

8 Referências Bibliográficas

- [1] ASSEF NETO, A.; SILVA, C.A.T.; **Administração do Capital de Giro**. Editora Atlas S.A., São Paulo, 2^a edição, 1997.
- [2] BANDYOPADHYAY, A.; **Mapping Corporate Drift Towards Default, Part I: a market-based approach**. The Journal of Risk Finance, v. 8, 2007, p. 35-45.
- [3] BANDYOPADHYAY, A.; **Mapping Corporate Drift Towards Default, Part II: a hybrid credit-scoring model**. The Journal of Risk Finance, v. 8, 2007, p. 46-55.
- [4] BHARATH, S.; SHUMWAY, T.; **Forecasting Default with the KMV-Merton Model**. Department of Finance, University of Michigan Business School.
- [5] BLACK, F; SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. Journal of Political Economy, v. 81, 1973, p. 637-659.
- [6] BREALEY, R.; MYERS, S.; **Principles of Corporate Finance**. McGraw-Hill Companies, Inc. New York, 1996.
- [7] BROCKMAN, P.; TURTLE, H.J.; **A Barrier Option framework for Corporate Security Valuation**; Journal of Financial Economics, v. 67, 2003, p. 511-529.
- [8] CAOUILLE, J.B.; ALTMAN, E.; NARAYANAN, P.; **Gestão do Risco de Crédito: o próximo grande desafio financeiro**. Qualitymark, Rio de Janeiro, 1999.
- [9] CHAIA, A.J. **Modelos de Gestão do Risco de Crédito e sua Aplicabilidade ao Mercado Brasileiro**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, USP, 2003.
- [10] CHAN-LAU, J.A.; JOBERT, A.; KONG, J.; **An Option-Based Approach to Bank Vulnerabilities in Emerging Markets**. IMF Working Paper N° 04/33, Fevereiro 2004. .

- [11] COSTA, C.L.; **Opções: operando a volatilidade**. Bolsa de Mercadorias & Futuros, São Paulo, 1998.
- [12] COX, J.C.; ROSS, S.A.; RUBINSTEIN, M.; **Option Pricing: A Simplified Approach**. Journal of Financial Economics, v. 7, 1979 p.229-263.
- [13] CROSBIE, P.; BOHN, J.; **Modeling Default Risk**. Moody's KMV Company , Dezembro 18, 2003.
- [14] CROUHY, M.; GALAI, D.; MARK, R.; **A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models** Journal of Banking & Finance, v. 24, 2000, p. 59-117.
- [15] DAMODARAN, A.; **Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2^o edição, 2002.
- [16] DAVYDENKO, S. A.; **When do Firms Default? A Study of the Default Boundry**. London Business School, Fevereiro 1, 2005.
- [17] DIXIT, A. K.; PINDYCK, R.S.; **Investment Under Uncertainty**. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1994.
- [18] DUFFIE, D.; SINGLETON, K.; **Modeling Term Structures of Defaultable Bonds**; Review of Finance Studies, v.12, 1999, p. 687-720.
- [19] DWYER, D.W.; **The Distribution of Defaults and Bayesian Model Validation**; Moody's KMV Company , Novembro 6, 2006.
- [20] DWYER, D.W.; **The Distribution of Defaults and Bayesian Model Validation**; Moody's KMV Company , Novembro 6, 2006.
- [21] DWYER, D.W.; KOCAGIL, A.E.; STEIN, R.M.; **Moody's KMV RiskCalc v3.1 Model – Next Generation Technology for Predicting Private Firm Credit Risk**; Moody's KMV Company , Abril 5, 2004.
- [22] FAMA, E.; **Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Emperical Work**; Journal of Finance, v. 25, 1970, p. 383-417.
- [23] GALLATI, R. R.; **Risk Management and Capital Adequacy**. McGraw-Hill Companies, Inc. New York, 2003.
- [24] GHAGHORI, P.; CHAN, H.; FAFF, R.; **Investigating the Performance of Alternative Default-Risk Models: Option-Based Versus Accounting-Based Approaches**. Australian Journal of Management, v. 31, 2006, p. 207-234.

