

Aldo Ferreira da Silva

**Modelagem da distribuição conjunta dos
log-retornos de taxas de juros pré-fixadas a
partir de medidas de dependência de cauda.**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador : Prof. Carlos Tomei

Co-Orientadora: Profa. Beatriz Vaz de Melo Mendes

Rio de Janeiro
agosto de 2008



Aldo Ferreira da Silva

**Modelagem da distribuição conjunta dos
log-retornos de taxas de juros pré-fixadas a
partir de medidas de dependência de cauda.**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Tomei

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Beatriz Vaz de Melo Mendes

Co-Orientadora

Instituto de Matemática - UFRJ

Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes

Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Prof. Octavio Manuel Bessada Lion

Banco Central do Brasil

Prof. Fernanda Chaves Pereira

IAPUC - PUC-Rio

Prof. José Valentim Machado Vicente

Banco Central do Brasil

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de agosto de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Aldo Ferreira da Silva

Graduou-se em Bacharel em Ciências Navais, Habilitação em Sistemas de Armas, na Escola Naval (Rio de Janeiro, Brasil) e em Licenciatura em Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (Rio de Janeiro, Brasil). É mestre em Matemática Pura pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (Rio de Janeiro, Brasil). Foi Oficial do Corpo da Armada da Marinha do Brasil e, atualmente, trabalha como Analista do Banco Central do Brasil.

Ficha Catalográfica

Silva, Aldo Ferreira da

Modelagem da distribuição conjunta dos log-retornos de taxas de juros pré-fixadas a partir de medidas de dependência de cauda. / Aldo Ferreira da Silva; orientador: Carlos Tomei; co-orientadora: Beatriz Vaz de Melo Mendes. - 2008.
97f. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Teses. 2. Cópulas. 3. Cópulas Arquimedianas. 4. Dependência de cauda total. 5. Dependência homogênea de cauda. 6. Dependência heterogênea de cauda. 7. Distribuição normal assimétrica. 8. Taxas de juros. I. Tomei, Carlos. II. Mendes, Beatriz Vaz de Melo. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao Professor Carlos Tomei pela orientação, dedicação, compreensão e por ter, no ano de 2001, indicado o “caminho” para o ingresso no Mestrado.

À Professora Beatriz Vaz de Melo Mendes, minha Co-Orientadora, por todo o conhecimento transmitido, dedicação e disponibilidade para os diversos atendimentos durante a elaboração desta tese. Vale ressaltar que a alegria e a simpatia da Professora Beatriz cativaram toda a minha família.

A todos os Membros da Banca pelos valorosos comentários e sugestões.

À minha esposa Ana Lucia, cujo amor e dedicação tornaram possível a realização dos meus cursos de mestrado e de doutorado. Aos meus filhos Ana Carolina e Aldo, presentes de Deus.

Aos meus pais, Alberto e Maria de Lourdes, por todo o apoio e incentivo durante toda a minha vida. Aos meus irmãos, irmãs, cunhados, cunhadas, sobrinhos e sobrinhas por todo o incentivo e pelas agradáveis e revigorantes horas de alegria durante nossos encontros em aniversários, datas festivas e finais de semana.

À Dr^a Wanda dos Santos Soares e ao Coronel Ney Coelho Soares (in memoriam) que, juntos com meus pais, exemplificam através de suas ações e opiniões todos os valores que devem ser seguidos e transmitidos aos meus filhos.

À Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) pela bolsa de isenção concedida.

Aos Professores do Departamento de Matemática e do IAPUC pelo valioso apoio.

Às Secretárias, Creusa e Kátia, e aos Auxiliares Administrativos, Orlando e Otávio, pela amizade e competência.

A todo o corpo discente do Departamento de Matemática da PUC-Rio pelo incentivo e companherismo nesses longos anos. Aos amigos Claudio Henrique da S. Barbedo e toda a sua família, Edílio R. Quintino e toda a sua família, Lourdes Bernardes, Maria Elisabeth Reimão Nogueira, Mauricio K. G. Meinicke, Regina Fukuda, Bernardo K. Pagnoncelli e toda a sua família, Carla Dias, Renato Alencar A. da Costa Ribeiro, Magda Ribeiro Mendes de Almeida e toda a sua família, Júlio César Cavalcanti e Ila Maria L. Fernandes pela amizade de longos anos.

A André L. Leite e Romeu B. P. Gomes, analistas do Banco Central do Brasil, que, gentilmente, cederam parte dos dados analisados nesse trabalho.

Ao meu Orientador Técnico no Banco Central do Brasil, Doutor Octávio Manoel Bessada Lion, pela competência, amizade, alegria e simpatia.

À Nossa Senhora Aparecida, padroeira do Brasil.

