

## 4

### **Modelo Teórico Para Mensuração de Risco de Mercado em Corporações: *Cashflow-At-Risk***

Neste capítulo será apresentada toda a sistemática de um modelo teórico para o cálculo do fluxo de caixa em risco em instituições não financeiras. Essa medida pode ser definida como a probabilidade da empresa não dispor de recursos para honrar seus compromissos em determinadas datas futuras ou, estatisticamente, como o percentil associado à estatística de ordem zero da distribuição do fluxo de caixa da empresa, calculado para diversos tipos de cenários.

Segundo Perobelli (2004) existem sete etapas que devem ser percorridas na elaboração de um modelo para risco de fluxo de caixa, que são:

i. definição das variáveis de estudo, que podem ser divididas em variáveis dependentes (contas componentes do fluxo de caixa, DRE e balanço patrimonial) e variáveis independentes (fatores de risco macroeconômicos – RM – e próprios do negócio – RPN);

ii. definição da periodicidade em que tais variáveis serão observadas e o horizonte de previsão (número de passos à frente);

iii. identificação dos fatores de risco relevantes (entre macroeconômicos e próprios da empresa) via estimação da relação estatística existente entre as variáveis dependentes e independentes do modelo;

iv. sugestão de um tratamento para o gerenciamento dos fatores de risco próprios e estimação, via modelagem econométrica, do comportamento médio esperado dos fatores de risco macroeconômicos, bem como de sua matriz de variância-covariância;

v. simulação de cenários para os fatores de risco macroeconômicos e próprios no horizonte de previsão, tomando o cuidado de manter a estrutura de variância-covariância observada entre as séries históricas de fatores;

vi. inserção dos valores previstos para os fatores de risco em cada cenário na equação que relaciona o comportamento de tais fatores ao comportamento das variáveis dependentes (contas componentes do fluxo de caixa);

vii. montagem da distribuição simulada das variáveis dependentes (contas componentes do fluxo de caixa) e determinação da estatística de interesse da distribuição do fluxo de caixa.

#### 4.1

#### **As variáveis do modelo, frequência de observação dos dados e horizonte de previsão**

Para a formulação do modelo, é preciso definir a variável dependente, assim como selecionar candidatas a variáveis independentes – fatores de risco macroeconômico e próprio do negócio, capazes de alterar o comportamento da variável explicativa ao longo do tempo.

Considerando-se que o modelo baseia-se na mensuração do fluxo de caixa em risco, a variável de interesse proposta neste trabalho será o fluxo de caixa livre da empresa (FCF), observado em certas datas de pagamento futuras, ou *gaps* do fluxo. O FCF contábil é formalmente apresentado no Quadro 04 a seguir:

## Quadro 04: Fluxo de Caixa Livre

<p>Lucro Líquido do Exercício</p> <p>(+/-) Fatores que não afetam caixa (despesas de depreciação, resultado de equivalência patrimonial, outras receitas e despesas não caixa)</p> <p>(+) Variação em Duplicatas a Receber</p> <p>(+)Variação em Estoques</p> <p>(+)Variação em Fornecedores</p> <p>(+)Variação em outros itens circulantes</p> <p>(=) Fluxo de caixa gerado pelas operações</p> <p>(-) Compra de ativo permanente</p> <p>(+) Venda de ativo permanente</p> <p>(=) Fluxo de caixa após as atividades de investimento</p> <p>(+) Variações no nível de endividamento e/ou no capital social da empresa</p> <p>(-) Pagamento de dividendos e/ou juros sobre o capital próprio</p> <p>(=) Fluxo de caixa livre após as atividades de financiamento</p>
---

FONTE: Manual de Contabilidade das S/A (2000)

No Quadro 04, caso a conta da última linha (FCF) obtenha resultado positivo, significa que a empresa conseguiu gerar caixa naquele período, ou seja, ela financia suas necessidades de capital de giro, realiza os investimentos programados no seu *budget plan* ou vende ativos que não lhe são mais de interesse, amortiza dívidas antigas, remunera acionistas via distribuição de dividendos e/ou juros sobre o capital próprio, obtém novas dívidas e/ou aportes de capital e ainda sobram recursos em caixa, que é o fluxo de caixa livre (FCF) da empresa.

As candidatas a variáveis independentes são fatores capazes de provocar oscilações no fluxo de caixa livre das empresas. Tais fatores de risco podem ser macroeconômicos (taxas de juros, câmbio, inflação, renda, produção nacional) – capazes de afetar, em maior ou menor grau, todas as empresas da economia – e

fatores de risco próprios do negócio (nível de endividamento, mercado atendido, investimentos programados, preço do bem ou serviço vendido, dentre outros).

A consideração no modelo de características próprias da empresa como candidatas a fatores de risco tem como objetivo dar-lhe flexibilidade. Enquanto as oscilações nos fatores de risco macroeconômicos não podem ser determinadas *a priori* pela empresa, a identificação prévia dos riscos gerenciáveis permite à empresa verificar, por exemplo, quais seriam os impactos em seu fluxo de caixa em determinada data se, além de choques esperados nos fatores de risco macroeconômicos, ela também decidisse alterar sua estrutura operacional e financeira. (PEROBELLI, 2004)

A Equação 1 traz a especificação de cada componente do fluxo de caixa em função dos fatores de risco:

$$Y_{st} = b_{s_0} + \sum_{j=1}^k b_{sj} RPN_{sjt} + \sum_{j=k+1}^r b_{sj} RM_{sjt} + e_{st} \quad \text{Equação 1}$$

para,

$s = 1, \dots, m$  (componentes do fluxo de caixa)

$j = 1, \dots, r$  (fatores de risco próprio e macroeconômicos relevantes)

$t = 1, \dots, T$  (número de passos à frente)

Com relação à periodicidade das variáveis dependentes e independentes, salienta-se que a divulgação dos dados contábeis das empresas listadas em Bolsa de Valores é feita em base trimestral. Daí a escolha de se trabalhar nesta frequência, inclusive no horizonte de previsão, lembrando que a sua variância tende a aumentar com o tempo. É claro que dependendo de onde este trabalho for executado, outras periodicidades podem ser usadas, a depender somente da disponibilidade de dados.

