

5

Modelo KMV e DLI

5.1. Introdução

O mercado acionário pode ser visto como um grande precificador das empresas, onde informações da economia, setores e firmas viajam rapidamente para todos os agentes de mercado e as oscilações no preço das ações oferecem evidências confiáveis de alterações nos níveis de crédito da empresa.

O modelo KMV, atualmente um dos mais conhecidos e de maior uso comercial, utiliza o mercado acionário para avaliação do risco de crédito de uma empresa, foi desenvolvido pela empresa californiana KMV (Stephen Kealhofer, John McQuown e Oldrich Vasicek, fundadores, em 1989). Esse modelo mensura a probabilidade de *default* das empresas com base na teoria de precificação de opções segundo a abordagem de MERTON (1974).

A outra modelagem a ser vista neste capítulo é a DLI. Ela está baseada nas mesmas premissas do modelo KMV, mas se diferencia, principalmente, dentre alguns aspectos, na distribuição dos *defaults* para encontrar as probabilidades de inadimplência (*default*). No caso, a DLI utiliza a distribuição normal, enquanto a modelagem KMV utiliza uma distribuição empírica.

Os modelos KMV e DLI não utilizam dados estatísticos de agências de classificação (Moody's, S&P, Fitch e outros) para estimar a probabilidade de inadimplência de uma firma, mas o modelo extrai tais informações analisando a estrutura de capital da empresa, a volatilidade e o valor de mercado dos ativos.

A metodologia da KMV e DLI apresentam melhores resultados se utilizarem empresas com ações negociadas em mercado aberto (Bolsa de Valores), pois assim os valores esperados dos ativos são retirados diretamente do mercado acionário e não por informações de balanço. Lembra-se que, se retira do mercado acionário o valor do *equity* da empresa e sua volatilidade, na qual se faz inferências, para chegar ao valor esperado de mercado dos ativos.

5.2.

Premissas básicas para a modelagem

A principal premissa e base para modelagem KMV e DLI diz respeito à utilização irrestrita do mercado acionário como agente para precificar o risco de *default*. A partir dos valores de mercado do *equity*, e utilizando a formulação de MERTON (1974), é inferida a volatilidade de mercado dos ativos, valor de mercado dos ativos e conseqüentemente o risco de a empresa ficar inadimplente.

Confiando no mercado acionário para dar uma resposta em relação à probabilidade de *default* de uma empresa, é apostado que o mercado está refletindo, nos preços dos ativos, a informação disponível e que o preço de mercado é uma estimativa não-tendenciosa do valor real da empresa.

Isso se chama hipótese de eficiência dos mercados (HEM), a qual diz que os preços dos ativos nesses mercados refletem as informações disponíveis. A HEM implica que não é possível obter sistematicamente excesso de retorno (acima de R_f + o prêmio de risco) em um mercado eficiente, ou seja, os investidores só devem esperar receber os retornos normais. FAMA (1970) classificou a eficiência de mercado em três formas: fraca, semi-forte e forte.

Na forma fraca apenas é requerido que os preços atuais dos ativos incorporem a informação dos preços passados. Não se requer, por exemplo, que incorporem informações de balanços ou informações privadas. Como a série de preços passados é uma informação muito barata, então é de se supor que ao menos isso os investidores tenham. Daí o nome *fraco*. A forma fraca da HEM implica que a análise técnica ou gráfica é inútil para o investidor ganhar excesso de retorno na bolsa de valores.

Na equação 3.1, a forma fraca da HEM para um ativo de preço V :

$$V(t) = V(t-1) + \text{retorno esperado} + \text{erro aleatório}, \quad (3.1)$$

onde o retorno esperado é função do risco do ativo (e de r) e o erro aleatório de $t-1$ para t é independente do erro aleatório do passado. Sendo os desvios dos preços de mercado em relação aos valores reais aleatórios, isso confirma que nenhum grupo de investidores é capaz de constantemente encontrar ações sub ou supervalorizadas. Na equação também não entram os preços anteriores ao preço

corrente $V(t-1)$, ou seja, só depende do preço corrente (toda informação relevante está contida no valor corrente) e independe da trajetória dos preços passados. Tecnicamente, quando é utilizada a forma HEM fraca, assume que $V(t)$ segue um processo estocástico de *Markov*¹⁰.

As formas semi-forte e forte de HEM pressupõem mais que as ações não só incorporem as informações dos preços passados, mas toda informação pública disponível (semi-forte), ou então toda informação pública e privada disponível (forte).

Nas modelagens KMV e DLI, é necessária a forma mais fraca de eficiência para validar o modelo. Na verdade a teoria geral das opções está toda fundamentada na forma fraca, na qual as modelagens KMV e DLI se baseiam. No artigo de CROSBIE e BOHN (2003), é colocado que a modelagem KMV não assume eficiência forte do mercado acionário, ou seja, a KMV não assume que todas as informações relevantes estão refletidas nos preços correntes. Mas assume que é difícil obter sistematicamente retorno acima do mercado e utiliza os dados do mercado acionário somente com a intenção de se obter as informações que estão disponíveis no preço corrente. Assim a KMV se utiliza da HEM fraca.