Resumo

Silva, Aldo Ferreira da; Tomei, Carlos; Mendes, Beatriz Vaz de Melo. **Modelagem da distribuição conjunta dos log-retornos de taxas de juros pré-fixadas a partir de medidas de dependência de cauda.** Rio de Janeiro, 2008. 97p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A representação e interpretação claras da estrutura de dependência presente em vetores aleatórios, em particular em vetores bivariados, podem ser feitas com o uso do conceito de cópulas. Na análise bivariada, os coeficientes de dependência homogênea e heterogênea de cauda têm por objetivo estudar uma medida de dependência quando as variáveis assumem valores extremos. Obtemos as expressões dos coeficientes de dependência heterogênea de cauda a partir da função de distribuição acumulada condicional e apresentamos a demonstração de que os coeficientes de dependência homogênea de cauda de uma distribuição normal assimétrica são iguais a zero. Com o uso do conceito de cópulas e de dependência de cauda total, estudamos a estrutura de dependência entre as seguintes variáveis: (i) log-retornos das taxas, interpoladas, para a estrutura a termo pré-fixada de 1 ano e de 2 anos; (ii) log-retorno das taxas para a estrutura a termo pré-fixada de 1 (um) ano e log-retorno do índice do Ibovespa; e (iii) log-retorno das taxas para a estrutura a termo pré-fixada de 1 (um) ano e log-retorno da expectativa da taxa PTAX, 6 meses a frente.

Palavras-chave

Cópulas. Cópulas Arquimedianas. Dependência de cauda total. Dependência homogênea de cauda. Dependência heterogênea de cauda. Distribuição normal assimétrica. Taxas de juros.

Abstract

Silva, Aldo Ferreira da; Tomei, Carlos; Mendes, Beatriz Vaz de Melo.
Joint Modeling of fixed interest rates log-returns based on tail dependence measures. Rio de Janeiro, 2008. 97p. PhD Thesis — Departament of Mathematics, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Using the concepts of copula we can represent and interpret the dependence structure presented in random vectors with clarity, particularly in bivariate vectors. In bivariate analysis, the role of both heterogeneous tail-dependence coefficient and homogenous tail-dependence coefficient are to study a measure of dependence when variables reach extreme values. We find expressions for the heterogeneous tail-dependence coefficients from the conditional cumulative distribution function and prove that the homogenous tail-dependence coefficients of a skewed normal distribution are equal to zero. Using the concepts of copula and the total tail dependence, we study the dependence structure between the following variables: (i) log-return of interpolated rates for the 1-year and 2-year fixed term structure; (ii) log-return of interpolated rate for the 1-year and log-return for the Bovespa index; e (iii) log-return of interpolated rate for the 1-year fixed term structure and log-return of expected PTAX, 6 months ahead.

Keywords

Copulas. Archimedean Copulas. Total tail dependence. Homogeneous tail dependence. Heterogeneous tail dependence. Skew-normal distributions. Interest rates.

Sumário

1	Introdução	11
2	Cópuas	15
2.1	Definições e resultados básicos	15
2.2	Cópuas Arquimedianas	27
3	Dependência homogênea e heterogênea de cauda	31
3.1	Dependência de cauda	31
3.2	Cálculo dos coeficientes de dependência de cauda das cópuas Arquimedianas	37
3.3	Cálculo dos coeficientes de dependência de cauda da cópula Gaussiana	38
3.4	Cálculo dos coeficientes de dependência de cauda da cópula t de Student	41
4	Distribuição normal assimétrica	45
4.1	Caso univariado	46
4.2	Distribuição normal assimétrica multivariada	53
4.3	Cálculo dos coeficientes de dependência homogênea de cauda da distribuição normal assimétrica	57
5	Aplicações	62
5.1	Descrição do modelo e estimação da cópula ajustada	63
5.2	Modelagem da distribuição conjunta dos log-retornos das taxas para a estrutura a termo pré-fixada de 1 (um) ano e de 2 (dois) anos	66
5.3	Modelagem da distribuição conjunta do log-retorno das taxas para a estrutura a termo pré-fixada de 1 (um) ano e do log-retorno do índice do Ibovespa	79
5.4	Modelagem da distribuição conjunta do log-retorno das taxas para a estrutura a termo pré-fixada de 1 (um) ano e do log-retorno da taxa PTAX (Gerin), 6 meses a frente	85
6	Conclusões e trabalhos futuros	90
	Referências Bibliográficas	92
A	As cópuas Gumbel, BB7 e Clayton	95

