos o

Corolário 1. *Seja* $\boldsymbol{H}$ *uma f.d.a. conjunta com marginais contínuas* F_X *e* F_Y*, e seja* C *a única cópula tal que a igualdade* $(2-7)$ *é satisfeita. Então para todo* $(u,v) \in [0,1]^2$

$$C(u,v) = H\left(F_X^{(-1)}(u), F_Y^{(-1)}(v)\right). \tag{2-9}$$

A fórmula (2-9) nos mostra como as cópulas expressam dependência em uma escala quantílica, pois o valor $C(u,v)$ é a probabilidade conjunta de X ser menor do que ou igual ao seu u-quantil e Y ser menor do que ou igual ao seu $v-$quantil.

O estudo da cópula associada é apenas um dos caminhos para tratar a dependência em um modelo multivariado e é talvez um modo mais natural em um contexto distribucional estático do que em um contexto dinâmico de séries temporais. Apesar disso, o conceito das cópulas é visto como extremamente útil e existem diversas vantagens em introduzi-lo e estudá-lo.

Primeiro, as cópulas nos ajudam a entender a estrutura de dependência entre variáveis em um nível mais profundo. Elas permitem-nos ver potenciais equívocos dos estudos de dependência focados apenas no coeficiente de correlação linear e nos mostram como definir várias outras medidas de dependência úteis. O fato das cópulas expressarem a dependência em uma "escala quantílica"é útil para descrever a dependência de valores extremos e é natural na gestão de risco, dado que o Valor-em-Risco (VaR) nos leva a pensar o risco em termos dos quantis de distribuições de perda.

Além disso, as cópulas são particularmente úteis no gerenciamento de risco, onde com freqüência temos mais informações sobre o comportamento marginal dos riscos individualmente do que sobre suas estruturas de dependência ((18)).

Exemplo 4. (***Família de cópulas Farlie-Gumbel-Morgenstern*** *ou* ***Família de cópulas FGM***). *A família de cópulas Farlie-Gumbel-Morgenstern,* C_θ^{FGM}, $-1 \leq \theta \leq 1$, *é definida por*

$$C_\theta^{FGM}(u,v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v),\ (u,v) \in I^2. \tag{2-10}$$

O gráfico e as curvas de nível da cópula FGM são dados na Figura 2.4.

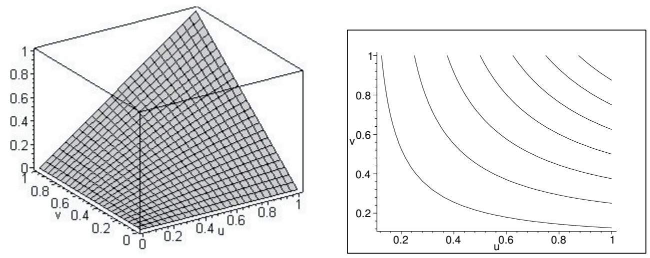


Figura 2.4: Fig: Gráfico e curvas de nível da cópula FGM com $\theta = 0,5$.

A cópula FGM é usada para modelos onde exista uma pequena dependência entre as v.a.'s envolvidas ((21)). Tal pequena dependência pode ser notada na Figura 2.5, na qual são plotadas 500 simulações para a cópula FGM, para $\theta = -1$ e $\theta = 1$.

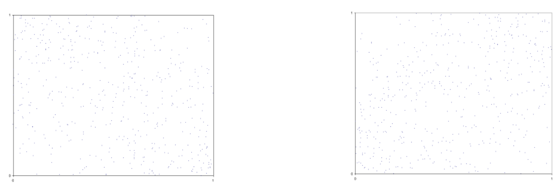


Figura 2.5: Plotagem de 500 simulações para a cópula FGM para $\theta = -1$ e $\theta = 1$.

Observe que a recíproca do Teorema de Sklar nos dá outra característica importante das cópulas: se C é uma função que satisfaz as condições dadas na Definição 1, para quaisquer F_X e F_Y, a função $\mathbf{H}$ definida por $(2-7)$ é uma f.d.a. conjunta, cujas marginais são F_X e F_Y. Vamos usar este fato e a cópula FGM para construir a distribuição dada no

Exemplo 5. (***Distribuição bivariada com marginais normal-padrão e à qual está associada a cópula FGM***). *Da cópula* FGM, *definida em* $(2-10)$, *e do Teorema de Sklar temos que:*

$$\boldsymbol{H}_\theta^{(FGM,\Phi)}(x,y) = \Phi(x)\Phi(y) + \theta\Phi(x)\Phi(y)(1-\Phi(x))(1-\Phi(y)), \qquad \text{(2-11)}$$

$-1 \leq \theta \leq 1$, *define uma f.d.a. bivariada com marginais* Φ, *que denota a f.d.a. da distribuição normal-padrão* $\mathcal{N}(0,1)$.