*Dessa forma, tal como na estimação do VaR, em que se assume que pagamentos e recebimentos não ocorram todos os dias, mas apenas em determinadas datas, neste modelo os fluxos de caixa da empresa apenas são observados a cada trimestre, vértices que concentram (hipoteticamente) todos os pagamentos e recebimentos futuros. (PEROBELLI, 2004, p.74)*

## 4.2

### Identificação dos fatores de risco próprios e macroeconômicos relevantes para o modelo

Apesar dos modelos de fluxo de caixa em risco apresentados no capítulo 2 enfatizarem a necessidade de se identificar as exposições aos fatores de riscos mais relevantes da empresa, oscilações nas receitas apuradas ou nos custos incorridos não podem ser expressas de forma determinística em termos desses fatores. No caso do fluxo de caixa em risco, o mais próximo possível da replicação determinística utilizada pelo VaR é via estimação de um modelo estatístico que relacione oscilações nas contas do fluxo à oscilações nos fatores de risco.

*Enquanto a metodologia do VaR exige o mapeamento do portfólio e a identificação de um número reduzido de fatores de riscos primitivos que repliquem, de forma linear e determinística, as oscilações no valor de mercado dos ativos originais, identidades semelhantes não são facilmente obtidas para o cálculo do fluxo de caixa em risco. (PEROBELLI, 2004, p.74)*

Feito isso, o próximo passo é estimar equações que relacionem as oscilações nas componentes do fluxo de caixa livre da empresa (variável dependente) a oscilações nos fatores de risco (variáveis independentes).

Para a estimação dessas equações existem duas alternativas:

- i. estimação de coeficientes setoriais, utilizando a metodologia de dados em painel;
- ii. estimação de coeficientes individuais, utilizando a metodologia de séries temporais para uma empresa.

Sobre o primeiro método, considerando que, no Brasil, as empresas divulgam apenas informações contábeis necessárias ao cálculo do fluxo de caixa, em base trimestral, tal procedimento visa aumentar o volume de dados na estimação, principalmente para o analista externo à empresa, além de também permitir a consideração de características próprias da empresa, que a diferenciem das demais, na estimação de seu fluxo de caixa em risco. Por outro lado, a estimação dos fatores de risco via dados em painel possui a desvantagem de gerar coeficientes comuns a todas as empresas pertencentes à amostra. Assim, caso as

empresas sejam influenciadas por fatores de risco díspares, a estimação via painel ficará comprometida.

Já o segundo método (que será usado no presente trabalho) propõe a determinação dos fatores de risco de uma única empresa, com estimação em série de tempo via Regressão Dinâmica. Essa técnica combina a estrutura de regressão (variáveis dependentes e independentes) com dependência da série temporal (daí o significado da palavra dinâmica).

Quando existe uma estrutura de dependência entre a variável de interesse para com as causais e também quando a estrutura de correlação da série dependente mostrar que não se poderá supor independência dos erros (como na regressão clássica), a regressão dinâmica será um dos métodos ideais para se modelar esse tipo de problema.

Uma vantagem dessa modelagem, é que ela já incorpora diretamente a sazonalidade ao modelo via *dummies*, defasagens na variável dependente e/ou independente, além também de poder inserir *lags* defasados nos erros do modelo. A sua estrutura básica é:

$$\varphi(B)Y_t = \beta Z_t + \varepsilon_t \quad \text{Equação 2}$$

onde:

$\varepsilon_t$  são erros iid  $N(0, \sigma^2)$

$Z_t$  é um vetor de variáveis exógenas no instante  $t$ ;

$\beta$  é o vetor de coeficientes das variáveis exógenas;

$\varphi(B)$  é um polinômio AR(p). Se  $\varphi(B) = 1$  o modelo se reduz a uma regressão convencional.

$t$  é o tamanho da série;

O modelo de Cochran-Orcutt é a generalização da Regressão Dinâmica apresentada anteriormente. Nele admite-se uma estrutura de dependência nos resíduos, além de manter a idéia de defasagem nas variáveis dependentes e independentes. Com isso, a equação 2 fica da seguinte maneira:

$$\varphi(B)Y_t = \beta Z_t + \pi_t \quad \text{Equação 3}$$

$$R(B)\pi_t = \varepsilon_t \quad \text{Equação 4}$$

onde:

$R(B)$  é um polinômio AR de grau  $r$  e os  $\varepsilon_t$  são erros iid  $N(0, \sigma^2)$ ;

Os testes mais comuns e que serão aplicados para ver o desempenho do modelo de regressão dinâmica são: análise da função de autocorrelação (FAC) dos resíduos, estatística de Durbin-Watson e Ljung-Box, além dos testes de dinâmica entre as variáveis dependentes, independentes e termos de erro. Isso tudo é o que diferencia Regressão Dinâmica dos demais métodos como regressão múltipla e modelos univariados de previsão. Cabe ressaltar ainda que o critério BIC (*Bayesian Information Criteria*) será usado para a escolha do melhor modelo de estimação da relação dos fatores de risco macroeconômicos e próprios relevante para a construção do CFaR.

### 4.3

#### **Tratamento dos fatores de risco próprio, macroeconômicos e estimação do comportamento médio esperado.**

Depois de realizar a estimação via Regressão Dinâmica e identificar os fatores de risco relevantes, o próximo passo na modelagem é estimar o comportamento médio esperado desses fatores ao longo do tempo.