- [25] HERMANNY, P. F. **Modelos de Equilíbrio Geral e Precificação de Risco de Crédito**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, 2000.
- [26] HUANG, J.; HUANG, M.; **How Much of the Corporate-Treasury Yield Spread is Due to Credit Risk?**. Working Paper, Pennsylvania State University, 2003.
- [27] HULL, J.C.; **Options, Futures and Other Derivatives**. Pearson Education. Prentice Hall, New Jersey, 5th edition, 2002.
- [28] JARROW, R.A.; TURNBULL, S.M.; **Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk**. Journal of Finance, v. 50, 1995, p. 53-86.
- [29] JARROW, R.A.; LANDO, D.; TURNBULL, S.M.; **A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads**. The Review of Financial Studies, v. 10, 1997, p. 481-583.
- [30] JPMORGAN & CO. INCORPORATED; RiskMetricsTM – Technical Document. RiskMetrics Group, New York, 1996.
- [31] JORION, P.; **Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk**. McGraw-Hill Companies, Inc. New York, 1997.
- [32] KEALHOFER, S.; **Quantifying Credit Risk I: Default Prediction**. Financial Analyst Journal; Jan/Fev 2003; 59, 1; pg. 30.
- [33] KEALHOFER, S.; **Quantifying Credit Risk II: Debt Valuation**. Financial Analyst Journal; Mai/Jun 2003; 59, 3; pg. 78.
- [34] LELAND, H.E.; **Predictions of Default Probabilities in Structural Models of Debt**. Journal of Investment Management, v.2, 2004, p. 5-20.
- [35] MCKEAN, H.P.; **Stochastic Integrals**; Academic Press, New York, 1969.
- [36] MERTON, R.C.; **Theory of Rational option pricing**; Journal of Economics and Management Science, v. 4, 1973, p. 141-83.
- [37] MERTON, R.C.; **On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rate**; Journal of Finance, v. 29, 1974, p. 449-470.
- [38] SAUNDERS, A.; **Medindo o Risco de Crédito: Novas Abordagens para Value at Risk e outros paradigmas**. Qualitymark, Rio de Janeiro, 2000.
- [39] SELLERS, M.; ARORA, N.; **Financial EDF Measures – A new model of dual business lines**; Moody's KMV Company, Agosto, 2004.
- [40] VASICEK, O. A.; **Credit Valuation**; KMV, LLC (KMV), March 1984.

[41] VASSALOU, M.; XING, Y.; **Default Risk in Equity Returns**; The Journal of Finance, v. 59, 2004, p. 831-868

[42] WESTGAARD, S.; **Real Default Probability and its Sensitivity in an Option Based Framework**. Workshop Stockholm School of Economics, 2003.

Apêndice A

Para encontrar a relação teórica entre a volatilidade do valor de mercado de uma empresa (σ_E) e a volatilidade do valor dos ativos da empresa (σ_A), é preciso começar escrevendo a famosa EDP de BLACK e SCHOLES (1973):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v^2 F_{vv} + (rV - C)F_v - rF + F_t + C_y = 0$$

Isolando,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v^2 F_{vv} + F_{ty} = -(rV - C)F_v + rF - C_y \quad (\text{A.1})$$

Agora, a equação do Lemma de Itô²⁴:

$$dV = F_v dV + \frac{1}{2} F_{vv} (dV)^2 + F_t dt$$

Lembrando que o ativo segue um MGB

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dz \quad (\text{A.2})$$

Substituindo o MGB (A.2) do ativo na equação do Lemma de Itô:

$$dV = F_v (\mu V_A dt + \sigma_A V_A dz) + \frac{1}{2} F_{vv} (dV)^2 + F_t dt$$

Sabendo que $dV_A^2 = \mu^2 V_A^2 dt^2 + 2\mu V_A^2 \cdot \sigma_A \cdot dt \cdot dw + \sigma^2 V_A^2 dw^2 = \sigma^2 V_A^2 dt$

²⁴ Para discussão rigorosa do Lemma de Itô, veja MCKEAN 1969 ou então ANEXO C.