Lista de figuras

2.1	Gráfico e curvas de nível da cópula M .	16
2.2	Gráfico e curvas de nível da cópula W .	17
2.3	Gráfico e curvas de nível da cópula Produto	18
2.4	Fig: Gráfico e curvas de nível da cópula FGM com $\theta = 0, 5$.	21
2.5	Plotagem de 500 simulações para a cópula FGM para $\theta = -1$ e $\theta = 1$.	21
2.6	Curvas de nível da distribuição (2 – 11) com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$, $\theta = -1$ e $\rho = -0, 318$.	23
2.7	Curvas de nível da distribuição normal bivariada com marginais $\mathcal{N}(0, 1)$ e $\rho = -0, 318$.	23
2.8	Gráfico e curvas de nível da cópula AMH com $\theta = -1$.	24
2.9	Gráfico das funções geradoras da cópula AMH para $\theta = -1$ e $\theta = 1$.	29
3.1	Plotagem de 2000 simulações da cópula e da distribuição Gaussiana para $\rho = 0$ e $\rho = 0, 8$.	40
3.2	Dispersão de dados simulados da cópula t de Student com $\nu = 3$.	44
4.1	Gráfico das f.d.p.'s das distribuições normal-padrão, $SN(\lambda = \pm 1)$, $SN(\lambda = \pm 2)$, $SN(\lambda = \pm 3)$ e $SN(\lambda = \pm 4)$.	47
4.2	Fdp's das distribuições $\mathcal{N}(0, 1)$, $SN(\lambda = -5)$ [coeficiente de assimetria= $-0, 779$ e curtose= $0, 705$] e $SN(\lambda = 5)$ [coeficiente de assimetria= $0, 779$ e curtose= $0, 705$].	50
4.3	Fdp's das distribuições $\mathcal{N}(0, 4)$ e $SN(2, 0, \lambda = \pm 5)$.	52
4.4	Gráficos e curvas de nível de distribuições normais assimétricas bivariadas.	61
5.1	Taxas de 1 ano, de 02/01/2003 a 17/04/2008.	66
5.2	Log-retornos das taxas de 1 ano, de 03/01/2003 a 17/04/2008.	67
5.3	Taxas de 2 anos, de 02/01/2003 a 17/04/2008.	67
5.4	Log-retornos das taxas de 2 anos, de 03/01/2003 a 17/04/2008.	68
5.5	Gráficos de dispersão dos dados simulados a partir de uma distribuição normal bivariada e dos dados dos log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos.	69
5.6	QQ plot (distribuição normal) para os log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos	70
5.7	Gráfico das médias dos excessos das caudas inferior e superior do log-retorno das taxas de 1 ano e de 2 anos.	71
5.8	QQ plots dos excessos em relação aos limiares superior e inferior, especificados, versus os quantis do modelo ajustado para o log-retorno da taxa de 1 ano.	73
5.9	QQ plots dos excessos em relação aos limiares superior e inferior, especificados, versus os quantis do modelo ajustado para o log-retorno da taxa de 2 anos.	73
5.10	Gráfico dos dados dos log-retornos simulados versus os log-retornos reais das taxas de 1 e de 2 anos.	74

5.11	Gráficos de dispersão dos log-retornos simulados (após os ajustes das f.d.a.'s marginais) e reais das taxas de 1 e de 2 anos .	75
5.12	Gráfico da pseudo amostra obtida (ou conjunto suporte da cópula) para os log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos.	76
5.13	Gráfico das curvas de nível da f.d.p. obtida a partir da cópula empírica para os log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos.	77
5.14	Gráficos de dispersão dos dados simulados a partir da cópula t-Student ajustada e dos dados dos log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos.	78
5.15	Log-retorno do índice Ibovespa, de 03/01/2003 a 04/04/2008.	79
5.16	Gráficos de dispersão dos dados simulados a partir de uma distribuição normal bivariada e dos dados dos log-retornos da taxa de 1 ano e do índice Ibovespa.	80
5.17	Gráfico dos dados dos log-retornos simulados versus os log-retornos reais para os log-retornos da taxa de 1 e do índice Ibovespa.	81
5.18	Gráficos de dispersão dos log-retornos da taxa de 1 ano e do índice do Ibovespa simulados e reais.	82
5.19	Gráfico da pseudo amostra obtida (ou conjunto suporte da cópula) para os log-retornos da taxa de 1 e do índice Ibovespa.	83
5.20	Gráficos de dispersão dos dados simulados a partir das cópulas t-Student e gaussianas ajustadas e dos dados dos log-retornos da taxa de 1 ano e do índice do Ibovespa.	84
5.21	Log-retorno da taxa PTAX, de 03/01/2003 a 04/04/2008.	87
5.22	Gráficos de dispersão dos dados simulados a partir de uma distribuição normal bivariada e dos dados dos log-retornos da taxa de 1 e da taxa PTAX.	88
5.23	Gráficos de dispersão dos log-retornos da taxa de 1 ano e da taxa PTAX simulados e reais.	88
A.1	Curvas de nível da cópula Gumbel para $\theta = 2$ e $\theta = 10$.	96
A.2	Curvas de nível da cópula Clayton para $\theta = 1$ e $\theta = 15$.	96

Lista de tabelas

5.1	Características dos modelos semi-paramétricos GPD ajustados para os log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos.	72
5.2	Dados das cópulas ajustadas e empírica para os log-retornos das taxas de 1 e de 2 anos.	77
5.3	Características dos modelos semi-paramétricos GPD ajustados para os log-retornos da taxa de 1 e do índice Ibovespa.	81
5.4	Dados das cópulas ajustadas e empírica para os log-retornos da taxa de 1 ano e do índice do Ibovespa.	83
5.5	Características dos modelos semi-paramétricos GPD ajustados para os log-retornos da taxa de 1 e da taxa PTAX.	89