Os fatores de risco próprios como nível de endividamento, contratação ou amortização de dívidas em moeda nacional ou estrangeira, novos investimentos, venda de ativos, novos aportes de capital e transferência de recursos para os acionistas da empresa, dentre outros não têm seu comportamento futuro projetado neste modelo. Isto se deve ao fato de que somente estando interno à empresa, para conseguir obter estas informações com precisão. Tentar projetar essas contas, também não adiantaria justamente pelo fato de não se saber como e nem quando alguma alteração pode ocorrer, mas tentar arbitrar valores para construir cenários é perfeitamente plausível, desde que a explicação seja coerente.

*Na modelagem, os valores assumidos pelos fatores de risco próprios são desconsiderados. Nada impede, entretanto, que, no caso de uma pesquisa interna, realizada com informações privadas, tais valores esperados sejam fornecidos pela empresa, de acordo com sua estratégia de atuação.* (PEROBELLI, 2004, p.80)

Portanto, o foco neste passo está na estimação dos valores futuros dos fatores de risco macroeconômicos e suas relações com as contas do fluxo de caixa livre. Neste trabalho, a estimação poderá ser feita via modelos clássicos de Vetores Auto-regressivos com método de correção de erros caso seja necessário. Já o método de amortecimento exponencial será usado para tentar prever o comportamento médio de algumas contas que representem o risco próprio da empresa que serão explicitadas e discutidas no capítulo 4.

O modelo estatístico para as variáveis macroeconômicas a ser escolhido será aquele que minimizar a soma dos quadrados dos resíduos, lembrando também que ele deve ser parcimonioso com relação ao número de parâmetros a serem estimados. Para isso duas estatísticas serão levadas em consideração: o AIC (*Akaike Information Criteria*) e/ou BIC (*Bayesian Information Criteria*).

A econometria de séries temporais é uma técnica que envolve verificar se as séries são estacionárias ou não. Se forem não-estacionárias, ou seja, se apresentarem alguma tendência estocástica e, além disso, forem co-integradas, então os testes “t” e “F” ficam comprometidos. Ou o que é mais comum de se dizer, tem-se regressão espúria (ENGLE, 1990). Um conceito central em econometria de séries temporais é o de processo estocástico. Assume-se que a maioria das séries econômicas sejam processos estocásticos. Diz-se que um processo estocástico é fracamente estacionário se sua média, variância e autocovariâncias são constantes ao longo do tempo (GUJARATI, 2000).

Existem duas maneiras para se checar se as séries são estacionárias ou não. A primeira delas (e conseqüentemente a mais informal, porém não menos usual) é o teste com base no correlograma, que nada mais é do que um gráfico da autocorrelação em diferentes defasagens. Então, se a série temporal apresentar caráter estacionário, o correlograma diminuí rapidamente; já se a série for de aspecto não-estacionário, o correlograma decai gradualmente na forma exponencial ou senóide amortecida.

A segunda maneira (que será a mais utilizada neste trabalho) para checar a existência de processo de tendência estocástica ou de diferença estocástica em uma série temporal é o teste de raiz unitária. Este teste se baseia no seguinte modelo autorregressivo para um processo estocástico:

$$Y_t = \lambda Y_{t-1} + \mu_t \quad \text{Equação 5}$$

onde:

$Y_t$  = é a variável no tempo  $t$ ;

$Y_{t-1}$  = é a variável defasada a menos 1;

$\mu_t$  = é o termo de erro aleatório que segue as hipóteses básicas de média zero, variância constante e não-autocorrelacionado;

$\lambda$  = é o coeficiente numérico de  $Y_{t-1}$ .

Se  $\lambda$  for igual a 1 diz-se que a variável aleatória  $Y_t$  possui uma raiz unitária, ou seja, ela segue um processo estocástico conhecido como “passeio aleatório” que tem a importante característica de ser não-estacionário.

A equação 5 pode ser reescrita em sua primeira diferença, como se vê abaixo:

$$\Delta Y_t = (\lambda - 1)Y_{t-1} + \mu_t \quad \text{Equação 6}$$

ou

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \mu_t \quad \text{Equação 7}$$

onde:

$\delta = (\lambda - 1)$  e  $\Delta$  são os operadores de primeira diferença;

$\Delta Y_t$  = é a subtração de  $Y_t$  por  $Y_{t-1}$

Utilizando as equações e condições expostas acima, pode-se dizer que os modelos de equação 5 e 6 são iguais, se  $\lambda = 1$  ou  $\delta = 0$ .

$$\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = \mu_t$$

Igualdade 1

A igualdade 1 indica que a primeira diferença de uma série temporal com passeio aleatório é uma série estacionária devido à hipótese do termo de erro  $\mu_t$  ser puramente aleatório. Então, se uma série temporal for diferenciada “ $n$ ” vezes e a mesma se tornar estacionária, pode-se dizer que a série original é integrada de ordem “ $n$ ”, indicada por  $I(n)$ . (GUJARATI, 2000).

Os testes de raiz unitária mais utilizados são: Dickey-Fuller (DF) e Dickey-Fuller Aumentado (ADF). Caso o termo de erro  $\mu_t$  seja autocorrelacionado, o ADF é recomendado.

A formulação das hipóteses  $H_0$  e  $H_1$  de um teste de raiz unitária qualquer são:

$H_0$ : possui raiz unitária (série é não estacionária)

$H_1$ : caso contrário

Já a escolha de qual estrutura ADF usar para testar estacionariedade de uma série, segue a seguinte metodologia:

- se a série possuir tendência estacionária com média nula a estrutura adequada é ADF-I ;
- se a série possuir tendência estacionária com média não nula, então a forma mais adequada será a ADF-II;
- se a série aparentar ser não-estacionária, mas sem tendência sustentada, positiva ou negativa, então a estrutura adequada é ADF-II;
- se a série tiver um comportamento não-estacionário, com tendência sustentada, positiva ou negativa, então a estrutura adequada é ADF-II ou ADF-III;
- se a série possuir tendência então a estrutura adequada é ADF-III.