No Teorema abaixo, obtemos o coeficiente de correlação linear da distribuição $(2-11)$. A demonstração será dada na Seção 4.1, pois requer alguns resultados relacionados com a distribuição normal assimétrica. Para uma demonstração alternativa desse resultado, sugerimos (17).

Teorema 4. *Seja* (X, Y) *com a distribuição dada em* $(2-11)$. *Então o seu coeficiente de correlação linear,* $\rho_\theta^{(FGM)}$, *é dado por*

$$\rho_\theta^{(FGM)} = \frac{\theta}{\pi}. \tag{2-12}$$

Segue de $(2-12)$ que $\rho_\theta^{(FGM)}$ varia no intervalo $(-0,318; 0,318)$.

O pequeno intervalo de variação de ρ para a distribuição $(2-11)$ é esperado pois, como dissemos, o coeficiente de correlação linear expressa a dependência linear entre X e Y e a cópula FGM é empregada para modelar v.a.'s entre as quais existe pequena dependência.

Para marginais absolutamente contínuas, o coeficiente de correlação linear das distribuições às quais está associada a cópula FGM varia no intervalo $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, cujos extremos são atingidos quando ambas as marginais têm distribuição uniforme em $(0, 1)$ e $\theta = \pm 1$ ((22)).

O Exemplo acima e o parágrafo anterior nos mostram que ρ é uma medida que depende das distribuições marginais envolvidas. Porém, como as cópulas capturam toda a estrutura da dependência entre X e Y, parece ser razoável que exista uma expressão para ρ que envolva a cópula associada e as f.d.a.'s marginais. Para obter tal expressão, precisamos do resultado abaixo, demonstrado, em 1940, por Hoeffding ((13)).

Lema 1. *Com base na notação já definida e denotando por* $\mathbb{E}$ *a esperança de uma v.a., temos que*

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \int\int_{\mathbb{R}^2} [\boldsymbol{H}(x, y) - F_X(x)F_Y(y))\, dxdy,$$

desde que as esperanças no primeiro membro da igualdade existam.

Assim, a partir da mudanças de variáveis $u = F_X(x)$, $v = F_Y(y)$ e da igualdade dada por (1-1), temos que

$$\rho = \frac{1}{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)} \int\int_{[0,1]^2} [C(u, v) - uv]\, dF_X^{(-1)}(u) dF_Y^{(-1)}(v), \tag{2-13}$$

Nas Figuras 2.6 e 2.7 são mostradas as curvas de nível das distribuições FGM e normal bivariada, ambas com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ e $\rho = 0,318$. Vale ressaltar que, apesar de terem marginais e ρ's iguais, essas distribuições apresentam fdp's distintas e, portanto, é falso afirmar que as distribuições marginais e o coeficiente de correlação linear determinam a distribuição conjunta. Logo, somente a medida de dependência linear das marginais não traduz com fidelidade toda a dependência existente.

Um outro exemplo interessante é a família de cópulas de Ali-Mikhail-Haq, que será útil na apresentação da classe das cópulas Arquimedianas. Essa famíla

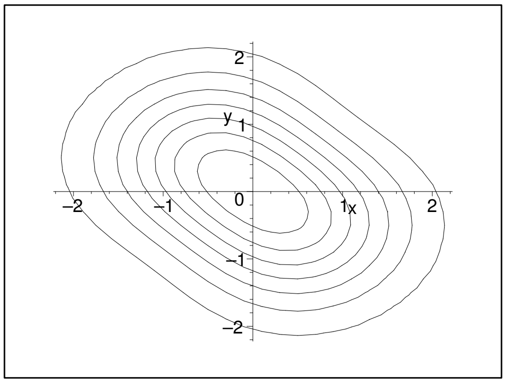


Figura 2.6: Curvas de nível da distribuição $(2-11)$ com marginais $\mathcal{N}(0,1)$, $\theta = -1$ e $\rho = -0,318$.