$$dV = F_v \mu V_A dt + F_v \sigma_A V_A dz + \frac{1}{2} F_{vv} \sigma^2 V^2 dt + F_t dt$$

$$dV = \left(\frac{1}{2} F_{vv} \sigma^2 V^2 + \mu F_v V + F_t \right) dt + F_v \sigma_A V_A dz$$

Fazendo, $\mu V = (\mu V - C)$, ou seja, com presença de dividendos, obtém-se:

$$dV = \left(\frac{1}{2} F_{vv} \sigma^2 V^2 + (\mu V - C) F_v + F_t \right) dt + F_v \sigma_A V_A dz \quad (\text{A.3})$$

Substitui-se na equação A.3 a equação A.1,

$$dV = ((\mu V - C) F_v - (rV - C) F_v + rF - C_y) dt + F_v \sigma_A V_A dz$$

Calculando, tem-se:

$$dV = ((\mu - r) V F_v + rF - C_y) dt + F_v \sigma_A V_A dz \quad (\text{A.4})$$

Analisando as equações A.2 e a equação A.4, verifica-se que os parâmetros são iguais, ou seja:

$$\mu V_A = (\mu - r) V F_v + rF$$

$$\mu V_A = \frac{(\mu - r) \sigma V F}{\sigma_y} + rF$$

$$(\mu - r) V_A = \frac{(\mu - r) \sigma V F}{\sigma_y} \quad \text{com isso é encontrada a relação desejada,}$$

$$V_A \sigma_y = \sigma V F_v$$

$$\sigma_E = \left(\frac{V_A}{V_E} \right) \frac{\partial V_E}{\partial V_A} \sigma_A \quad (\text{A.5})$$

No modelo de BLACK e SCHOLLES (1973), pode-se mostrar que $\frac{\partial V_E}{\partial V_A} = N(d_1)$, então pelo modelo de MERTON (1974), a relação das volatilidades dos *assets* com o *equity* é:

$$\sigma_E = \left(\frac{V_A}{V_E} \right) N(d_1) \sigma_A \quad (\text{A.6})$$

Apêndice B

Neste apêndice será visto o detalhamento da formulação de MERTON (1974) para encontrar a probabilidade de *default* de firmas:

Primeiramente será assumido que os ativos seguem em MGB

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dW \quad dW \approx N(0, dt)$$

Seja $f = \ln V_A$

pelo lemma de Itô²⁵,

$$df(\ln V_A) = \frac{df}{dV_A} dV_A + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dV_A^2} dV_A^2 \quad 26 \quad (B.1)$$

Calculando,

$$\frac{df}{dV_A} = \frac{d(\ln V_A)}{dV_A} = \frac{1}{V_A} \quad (B.2) \quad \text{e} \quad \frac{d^2 f}{dV_A^2} = \frac{d^2(\ln V_A)}{dV_A^2} = \frac{d(1/V_A)}{dV_A} = \frac{-1}{V_A^2} \quad (B.3)$$

Agora substitui B.2 e B.3 na equação B.1:

$$df(\ln V_A) = \frac{1}{V_A} dV_A + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{V_A^2} \right) \sigma_A^2 V_A^2 dt$$

²⁵ Parcela sem o resto de Itô e a parcela em dt. Para mais detalhes verificar Anexo C

²⁶ $dV_A^2 = \mu^2 V_A^2 dt^2 + 2\mu V_A^2 \sigma_A dt.dw + \sigma^2 V_A^2 dw^2$, sabendo que $dt^2 = 0$, $dt.dw = 0$ e $dw^2 = dt$

Reescrevendo: $dV_A^2 = \sigma_A^2 V_A^2 dt$

$$df(\ln V_A) = \frac{1}{V_A} dV_A - \frac{1}{2} \sigma_A^2 dt \quad (\text{B.4})$$

Substituindo a equação B.4 no MGB do ativo:

$$df(\ln V_A) = \frac{1}{V_A} (\mu V_A dt + \sigma_A V_A dw) - \frac{1}{2} \sigma_A^2 dt$$

Calculando,

$$df(\ln V_A) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_A^2 \right) dt + \sigma_A dw$$