Mesmo que duas ou mais séries sejam não-estacionárias individualmente, uma combinação linear entre elas pode ser estacionária. Quando isso ocorre,

falamos que as séries são co-integradas. Para saber se duas ou mais séries são co-integradas ou não, é necessário verificar se elas são individualmente integradas, utilizando para isso o teste de raiz unitária. A co-integração implica em dois problemas que são: regressão espúria e perda das propriedades estatísticas do teste “t”. Uma das maneiras de verificar se a regressão sofre de co-integração é observar se o  $R^2$  é maior do que a estatística “d” de Durbin-Watson. (GUJARATI, 2000). A presença de co-integração indica que há uma relação no longo prazo de equilíbrio entre duas ou mais séries temporais.

Caso as séries utilizadas para construir o modelo macroeconômico serem co-integradas, o método a ser usado para estimar o valor de seus parâmetros será o Mecanismo de Correção de Erros (MCE). Este método consiste em testar se existe uma raiz unitária no resíduo  $\mu_t$  da regressão de co-integração. Sua análise é feita da seguinte maneira: se as séries não são co-integradas, então tem de haver uma raiz unitária nesses resíduos, isso é portanto a hipótese nula de não co-integração. Se as séries são co-integradas, então os resíduos serão estacionários. (ENGLE, 1990). O Mecanismo de Correção de Erros vai usar o termo de erro para ligar o comportamento a curto prazo de uma série, com seu valor a longo prazo (GUJARATI, 2000).

Desde que haja a confirmação de que os resíduos da regressão de co-integração são do tipo  $I(0)$  ou estacionário, o método de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) bem como suas estatísticas  $t$  e  $F$  podem ser aceitas com segurança para se fazer previsão.

Também será feito, para os fatores de risco macroeconômicos, o teste de causalidade de Granger que vai dizer quais variáveis causam *Granger* a outra através de seus valores passados. Isto implica em fazer um teste para cada variável separadamente, considerando uma variável dependente a cada instante em relação às outras. Assim os coeficientes de cada uma delas são considerados nulos (*Exclude*) e com isso, é verificado se esta nulidade é ou não significativa. Caso seja, a variável que apresentar seus coeficientes nulos não *Causa Granger* a(s) outra(s), isto é, seu passado não influencia na estimação daquela que foi retirada e analisada como uma variável dependente. A hipótese nula é que a variável não causa Granger a outra, ou seja, todos os coeficientes são nulos *a priori*.

#### 4.4

#### Simulação de cenários para os fatores de risco macroeconômicos

Escolhido e estimado o modelo para previsão dos valores médios dos fatores de risco macroeconômicos, a simulação da distribuição de probabilidade para cada fator será realizada por Quase-Monte Carlo, a partir do sorteio de  $n$  choques aleatórios, a serem filtrados via fatoração de Cholesky.

Depois de filtrados, os valores simulados para os fatores de risco são inseridos na equação das variáveis dependentes (estimadas via Regressão Dinâmica) e dessas na equação do fluxo de caixa livre (descrito no Quadro 04), contemporaneamente, dando origem às distribuições de cada conta que compõe o fluxo.

Detalhadamente, tem-se que, conhecendo as realizações passadas dos fatores de risco constantes no vetor  $(X_{j,t})$  de fatores de risco, é possível obter a distribuição futura desses fatores sorteando-se  $N$  vetores  $u$  de choques aleatórios independentes, cada um deles de tamanho  $(jt \times 1)$ , a partir da distribuição empírica de cada fator. Após cada sorteio, o vetor  $u$  é “filtrado” pela matriz de covariância dos fatores em nível ou de seus erros  $(\Sigma_X)$ , a partir da decomposição desta matriz, e somado à matriz de previsões dos fatores de risco  $(\hat{X}_{j,t})$ .

Segundo Hamilton (1994), toda matriz real positiva definida  $(\Sigma_X)$  pode ser decomposta em uma matriz triangular inferior  $Z$  com 1's na diagonal principal e uma matriz diagonal  $D$  com números positivos na diagonal principal de tal forma que:

$$\Sigma_X = ZDZ^T$$

Usando a matriz  $Z$ , é possível construir um vetor  $u$   $(jt \times 1)$  tal que:

$$u_{jt} \equiv Z^{-1} \varepsilon_{jt} \quad \text{Equação 8}$$

Com isso, os elementos de  $u$  serão totalmente não correlacionados entre si:

$$E(u_{jt} u_{jt}^T) = [Z^{-1}] E(\varepsilon_{jt} \varepsilon_{jt}^T) [Z^{-1}]^T$$

$$E(u_{jt} u_{jt}^T) = [Z^{-1}] \Sigma_X [Z^{-1}]^T$$

$$E(u_{jt} u_{jt}^T) = D$$

Sendo  $D$  uma matriz diagonal, tem-se que os elementos  $u_{jt}$  são mutuamente independentes, representando o elemento  $(jt, jt)$  da matriz  $D$  a variância do termo  $u_{jt, jt}$ .

Multiplicando-se ambos os lados da Equação 8 por  $Z$ , tem-se:

$$Zu_{jt} = \varepsilon_{jt}$$

Ou seja, a partir da decomposição da matriz  $(\Sigma_x)$ , é possível transformar um vetor de choques independentes ( $u$ ) em um vetor de choques correlacionados ( $\varepsilon$ ). A média dos choques gerados ainda é zero, uma vez que os vetores ( $u$ ) foram sorteados de uma distribuição que possui média zero. Para resolver o problema, basta somar os valores médios das variáveis (previsões) em cada data de interesse  $t$ :

$$\begin{bmatrix} X_{1,1} \\ \dots \\ X_{1,T} \\ \dots \\ X_{J,1} \\ \dots \\ X_{J,T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{1,1} \\ \dots \\ \hat{X}_{1,T} \\ \dots \\ \hat{X}_{J,1} \\ \dots \\ \hat{X}_{J,T} \end{bmatrix} + Z \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \dots \\ u_{JT} \end{bmatrix}$$

Sendo a matriz  $Z$  de tamanho  $(jt, jt)$ .