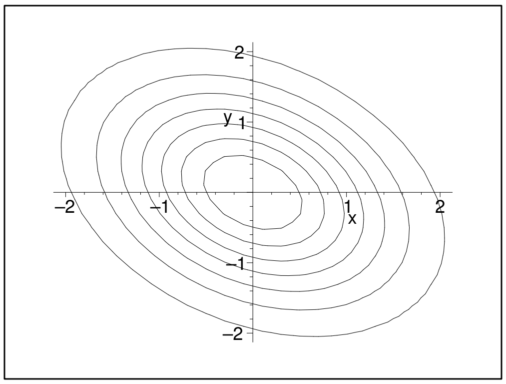


Figura 2.7: Curvas de nível da distribuição normal bivariada com marginais $\mathcal{N}(0,1)$ e $\rho = -0,318$.

está relacionada ao conceito de excedente de sobrevivência (*odds for survival*), denominação dada à razão $\frac{\mathbb{P}(X>x)}{\mathbb{P}(X\leq x)}$, entre a probabilidade de sobrevivência além do tempo x e a probabilidade de falha antes do tempo x, isto é, $\frac{\overline{F}_X(x)}{F_X(x)} = \frac{1-F_X(x)}{F_X(x)}$, para uma dada v.a. X, onde $\overline{F}_X$ é conhecida como função de sobrevivência e é definida por $\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$. O conceito de excedente de sobrevivência é útil nos estudos do tempo de vida de organismos vivos ou nos estudos do tempo de vida útil de componentes eletrônicos. No caso bivariado, temos que $\overline{\mathbf{H}}(x,y) = \mathbb{P}(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + \mathbf{H}(x,y)$, $\forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Assim como $F_X(x) = \left(1 + \frac{1-F_X(x)}{F_X(x)}\right)^{-1}$, igualdade que está definida para quase todos os pontos $x \in \overline{\mathbb{R}}$, idênticas igualdades podem ser obtidas para F_Y e $\mathbf{H}$.

Se as v.a.'s X e Y são independentes, temos que

$$\frac{1-\mathbf{H}(x,y)}{\mathbf{H}(x,y)} = \frac{1-F_X(x)}{F_X(x)} + \frac{1-F_Y(y)}{F_Y(y)} + \frac{(1-F_X(x))}{F_X(x)}\frac{(1-F_Y(y))}{F_Y(y)}. \quad (2\text{-}14)$$

Com base em $(2-14)$, os pesquisadores Ali, Mikhail e Haq ((20)) propuseram o estudo de distribuições bivariadas para as quais os excedentes de sobrevivência relativos a (X,Y), X e Y satisfizessem:

$$\frac{1-\mathbf{H}(x,y)}{\mathbf{H}(x,y)} = \frac{1-F_X(x)}{F_X(x)} + \frac{1-F_Y(y)}{F_Y(y)} + (1-\theta)\frac{(1-F_X(x))}{F_X(x)}\frac{(1-F_Y(y))}{F_Y(y)}, \tag{2-15}$$

para alguma constante θ. Note que para $\theta = 0$ obtemos $(2-14)$.

Supondo que a igualdade $(2-15)$ é sempre satisfeita para X e Y contínuas, com $-1 \leq \theta \leq 1$, segue do Teorema de Sklar o

Exemplo 6. *(**Família de cópulas Ali-Mikhail-Haq**). A família de cópulas Ali-Mikhail-Haq, C_θ^{AMH}, $-1 \leq \theta \leq 1$, é definida por*

$$C_\theta^{AMH}(u,v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}, \ \forall (u,v) \in I^2. \tag{2-16}$$

O gráfico e as curvas de nível da cópula AMH para $\theta = -1$ são dados na Figura 2.8.

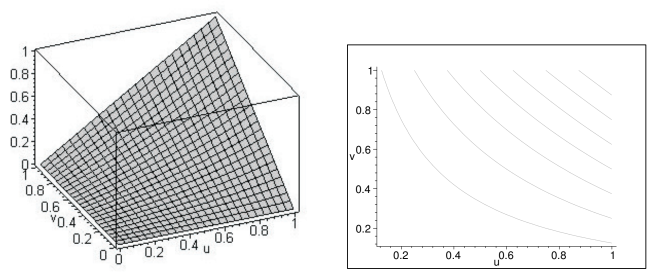


Figura 2.8: Gráfico e curvas de nível da cópula AMH com $\theta = -1$.