O próximo passo é integrar pelos dois lados:

$$\int_t^{t+\Delta t} d(\ln V_A) = \int_t^{t+\Delta t} \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_A^2 \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \sigma_A dw$$

$$\ln \left(\frac{V_{A,t+\Delta t}}{V_{A,t}} \right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_A^2 \right) \Delta t + \sigma_A (w_{t+\Delta t} - w_t)$$

Sabendo que:

$$\varepsilon_{t+\Delta t} = \frac{w_{t+\Delta t} - w_t}{\sqrt{\Delta t}} \text{ sendo } \varepsilon_{t+\Delta t} \approx N(0,1)$$

O objetivo de fazer isso é "normalizar" o erro. Com isso, obtém-se a seguinte relação importante:

$$\ln V_{A,t+\Delta t} = \ln V_{A,t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{t+\Delta t}$$

Sabendo que a probabilidade de *default* é dada pela equação:

$$P_{def,t} = \text{Prob}[V_{A,t+\Delta t} \leq B_t / V_{A,t}] = \text{Prob}[\ln(V_{A,t+\Delta t}) \leq \ln(B_t) / V_{A,t}]$$

É a probabilidade de o valor dos ativos ser menor do que o valor contábil das suas dívidas.

$$\begin{aligned}
 P_{def,t} &= Prob[\ln(V_{A,t+\Delta t}) - \ln(B_t) / V_{A,t} \leq 0] \\
 &= Prob \left[\ln V_{A,t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{t+\Delta t} - \ln(B_t) \leq 0 \right] \\
 &= Prob \left[\ln V_{A,t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \Delta t - \ln(B_t) \leq -\sigma_A \sqrt{\Delta t} \cdot \varepsilon_{t+\Delta t} \right] \\
 &= Prob \left[-\frac{\ln V_{A,t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) \Delta t - \ln(B_t)}{\sigma_A \sqrt{\Delta t}} \geq \varepsilon_{t+\Delta t} \right]
 \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula desejada para a distância de *default*:

$$D.D = \frac{\ln\left(\frac{V_{A,t}}{B_t}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma_A \sqrt{\Delta t}}$$

Apêndice C

Processo de Wiener Generalizado e Movimento Browniano Simples

O processo de Wiener generalizado pode ser descrito pela seguinte equação:

$$dx = a(x,t) dt + b(x,t) dz \quad (C.1)$$

Onde $a(x,t)$ é a função não-aleatória de tendência, $b(x,t)$ é a função não-aleatória de variância, as variáveis presentes nesta fórmula serão definidas adiante. Além de ser um processo estocástico não-estacionário fundamentalmente pelo fato de a sua variância crescer linearmente no tempo, o processo de Wiener possui três características principais, conforme afirmam DIXIT e PINDYCK (1994):

1. É considerado como um processo de Markov pelo fato de que a distribuição de probabilidades dos valores futuros do processo depende somente do seu valor atual, ou seja, não é afetado pelos valores passados do processo ou por qualquer informação;
2. Apresenta incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidade para as variações no processo em qualquer intervalo de tempo são independentes de qualquer outro intervalo de tempo (que não se sobreponha ao primeiro);
3. Variações no processo em qualquer intervalo finito de tempo têm distribuição normal, com uma variância proporcional (linear) ao intervalo de tempo ocorrido.

Portanto, supondo que um processo de Wiener apresente uma variável $z(t)$, sua variação (Δz) em um intervalo de tempo (Δt) seria dada pela fórmula:

$\Delta z = \varepsilon t \sqrt{\Delta t}$, onde, εt é uma variável aleatória com distribuição normal, ou seja, $\varepsilon t \sim N(0,1)$; e os valores de Δz , para quaisquer intervalos, são independentes. Além disso, a variável aleatória (εt) não tem correlação serial, ou seja:

$$E(\varepsilon t, \varepsilon s) = 0 \text{ para } t \neq s.$$

Ao se considerar um intervalo de tempo infinitesimalmente pequeno, ou seja, $\Delta t \rightarrow 0$, refletindo na derivada $dt = 0$, é possível representar o incremento do Processo de Wiener (dz) no tempo contínuo como:

$$dz = \varepsilon t \sqrt{dt} \quad (\text{C.2})$$

Pelo fato de que $\varepsilon t \sim N(0,1)$ e tomando a equação C.2, pode-se verificar que o valor esperado da variação de z é zero e sua variância é proporcional ao intervalo de tempo da variação (dt):

$$E[dz] = E[\varepsilon t \sqrt{dt}] = 0, \text{ pois } E[\varepsilon t] = 0 \quad (\text{C.3})$$