Adotando-se tal procedimento, tem-se, a cada sorteio, um vetor  $(jt \times 1)$  de novos valores das variáveis de interesse ( $X_j$ ) para cada data  $t$ .

Substituindo-se, a cada sorteio, esses valores nas equações que relacionam os fatores de riscos às contas do fluxo de caixa e essas no esquema de equações do fluxo (quadro 1) tem-se, ao fim dos  $n$  sorteios, a distribuição futura do fluxo de caixa livre da empresa.

A partir desta distribuição, é possível, por exemplo, calcular a probabilidade da firma, em cada data de interesse, não dispor de recursos para honrar seus compromissos, o que ocorre quando seu fluxo de caixa é negativo.

Também cabe ressaltar que à medida que o número de fatores  $j$  e o número de datas futuras de previsão  $t$  aumentam, é difícil garantir que a matriz  $\Sigma_X$  será positiva definida, conforme exigido para a decomposição de Cholesky.

Para resolver esse possível problema, o documento *LongRun* (1999) sugere um método para garantir que a matriz seja positiva definida. De acordo com o documento, uma matriz será positiva definida se, e somente se, todos os seus autovalores forem maiores que zero. Desta forma, ao estimar os autovalores da matriz  $\Sigma_X$  e algum autovalor for menor ou igual a zero, sabe-se *a priori* que ela não vai poder ser decomposta. Para transformar os autovalores iguais ou menores que zero em autovalores positivos, o *LongRun* sugere uma pequena perturbação, dada por  $c(I - \Sigma_X)$ , sobre a matriz original:

$$\Sigma_X \rightarrow \Sigma_X + c(I - \Sigma_X) = B$$

onde:

$z$  é um escalar

$I$  é a matriz identidade

$B$  é a matriz original perturbada, que pode ser decomposta se, após a perturbação, seus autovalores forem todos maiores que zero.

O valor de  $z$ , de acordo com o *LongRun*, é dado pelo Teorema de Rayleigh-Ritz:

$$c \geq \left( \frac{-\lambda_M}{1 - \lambda_M} \right)$$

onde:

$\lambda_M$  é o valor do menor autovalor de  $\Sigma_X$

Desse modo, o valor de  $c$  que deve ser utilizado na perturbação é aquele imediatamente superior ao valor gerado pelo quociente do Teorema de Rayleigh-Ritz.

Para realizar todo esse procedimento de estimações da relação dos fatores de risco com as contas do fluxo, bem como as suas simulações conjuntas, serão utilizados os seguintes *softwares*: E-Views, Forecast-Pro, @Risk, Saiph e alguma programação em código VBA.

## 4.5

### Simulação de Quase-Monte Carlo

Antes de descrever o método em sua essência, é necessário entender alguns conceitos básicos que esta técnica utiliza e que posteriormente estará sendo usada na simulação do CFaR deste trabalho.

#### 4.5.1

##### Seqüências pseudo-aleatórias

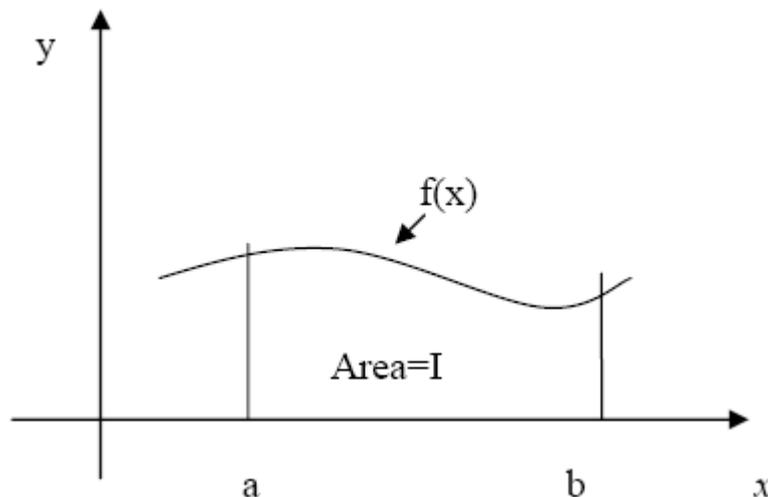
A seqüência pseudo-aleatória é parecida com a geração de números aleatórios no sentido de que elas são imprevisíveis. No entanto, números pseudo-aleatórios são gerados com um algoritmo “determinístico” (daí o adjetivo "pseud") semelhante ao gerador congruente aleatório (que é o método mais comum). Além disso, a implementação destas seqüências é, em geral, volátil, no sentido de que o valor inicial do processo depende de um alimentador externo como o computador. Como exemplo pode citar a função **Rand()** do Excel (tipo de gerador congruente linear) que retorna um número diferente a cada instante extraído da distribuição Uniforme [0,1]. KRYKOVA (2003)

A distribuição uniforme no intervalo [0, 1] é a única utilizada para gerar simulações, porque através dela podem-se gerar várias outras distribuições através de transformações. O livro de Law & Kelton (2000) traz vários tipos de algoritmos que realizam essas transformações. A maioria das distribuições podem ser simuladas usando método aleatório tradicional (números *pseudo* randômicos) com métodos de redução de variância (ex.: Latin-Hypercubic), ou com números quase randômicos (Quase-Monte Carlo), que será visto mais adiante.

#### 4.5.2

##### O método tradicional de Monte Carlo (MC)

A metodologia da simulação de Monte Carlo usa pontos aleatórios para fazer o cálculo numérico de uma integral, ou em outras palavras, usa seqüência de números pseudo-aleatórios para achar a área sob a função de estudo como mostra o gráfico 02 abaixo:



FONTE: Krykova, 2003, p.7

Gráfico 02: Ilustração da área integrada de uma função

Para obter o valor da integral que corresponde à área descrita acima, pode-se usar um método de soma que gera uma boa aproximação desse valor. A estimação de Monte Carlo vai aproximar a integral  $I$  do seu valor real, através da média de uma amostragem grande e aleatória de  $x_i$ 's.