Vale ressaltar que a demonstração de que a função $\mathbf{H}$ que satisfaz a igualdade $(2-15)$ é uma f.d.a. bivariada com marginais F_X e F_Y, para $-1 \leq \theta \leq 1$, é mais simples quando provamos que $(2-16)$ é uma cópula e usamos a relação dada em $(2-7)$ para obter $\mathbf{H}$, conforme (21).

Assim como ocorre com a família de cópulas FGM, a família de cópulas AMH é usada para modelos onde exista uma pequena dependência entre as v.a.'s envolvidas ((21)).

Uma questão que surge de modo natural é a seguinte: existe uma relação entre a $\overline{\mathbf{H}}$, $\overline{F}_X$ e $\overline{F}_Y$ nos moldes da relação $(2-7)$, determinada pelo Teorema de Sklar? Para responder a tal pergunta, seja C a cópula associada a X e Y. Temos que

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{H}}(x,y) &= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + \mathbf{H}(x,y) \\
&= \overline{F}_X(x) + \overline{F}_Y(y) - 1 + C(F_X(x), F_Y(y)) \\
&= \overline{F}_X(x) + \overline{F}_Y(y) - 1 + C(1-\overline{F}_X(x), 1-\overline{F}_Y(y)),
\end{aligned}$$

$\forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$; assim, se definimos uma função $\widehat{C} : I^2 \to I$ tal que

$$\widehat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v), \tag{2-17}$$

temos que

$$\overline{\mathbf{H}}(x,y) = \widehat{C}(\overline{F}_X(x), \overline{F}_Y(y)). \tag{2-18}$$

É simples provar que $\widehat{C}$ é, de fato, uma cópula.

Definição 4. *A cópula definida pela equação* $(2-17)$ *é chamada de cópula de sobrevivência.*

Note que $\widehat{C}(u,v) = V_C([1-u,1] \times [1-v,1])$ e, portanto, $\widehat{C} = C$ se, e somente se, $V_C([0,u] \times [0,v]) = V_C([1-u,1] \times [1-v,1])$, $\forall (u,v) \in I^2$. Assim, temos a seguinte interpretação geométrica: $\widehat{C}(u,v) = C(u,v)$ se, e somente se, os retângulos $[0,u] \times [0,v]$ e $[1-u,1] \times [1-v,1]$ têm iguais $C-$volumes, $\forall (u,v) \in I^2$.

É fácil ver que $C_\theta^{FGM} = \widehat{C}_\theta^{FGM}$, $M = \widehat{M}$, $W = \widehat{W}$ e $\Pi = \widehat{\Pi}$. Para a família de cópulas de Ali-Mikhail-Haq temos que

$$\widehat{C}_\theta^{AMH}(u,v) = \frac{uv(1+\theta) - \theta uv(u+v)}{1 - \theta uv}, \ \forall (u,v) \in I^2 \text{ e } -1 \leq \theta \leq 1.$$

A partir das definições abaixo, obtemos uma interpretação probabilística para a igualdade $C = \widehat{C}$.

Definição 5. *Seja X uma v.a. e a um ponto de $\mathbb{R}$. Dizemos que X é simétrica em torno de a se as distribuições das v.a.'s $X - a$ e $a - X$ são iguais, isto é, $\mathbb{P}(X - a \leq x) = \mathbb{P}(a - X \leq x)$, $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$. Quando X é uma v.a. contínua com f.d.a. F, de modo equivalente, podemos escrever*

$$F(a+x) = \overline{F}(a-x), \ \forall x \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{2-19}$$

Se X for descontínua, $(2-19)$ é válida nos seus pontos de continuidade.