$\text{Var}[dz] = \text{Var}[\varepsilon t \sqrt{dt}] = (\sqrt{dt})^2 \cdot \text{Var}[\varepsilon t] = dt \cdot (1)^2 = dt$, pois o DP $[\varepsilon] = 1$. (C.4)

$$\text{Logo, define-se que: } dz = \varepsilon t \cdot \sqrt{dt} \leftrightarrow dz \sim N(0, \sqrt{dt}) \quad (\text{C.5})$$

Voltando à equação generalizada do Processo de Wiener, que já foi anteriormente descrito:

$$dx = a(x,t) dt + b(x,t) dz \quad (\text{C.1})$$

Onde,

- dz é o chamado incremento de Wiener;
- $a(x,t)$ e $b(x,t)$ são funções não aleatórias conhecidas.

Substituindo-se os parâmetros $a(x,t)$ e $b(x,t)$ por, respectivamente, α (conhecido como parâmetro *drift*) e σ (parâmetro de variância), ambos constantes, chega-se à seguinte equação:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \quad (C.6)$$

Nesta equação, α representa o parâmetro de tendência no tempo (ou crescimento), σ o parâmetro de variância, que exprime a incerteza ou ruído do processo, ou seja, determina a amplitude dos choques aleatórios que x sofre ao longo do tempo e é conhecido como volatilidade, e x é um processo estocástico.

Considerando-se em um intervalo de tempo Δt , a mudança em x , denotada por Δx , tem-se:

$$\Delta x = \alpha \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (C.7)$$

Onde:

$$E[\Delta x] = \alpha \Delta t \quad (C.8)$$

$$\text{Var}[\Delta x] = \sigma^2 \Delta t \quad (C.9)$$

O processo dx pode ser representado pela soma de um componente determinístico (*drift* ou tendência) com um componente aleatório normalmente distribuído. Pela equação C.2, a soma de uma constante com uma variável aleatória normal resulta numa variável (dx) também normal com média α e variância σ^2 .

O movimento geométrico browniano é, em geral, utilizado para modelar preço, taxas de juros, preços de produtos e outras variáveis financeiras e econômicas. A restrição que existe ao uso do Movimento Geométrico Browniano é o fato de que este processo pode divergir, levando $x(t)$ para o infinito, de forma que alguns modelos que seguem este processo podem não

ser muito realistas (Brandão, 2001). Uma representação gráfica deste processo está apresentada na figura abaixo:

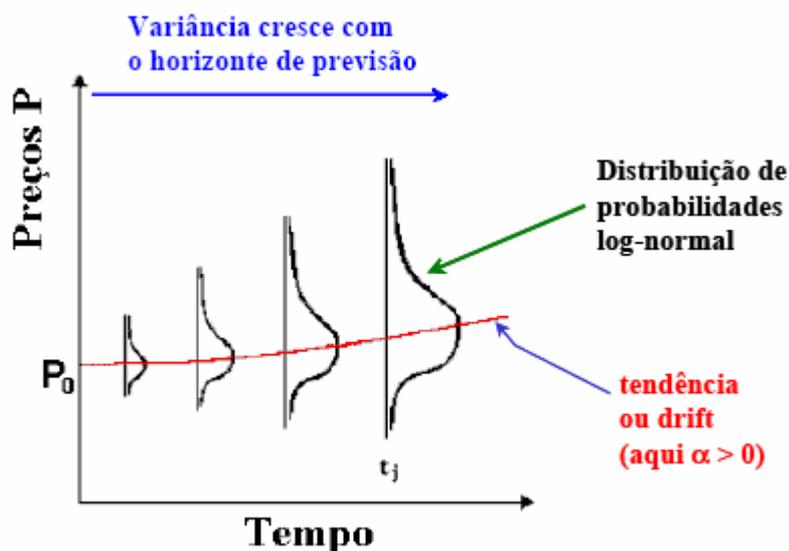


Figura 30 – Aumento da Variância conforme aumenta o tempo de previsão
Fonte: Notas de Aula; Prof. Marco Antonio Dias