A fórmula de cálculo é descrita da seguinte maneira:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad \text{Equação 9}$$

O método de Simulação de Monte Carlo pode ser visto como um problema de cálculo integral, onde segundo Ripley (1987) *apud* Krykova (2003), o objeto principal de qualquer simulação está em calcular uma ou mais expectâncias da forma  $E[\varphi(X)]$ . Em geral, este método envolve problemas de cálculo de integrais multidimensionais, que pode ser expresso pela seguinte função de acordo com a aproximação de Monte Carlo:

$$\theta = \int \varphi(x)f(x)dx \approx \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \in B}}^N \varphi(x_i) \quad \text{Equação 10}$$

onde,  $x_i$ , com  $i = \overline{1, \dots, N}$ , é uma amostra aleatória e independente de  $N$  números da função  $f(x)$  oriundos de uma amostra aleatória da distribuição uniforme no intervalo de  $[0,1]^s$  (sendo  $s$  a dimensão do cubo unitário  $B \in \mathcal{R}^s$ ). KRYKOVA (2003)

As vantagens principais da simulação de Monte Carlo são:

- fácil implementação. O cálculo requer apenas uma amostra aleatória de valores possíveis para  $x$  para se chegar o seu equivalente em  $f(x)$ .
- oferece um meio rápido e prático de cálculo da integral quando se trabalha com problemas de alta dimensão.
- o desvio-padrão não depende da dimensão da integral como a maioria das outras técnicas dependem.
- o método de Monte Carlo também permite uma aplicação prática muito grande a problemas da vida real, justamente na simulação de valores possíveis que alguma variável poderá vir assumir.

Já as principais desvantagens e demais críticas a essa metodologia são feitas principalmente por Niederreiter (1992) *apud* Krykova (2003). São elas:

- a simulação de Monte Carlo converge devagar para o verdadeiro valor – da ordem de  $1/\sqrt{N}$  – onde  $N$  é o tamanho da amostra simulada. Isso significa que para reduzir o erro pela metade é necessário que aumente o tamanho da amostra em quatro vezes.
- os erros nas “caudas” das distribuições geradas por Monte Carlo podem ter o seu valor sobre estimado devido ao desenvolvimento do integrando da função.
- a simulação necessita que o analista arbitre um valor inicial para o processo ou utilize um gerador automático para tal função.

### 4.5.3

#### Simulação por Quase-Monte Carlo (QMC)

O método de Quase-Monte Carlo foi proposto na década de 50 e desde então vem se desenvolvendo no mundo acadêmico e prático. Algumas das aplicações desse método surgiram em problemas de análise numérica que poderiam ser resolvidos por integração. Em 1995 Paskov & Traub *apud* Krykova (2003) utilizou QMC para estimar o preço de uma hipoteca. O problema deles tinha uma alta dimensão (360), mas mesmo assim, eles obtiveram aproximações mais precisas do que com o método padrão de Monte Carlo. Desde então, muitos pesquisadores têm utilizado simulação por QMC em aplicações na área de finanças e risco. KRYKOVA (2003)

O método QMC é bem semelhante ao tradicional MC exceto na geração da seqüência de números aleatórios onde o primeiro usa números Quase-aleatórios e o segundo pseudo-aleatórios. A vantagem de se usar a seqüência Quase-aleatória, é que ela busca gerar números mais bem distribuídos e sem formação de “clusters”, com isso a convergência da integral para o seu verdadeiro valor passa a ser de  $(ln*N)^s / N$  (onde  $s$  é o número de dimensões da integral) ante  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  do método de Monte Carlo tradicional.

Segundo Niederreiter (1992) *apud* Krykova (2003) a simulação de QMC pode ser vista como uma versão determinística em relação ao método de Monte Carlo. Esse “determinismo” se refere ao fato de usar seqüência de baixa discrepância (para geração dos números quase-aleatórios) ao invés de amostras aleatórias.

Com isso, é possível determinar antecipadamente uma regra de integração que vai gerar uma precisão. Por exemplo, para o método de Monte Carlo é necessário aumentar em 100 vezes o número de simulações para reduzir o erro em um fator de 10, ao passo que o QMC requer menos que 100 vezes, podendo chegar até 10 vezes em casos ótimos. KRYKOVA (2003)

A seqüência de baixa discrepância é um conjunto  $s$ -dimensional de pontos que preenchem uma área de modo eficiente e sem grandes distâncias entre um ponto e outro, coisa que não acontece na seqüência pseudo-aleatória. As vantagens do QMC trabalhar com essa técnica são:

- o cálculo da integral é obtido por aproximação através de uma seqüência de pontos “bem-escolhida”;
- o tempo de computação na simulação de QMC é quase igual ou menor (devido ao menor erro gerado) do que o gasto no método tradicional, com a vantagem de na maioria das vezes gerar resultados melhores, principalmente nas caudas das distribuições e quando se trabalha com número elevado de dimensões;

#### 4.5.4

##### Seqüência de baixa discrepância

O conceito de baixa discrepância está associado com a propriedade de geração de números sucessivos que preencham um determinado espaço (ou formem um conjunto de pontos) evitando a formação de *clusters*, ou seja, que a distribuição dos pontos “cubra” toda a área do plano de maneira eficiente e sem discrepâncias. Para que isso ocorra, cada número gerado neste tipo de seqüência depende do seu antecessor para que só assim o “espaço” fique preenchido da maneira mais uniforme possível.