Definição 6. *Sejam X e Y v.a.'s e seja (a,b) um ponto de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que (X,Y) é radialmente simétrico em torno de (a,b) se as distribuições dos vetores aleatórios $(X-a, Y-b)$ e $(a-X, b-Y)$ são iguais.*

Teorema 5. *Sejam X, Y, e $\boldsymbol{H}$ como já definidos. Suponha que X e Y são v.a.'s contínuas. Seja (a,b) um ponto de $\mathbb{R}^2$. Então (X,Y) é radialmente simétrico em torno de (a,b) se, e somente se,*

$$\boldsymbol{H}(a+x, b+y) = \overline{\boldsymbol{H}}(a-x, b-y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2-20}$$

Dem.: Basta notar que

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(a+x,b+y) &= \mathbb{P}\left(X \le a+x, Y \le b+y\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X-a \le x, Y-b \le y\right)\\ &= \mathbf{H}_{X-a,Y-b}(x,y)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{H}}(a-x,b-y) &= \mathbb{P}\left(X > a-x, Y > b-y\right)\\ &= \mathbb{P}\left(a-X < x, b-Y < y\right)\\ &= \mathbf{H}_{a-X,b-Y}(x,y)\end{aligned}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Note que $\mathbf{H}_{X-a,Y-b}$ e $\mathbf{H}_{a-X,b-Y}$ denotam as f.d.a.'s de $(X-a, Y-b)$ e de $(a-X, b-Y)$, respectivamente. ■

A interpretação probabilística para a igualdade $\widehat{C} = C$ é dada pelo

Teorema 6. *Sejam X, Y, $\boldsymbol{H}$ e (a,b) como no Teorema anterior. Suponha que X e Y são contínuas e simétricas em torno dos pontos a e b, respectivamente. Então (X,Y) é radialmente simétrico em torno de (a,b) se, e somente se, $C = \widehat{C}$.*

Dem.: De $(2-7)$, $(2-18)$, $(2-19)$ e de $(2-20)$, o resultado segue das equivalências

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}(a+x,b+y) = \overline{\mathbf{H}}(a-x,b-y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\
\Leftrightarrow\ & C(F_X(a+x), F_Y(b+y)) = \widehat{C}(\overline{F}_X(a-x), \overline{F}_Y(b-y))\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\
\Leftrightarrow\ & C(F_X(a+x), F_Y(b+y)) = \widehat{C}(F_X(a+x), F_Y(b+y))\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\
\Leftrightarrow\ & C(u,v) = \widehat{C}(u,v)\ \forall (u,v) \in I^2.
\end{aligned}$$

■

Definição 7. *Uma cópula C é dita simétrica se $C(u,v) = C(v,u), \forall (u,v) \in I^2$.*

Definição 8. *Dizemos que as v.a.'s X e Y são permutáveis se os vetores aleatórios (X,Y) e (Y,X) têm igual distribuição, ou seja, $\boldsymbol{H}(x,y) = \boldsymbol{H}(y,x)$, $\forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.*

Se X e Y são permutáveis então $F_X(z) = \mathbf{H}(z,\infty) = \mathbf{H}(\infty,z) = F_Y(z)$, $\forall z \in \overline{\mathbb{R}}$. Logo, v.a.'s permutáveis são identicamente distribuídas.

Para v.a.'s contínuas e identicamente distribuídas, o próximo Teorema nos afirma que os conceitos de cópula simétrica e permutabilidade são equivalentes.

Teorema 7. *Sejam X, Y, v.a.'s contínuas. Então, X e Y são permutáveis se, e somente se, $F_X = F_Y$ e C é simétrica.*

Dem.: O resultado segue do Teorema de Sklar. ■

2.2
Cópulas Arquimedianas

Dentre as cópulas, merece destaque a classe das cópulas Arquimedianas. Essa classe, além de propriedades matemáticas interessantes, tem grande aplicação na modelagem de problemas econômicos, financeiros e atuariais. Essa vasta gama de aplicações das cópulas Arquimedianas advém da sua lei de formação simples, do grande número de famílias de cópulas assim classificadas e das propriedades desejáveis que possuem.

Definição 9. (***Pseudo-Inversa***). *Seja $\varphi : I \to [0, \infty]$ uma função contínua e estritamente decrescente tal que $\varphi(1) = 0$. Chamamos de pseudo-inversa de φ a função $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \to [0, \infty]$ dada por*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & , \quad 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0 & , \quad \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

É fácil verificar que $\varphi^{[-1]}$ é uma função contínua, não-crescente em $[0, \infty]$ e estritamente decrescente em $[0, \varphi(0)]$. Também, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ em I, e

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0) & , \quad \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases}$$

ou seja,

$$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \min(t, \varphi(0)).$$

Se tomamos $\varphi(0) = \infty$ na Definição 9 temos que a pseudo-inversa é igual à função inversa propriamente dita, isto é, $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Teorema 8. *Seja φ uma função continua e estritamente decrescente de I em $[0, \infty]$ tal que $\varphi(1) = 0$ e seja $\varphi^{[-1]}$ a pseudo-inversa de φ. Seja $C : I^2 \to I$ definida por*

$$C(u, v) := \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)), \ \forall u, v \in I. \tag{2-21}$$

Então a função C é uma cópula se, e somente se, φ é convexa.