O processo de Wiener é um processo estocástico em tempo contínuo. Este processo é caracterizado por ser um processo de Markov, em tempo contínuo, e pode ser utilizado para representar a dinâmica do valor de um projeto, preços de vendas de mercadorias e variáveis em geral, que se desenvolvem estocasticamente no tempo e que afetam a decisão de investir. Conforme DIXIT e PINDYCK (1994), este processo estocástico contínuo de Itô $x(t)$ também pode ser representado pela equação C.1. O processo de Itô é conhecido como Movimento Browniano Generalizado.

No MGB, os parâmetros *drift* e variância são dados por:

$$a(x,t) = \alpha x$$

$$b(x,t) = \sigma x$$

Substituindo estes valores na equação do processo de Ito, tem-se:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \alpha dt + \sigma dz \quad (\text{C.10})$$

Assim, o comportamento dinâmico de uma variável aleatória, cuja taxa de retorno contínua tem distribuição normal, pode ser descrito pelo MGB, conforme mostra a equação C.10. Contudo, para se manipular esta equação, é preciso um resultado importante de cálculo estocástico conhecido como Lema e Itô.

O processo do MGB tende a divergir para longe do seu ponto de partida original. Esta característica não costuma ser desejada para algumas variáveis como, por exemplo, o preço de commodities. É interessante ressaltar também que o MGB nunca assume valores negativos e, portanto, mais adequados para representar o movimento do preço de ativos financeiros.

Voltando ao caso de processos de Itô, sabe-se que eles são processos contínuos no tempo, mas que não são diferenciáveis pelas regras ordinárias de cálculo. Entretanto, isto seria essencial para a valoração de uma opção. Sendo assim, faz-se necessário utilizar-se o Lema de Itô, chamado também de Teorema Fundamental do Cálculo Estocástico.

Lema de Itô

O Lema de Itô pode ser entendido como uma versão da Expansão de Taylor para o cálculo estocástico. O Lema de Itô permite que sejam calculadas funções (ou transformações) processos de Itô. Assim, considerando-se ainda a função $F(x,t)$, que é diferenciável ao menos duas vezes em relação a x , e uma vez em relação a t , utilizando-se o Lema de Itô, esta derivada será:

$$dF = \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{dx^2} dx^2 + R(x)$$

Onde,

$$R(x) = \frac{1}{6} \frac{d^3 F}{dx^3} dx^3 + \frac{1}{2} \frac{d^4 F}{dx^4} dx^4 + \dots$$

Conhecido como Resto de Itô.

Convencionalmente adota-se $dt^n = 0$ para $n > 1$, $dz^2 = dt$ ²⁷

Além disso, sabendo que x segue processo de Itô - $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$:

$$dx^2 = a^2(x,t)dt^2 + a(x,t)b(x,t).dt^{3/2} + b^2(x,t)dt^2 = b^2(x,t)dt$$

$n > 2 \rightarrow dx^n = 0$, ou seja, os termos contidos no Resto de Itô "desaparecem" na fórmula.

Substituindo-se este resultado na equação C.10, tem-se o Lema de Itô:

$$dF = \left[\frac{dF}{dt} dt + a(x,t) \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2} b^2 \frac{d^2 F}{dx^2} dx^2 \right] dt + b(x,t) \frac{dF}{dx} dz$$

²⁷ $\text{var}[dz] = \text{Var}[\varepsilon_t \cdot \sqrt{dt}] = (\sqrt{dt})^2 \cdot \text{Var}[\varepsilon_t] = dt$

$\text{Var}(dz) = E[(dz - E[dz])^2] = E[dz^2] = dt$

$\text{Var}(dz^2) = 0 \rightarrow E[(dz^2 - E[dz^2])^2] = 0 \rightarrow dz^2 = E[dz^2] \therefore dz^2 = dt$