Segundo Dias (2008), a seqüência de Van der Corput é a mais conhecida e trabalhada na literatura para gerar números com baixa discrepância. Para gerar valores utilizando esta seqüência é necessário seguir apenas três passos:

1. O número  $n$  na base decimal é expandido para a base  $b$ , por exemplo:  $n = 4$ , na base 2 é **100** ( $4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ );
2. O número na base  $b$  é refletido. No exemplo, **001**;
3. Pegue o número refletido na base  $b$ . No exemplo o número 0,001 (na base 2) corresponde ao número decimal  $1/8$ , isto é, van der Corput =  $1/8 = 0,125 (= 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3})$

Enfim, para realizar todo esse processo são necessárias apenas duas equações: a primeira serve para transformar qualquer número  $n$  em qualquer base  $b$  (por exemplo, para a base 2 irá trabalhar com seqüências de zeros e uns, na base

3 seqüências de zeros, uns e dois, na base 4 seqüências de zeros, uns, dois e três, etc)

$$n = \sum_{j=0}^m a_j(n)b^j \quad \text{Equação 11}$$

A segunda equação vai gerar o número decimal  $n$  correspondente à seqüência de van der Corput na base  $b$ :

$$b(n) = \Phi_b(n) = \sum_{j=0}^m a_j(n)b^{-j-1} \quad \text{Equação 12}$$

onde  $m$  é o menor valor da integral que torna  $a_j(n) = 0$  para todo  $j > m$

Existem outros tipos de seqüências de baixa discrepância para o caso multi-dimensional, são elas: Halton (1960), Faure (1982), Niederreiter (1987) e Sobol (1967). A vantagem de utilizar este tipo de seqüência no método de QMC é justamente de gerar números quase-randômicos que possibilitam baixo erro na simulação e alta precisão em problemas que envolvam grandes dimensões.

#### 4.5.5

##### Quase-Monte Carlo Híbrido (QMCH)

A técnica de Híbrido-QMC foi inspirada no Latin-Hypercube. Basicamente, um processo de  $s$  simulações e  $N$  dimensões pode ser resolvido da seguinte maneira:

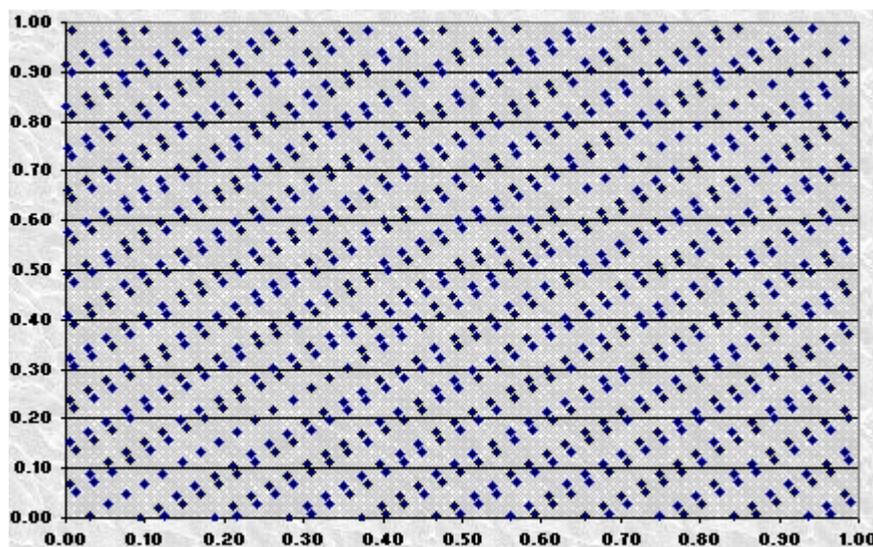
1. Gera-se um vetor-coluna de  $N$  números aleatórios ou quase-aleatórios. No caso, para este trabalho estão sendo gerados números quase-aleatórios pela seqüência de Sobol (1967), que trabalha justamente com casos multi-dimensionais só que de uma maneira simples e mais rápida em relação às outras seqüências (Faure e Halton, por exemplo).
2. Para cada dimensão  $k$ ,  $k = 1, \dots, s$  faz-se uma permutação independente e aleatória nos elementos do vetor-coluna. Essa

permutação ocorre na equação 12 de van der Corput (usada também por Sobol). Com isso, sua nova fórmula passa a ser da seguinte maneira:

$$a_i^d(n) = \frac{\sum_{j \geq i}^m \frac{j!}{i!(j-i)!} a_j^{d-1}(n)}{b}$$

Equação 13

A necessidade de se fazer permutação no passo 2, é porque quando o problema torna-se de grande dimensão, começam a ter correlações entre os números gerados e com isso a formação de alguns *clusters*, só que bem distribuídos ao longo do plano, como mostra o gráfico 02.



FONTE: [http://www.puc-rio.br/marco.ind/quasi\\_mc.html#Halton](http://www.puc-rio.br/marco.ind/quasi_mc.html#Halton), p.16

Gráfico 03: Formação de *clusters* em problemas de alta dimensão

Mas esta situação não é boa para o processo de simulação, daí a criação desse método que serve justamente para eliminar essa correlação cíclica que pode acontecer quando o número de dimensões é elevado. Com isso, o processo de simulação por QMC volta a ser aplicado sem problemas, porque cada passo passa a ser independente um do outro.

#### 4.5.6

### Gerando a distribuição Normal Padrão na simulação de Quase-Monte Carlo

No processo de simulação, tanto os números *pseudo* ou quase aleatórios são gerados através de uma distribuição Uniforme. Isto acontece pelo fato dela ter uma facilidade maior em gerar outras distribuições de probabilidade através de algoritmos matemáticos. O modo principal e direto para realizar essa transformação é através da “inversão” da Uniforme para a função de probabilidade acumulada desejada. Para este trabalho a distribuição estudada será a Normal Padrão, pelo fato dela ter maior aplicabilidade em problemas de finanças como o CFaR.

A distribuição acumulada da Normal Padrão é:

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad \text{Equação 14}$$

Em um problema de simulação tem-se um  $Y(x)$  oriundo de um distribuição uniforme,  $Y(x) \sim U[0,1]$ , mas o que se quer na verdade é o valor de  $x$  correspondente para uma distribuição qualquer, no caso, a Normal. Ou seja, dada uma amostra  $\mathbf{u}$  de números aleatórios extraídos de uma Uniforme, qual será o seu valor correspondente  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  na distribuição desejada?