Dem.: Ver (21), página 111.

Definição 10. (***Cópula Arquimediana***). *As cópulas definidas por $(2 - 21)$ são chamadas de cópulas Arquimedianas. A função φ é chamada de função geradora.*

Com o objetivo de motivar a definição de cópulas Arquimedianas, tomemos a cópula Ali-Mikhail-Haq, dada no Exemplo 6. Após algumas manipulações algébricas, $\forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, a igualdade $(2-15)$ pode ser escrita

$$1+(1-\theta)\frac{1-\mathbf{H}(x,y)}{\mathbf{H}(x,y)} = \left[1+(1-\theta)\frac{1-F_X(x)}{F_X(x)}\right]\left[1+(1-\theta)\frac{1-F_Y(y)}{F_Y(y)}\right],$$

ou seja, $h(\mathbf{H}(x,y)) = h(F_X(x))h(F_Y(y))$, onde $h(t) = 1+(1-\theta)\frac{(1-t)}{t}$, para $-1 \leq \theta < 1$.

Note que podemos escrever $h(t) = \frac{1-\theta(1-t)}{t}$, para $-1 \leq \theta < 1$.

Definindo a função φ tal que $\varphi(t) = \ln h(t)$, podemos escrever $\mathbf{H}$ como a soma das marginais F_X e F_Y :

$$\varphi\left(\mathbf{H}(x,y)\right) = \varphi\left(F_X(x)\right) + \varphi\left(F_Y(y)\right), \ \forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2,$$

ou, para a cópula Ali-Mikhail-Haq, C_θ^{AMH}, para $-1 \leq \theta < 1$, podemos escrever que

$$\varphi(C_\theta^{AMH}(u,v)) = \varphi(u) + \varphi(v), \ \forall (u,v) \in I^2, \quad (2\text{-}22)$$

onde φ satisfaz as hipóteses do Teorema .

Definição 11. (***Cópula Associativa***). *Uma cópula C é dita associativa se*

$$C\left(u, C(v,w)\right) = C\left(C(u,v), w\right), \ \forall u,v,w \in I.$$

Teorema 9. *Seja C uma cópula Arquimediana. Então C é simétrica e associativa.*

Dem.: Ver (21).

Exemplo 7. (***A cópula FGM não é Arquimediana***). *A cópula FGM não é associativa para $-1 \leq \theta \leq 1$, exceto $\theta = 0$, porque, por exemplo,*

$$C_\theta^{FGM}\left(\frac{1}{4}, C_\theta^{FGM}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\right) \neq C_\theta^{FGM}\left(C_\theta^{FGM}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\frac{1}{3}\right).$$

Para $\theta = 0$, temos que $C_\theta^{FGM} = \Pi$, que é uma cópula Arquimediana, como veremos adiante. ■

O próximo Teorema fornece um modo de identificar cópulas Arquimedianas.

Teorema 10. *Seja C uma cópula associativa tal que $C(u,u) < u$ para todo $u \in (0,1)$. Então C é Arquimediana.*

Dem.: Ver (16).

Exemplo 8. (***A cópula*** Π ***é Arquimediana***). *Para* $\varphi(t) = -\ln(t)$, *temos que* $\varphi(0) = \infty$ *e* $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = \exp(-t)$, $t \in [0, 1]$. *A cópula Arquimediana* C *gerada a partir de* $(2-21)$ *é dada por*

$$C(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u) + (-\ln v)\right]\right) = uv = \Pi(u, v),\ \forall (u, v) \in I^2.$$

■

Exemplo 9. (***A cópula W é Arquimediana***). *Para* $\varphi(t) = 1 - t$, *temos que* $\varphi^{[-1]}(t) = 1 - t$, $t \in [0, 1]$, *e* $\varphi^{[-1]}(t) = 0$ *para* $t > 1$, *ou seja,* $\varphi^{[-1]}(t) = \max(1 - t, 0)$. *Por* $(2-21)$, *segue que*

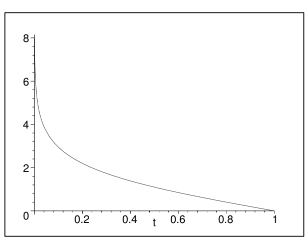
$$C(u, v) = \max(u + v + 1, 0) = W(u, v),\ \forall (u, v) \in I^2.$$

■

É trivial mostrar que as cópulas Π e W satisfazem as hipóteses do Teorema 10.