Segundo KRYKOVA (2003), uma das maneiras para transformar números quase-aleatórios oriundos da  $U[0,1]$  em uma amostra normalmente distribuída é através do algoritmo de *Box-Muller*. No entanto, quando se está trabalhando com seqüências de baixa discrepância esse algoritmo não é bom porque ele altera justamente a propriedade principal de números de baixa discrepância que é a “uniformidade” da distância entre um ponto e outro. Além disso, esse método não tem um desempenho satisfatório quando os valores da inversão dão no extremo das caudas da distribuição Normal. Com isso a alternativa foi utilizar o algoritmo de Moro, ou como é mais comum na literatura, inversão de Moro, que apresenta uma solução híbrida que divide o domínio da distribuição Uniforme da seguinte maneira:

1. A região central da distribuição,  $|U| \leq 0,42$ ,  $U = x - 0,5$  é modelada

$$\text{pelo o algoritmo de Beasley \& Springer (1997) } \Phi^{-1}(x) = U \frac{\sum_{n=0}^3 a_n U^{2n}}{\sum_{n=0}^4 b_n U^{2n}}$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são constantes que assumem os valores da tabela 01

Tabela 01: Valores de  $a_n$  e  $b_n$

$n$	$a_n$	$b_n$
0	2,50662823884	1,00
1	-18,61500062529	-8,4735109309
2	41,39119773534	23,08336743743
3	-25,44106049637	-21,06224101826
4		3,13082909833

FONTE: Krykova (2003), p.30

2. As caudas da distribuição,  $|U| > 0,42$  serão modeladas por séries truncadas de Chebyshev:

$$\Phi^{-1}(x) = \sum_{n=0}^8 c_n T_n(z) - \frac{c_0}{2}, \text{ se } U > 0$$

$$z = k_1 [2 \ln(-\ln(0,5 - |U|)) - k_2]$$

$$\frac{c_0}{2} - \sum_{n=0}^8 c_n T_n(z), \text{ se } U \leq 0$$

As constante  $k_1$  e  $k_2$  são escolhidas de forma que  $z = -1$  quando  $\Phi(x) = 0,92$  e  $z = 1$  quando  $\Phi(x) = 1 - 10^{-12}$ . A tabela 02, mostra os valores que  $c$  e  $k$  assumem para cada valor de  $n$ .

Tabela 02: Valores de  $c_n$  e  $k_n$ 

$n$	$c_n$	$k_n$
0	7,7108870705487895	
1	2,7772013533685169	0,4179886424926431
2	0,3614964129261002	4,2454686881376569
3	0,0373418233434554	
4	0,0028297143036967	
5	0,0001625716917922	
6	0,0000080173304740	
7	0,0000003840919865	
8	9,9999999129707170	

FONTE: Krykova (2003), p.31

Esse procedimento tem alta precisão para valores de  $x$  no intervalo  $[10^{-10}, 1-10^{-10}]$ . KRYKOVA (2003) faz uma comparação interessante entre a inversão de Moro (usando seqüência de van der Corput na base 2) e a padrão do programa Excel (STANDSINV()). A tabela 03 mostra que ambas as técnicas de inversões apresentam resultados semelhantes quando se trabalha com seqüências de números quase-aleatórias. Mas quando se trata de geração pseudo-aleatória (caso mais comum), a inversão de Moro possui maior precisão em todos os parâmetros com exceção da variância e desvio-padrão.

Tabela 03: Cálculo dos parâmetros da Normal padrão pela Inversão de Moro e Excel (N = 100 simulações)

	Normal [0,1]	Inversão de Moro		Inversão do Excel	
		<i>Pseudo-Aleatório</i>	<i>Quase-Aleatório</i>	<i>Pseudo-Aleatório</i>	<i>Quase-Aleatório</i>
<b>Média</b>	0	-0,0111	0,0002	-0,0235	0,0003
<b>Mediana</b>	0	0,0009	0,0000	0,0033	0,0000
<b>Desvio-padrão</b>	1	0,9779	0,9886	1,0085	0,9940
<b>Variância</b>	1	0,9562	0,9772	1,0170	0,9880
<b>Assimetria</b>	0	0,0533	0,0097	-0,1318	0,0121
<b>Curtose</b>	3	2,8451	2,7870	3,1571	2,8914

FONTE: KRYKOVA (2003), p.31

Além disso, o que se quer obter usando a inversão de Moro, é justamente uma precisão maior com valores situados na cauda da distribuição Normal, coisa que o algoritmo implementado no Excel não consegue fazer com o mesmo

sucesso. Para isso, KRYKOVA (2003) fez um teste onde foi sorteado uma amostra da distribuição uniforme com números muito próximo de zero e cujo a inversão para a distribuição Normal resulta em números situados na ponta extrema da cauda esquerda. O resultado é que a inversão de Moro obteve precisão exata (até na quinta casa decimal) dos cinco valores da amostra, como pode ser visto na tabela 04. Isso é muito importante em finanças, principalmente em problemas aplicados na área de risco e opções reais onde na maioria das vezes busca-se modelar o extremo das situações possíveis de acontecer com um número elevado de simulações.

Tabela 04: Comparação entre a Inversão de Moro e Excel no cálculo de valores extremos da cauda esquerda da distribuição Normal padrão

<b>u</b>	<b>Normal [0,1]</b>	<b>Inversão de Moro</b>	<b>Inversão do Excel (NORMSINV)</b>
<b>0,001</b>	-3,09023	-3,09023	-3,09025
<b>0,0001</b>	-3,71902	-3,71902	-3,71909
<b>0,00001</b>	-4,26489	-4,26489	-4,26504
<b>0,000001</b>	-4,75342	-4,75342	-4,75367
<b>0,0000003</b>	-4,99122	-4,99122	-4,99152

FONTE: KRYKOVA (2003), p.32