Exemplo 10. (***A cópula Ali-Mikhail-Haq é Arquimediana***). *É simples, mas trabalhoso, mostrar que* C_θ^{AMH} *é uma cópula associativa e satisfaz* $C_\theta^{AMH}(u, u) < u$, *para* $0 < u < 1$. *Logo, o Teorema* 10 *nos dá que a cópula Ali-Mikhail-Haq é Arquimediana. Para* $-1 \le \theta < 1$, *temos* $\varphi_\theta(t) = \ln \frac{1-\theta(1-t)}{t}$ *e* $\varphi_\theta^{[-1]}(t) = \frac{1-\theta}{e^t - \theta}$; *para* $\theta = 1$, $\varphi_{\theta=1}(t) = \frac{1}{t} - 1$ *e* $\varphi_{\theta=1}^{[-1]} = \frac{1}{t+1}$. ■

Na Figura 2.9 temos os gráficos da funções geradoras da cópula AMH para $\theta = -1$ e $\theta = 1$.



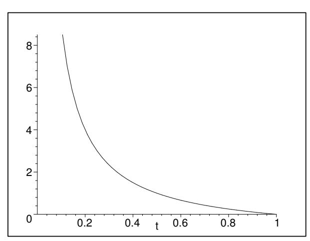


Figura 2.9: Gráfico das funções geradoras da cópula AMH para $\theta = -1$ e $\theta = 1$.

Seja C é uma cópula Arquimediana. Então para $0 < u < 1$ temos que $C(u, u) < u$. De fato, $C(u, u) = \varphi^{[-1]}(2\varphi(u))$; para $2\varphi(u) < \varphi(0)$ temos que $\varphi^{[-1]}(2\varphi(u)) < \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$; para $2\varphi(u) \ge \varphi(0)$ temos que $\varphi^{[-1]}(2\varphi(u)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(0)) = 0 < u$.

Desse resultado e do Teorema 9, temos que é verdadeira a recíproca do Teorema 10.

Exemplo 11. (***A cópula M não é Arquimediana***). *Como a cópula* M *é associativa e* $M(u,u) = u$, $\forall u \in I$, *segue do Teorema* 10 *que* M *não é Arquimediana.* ■

No Apêndice A são dadas as cópulas Gumbel, BB7 e Clayton.

O próximo resultado explica o motivo pelo qual Ling ((16)) denominou de Arquimedianas as cópulas construídas a partir de $(2-21)$.

O famoso Axioma de Arquimedes estabelece que para todo número real $a > 0$ existe um número inteiro positivo n tal que $\frac{1}{n} < a$. Vamos demonstrar que existe uma versão desse axioma para a cópula C e o intervalo I.

Precisamos da seguinte

Definição 12. *Dada uma cópula* C, *para todo* $u \in I$, *denotaremos por* u_C^n *a* $C-$*potência de* u *de ordem* n, *que é definida recursivamente por:*

(i) $u_C^1 = u$; *e*

(ii) $u_C^{n+1} = C(u, u_C^n)$, *para* $n > 1$.

O Teorema abaixo pode ser entendido como uma versão para a cópula C e para o intervalo I desse conhecido axioma.

Teorema 11. *Seja* C *uma cópula Arquimediana gerada por* φ. *Então para quaisquer* $u, v \in I$, *existe um inteiro positivo* n *tal que* $u_C^n < v$.

Dem.: Sejam $u, v \in (0,1)$. Por indução, temos que $u_C^n = \varphi^{[-1]}\left(n\varphi(u)\right)$. Como $\varphi(u)$ e $\varphi(v)$ são números reais e positivos, segue do Axioma de Arquimedes que existe uma inteiro positivo N tal que $n\varphi(u) > \varphi(v)$. Como $\varphi(v) < \varphi(0)$, segue que $v = \varphi^{[-1]}(\varphi(v)) > \varphi^{[-1]}\left(n\varphi(u)\right) = u_C^n$. ■