Adicionalmente à hipótese de eficiência de mercado fraca, é importante completar as premissas do modelo que utiliza a teoria das opções, onde se assume que:

- I. Mercado é Completo (aproximadamente completo) – quando um derivativo pode ser artificialmente feito de instrumentos simples tais como o ativo sem risco e o ativo básico. Isso implica em um ambiente onde não há arbitragem. Também pode-se definir quando o número de ativos linearmente independentes é igual ao número de estados da natureza possíveis (realizações do mercado daqueles ativos). Uma outra

¹⁰ Este processo tem como característica principal o fato de que a única informação relevante exigida para que se possa prever o seu comportamento futuro é a informação do valor presente da variável, ou seja, acontecimentos passados não têm importância para previsão de valores futuros. Assumindo que os preços das ações sigam um processo *Markov*, ele estimaria fazendo previsões futuras dos preços das ações pelos preços disponíveis no presente, sem considerar flutuações ocorridas no passado. Portanto, de acordo com a propriedade de Markov, o valor atual de uma variável é unicamente responsável para estabelecer seus valores probabilísticos em qualquer tempo futuro. Ver ANEXO C para mais detalhes.

definição alternativa de mercado completo é advinda do teorema fundamental: é um mercado com uma única medida equivalente de Martingale (medida Q).

Não há nenhum custo de transação, taxas e problemas em divisibilidade dos ativos. Também existe um número suficiente de investidores com níveis de riqueza comparáveis que possam comprar ou vender quantos ativos desejarem ao preço de mercado.

- II. É possível tomar emprestado e emprestar a taxa de juro livre de risco em todo o instante de tempo; a estrutura a termo da taxa de juros é "*flat*" e é conhecida.
- III. As operações são todas em tempo contínuo.
- IV. Pelo teorema de Modigliani-Miller, diz-se que o valor da firma não varia com a sua estrutura de capital, ou seja, decisões de financiamento não importam em mercados eficientes.

Proposição I: Lei da conservação de valor. O valor de uma firma é determinado pelo lado esquerdo de seu balanço (seus ativos), não pelas proporções dos financiamentos em seu passivo.

Proposição II: A taxa esperada de retorno das ações de uma firma alavancada financeiramente aumenta na proporção da relação Dívida/Patrimônio a valores de mercado.

Observação: Ambiente onde Modigliani-Miller desenvolve suas proposições é:

- A. Ausência de impostos;
- B. Firms são classificadas por classe de risco operacional;
- C. Lucro líquido operacional = Dividendos (ou Dividendos + Juros; firma alavancada);
- D. Mercado de capitais perfeito;
- E. Sem custos de transações;
- F. Sem custos de falência; e
- G. Investidores são capazes de substituir alavancagem empresarial por alavancagem pessoal nas mesmas condições da firma.

Principais imperfeições que podem violar hipóteses de Modigliani-Miller:

- A. Custos de Insolvência;
- B. Impostos;
- C. Alavancagem pessoal não substitui alavancagem de firma; e
- D. Custos de monitoramento de contratos de dívida.

Em geral, basta a forma mais fraca de eficiência para valer os modelos DLI e KMV utilizados nesta dissertação.

5.3. Modelagem KMV Corporation

Segundo CAOUETTE, ALTMAN e NARAYANAN (1999), o conceito de que os métodos de precificação de opções podem ser usados para avaliar o risco de crédito pode parecer improvável à primeira vista, contudo, em uma análise detalhada, percebe-se que o patrimônio líquido apresenta o mesmo perfil de pagamento de uma opção de compra.

DAMODARAN (2002) observa que o patrimônio líquido de uma empresa representa um direito residual, isto é, os detentores do patrimônio líquido têm o direito sobre todos os fluxos de caixa remanescentes depois do pagamento dos outros detentores de direitos financeiros (funcionários, governos, dívidas, etc.). O mesmo princípio se aplica ao caso de liquidação da empresa, ficando os detentores do patrimônio líquido com o residual do pagamento de todas as dívidas.

A relação entre patrimônio líquido e opção existe porque os detentores desse patrimônio possuem a responsabilidade limitada ao capital colocado na operação da empresa. Um exemplo simples pode ajudar a visualizar o processo de responsabilidade limitada. Quando uma empresa capta recursos por meio de um empréstimo corporativo, ela adquire uma opção muito valiosa de *default* ou pagamento, isto é, se os projetos de investimento de uma empresa fracassarem (ou seja, valor dos ativos menores do que B), impedindo que pague o que deve ao banco, a empresa tem a opção de descumprir seus compromissos de pagamento de dívida, entregando os ativos remanescentes ao credor. Por causa da responsabilidade limitada dos acionistas, a perda da empresa é limitada, para

baixo, pelo valor do capital aplicado na empresa. Por outro lado, se os projetos forem bem sucedidos, a empresa ficará com a maior parte dos resultados positivos que sobram após o pagamento prometido de juros e principal do empréstimo.

A figura 1 ilustra claramente o resultado para um acionista de uma empresa alavancada. O risco de queda é limitado e há uma acentuada possibilidade de aumento.

Assim, pode-se concluir que, do ponto de vista da instituição financeira, a concessão de um empréstimo equivale a fazer um empréstimo livre de risco e lançar uma opção do tipo *put* sobre os ativos da empresa com o preço de exercício igual ao valor final da dívida.

A importância de se analisar a teoria de precificação utilizando opções é porque a modelagem KMV se utiliza desses fundamentos. O grande objetivo desta modelagem é encontrar o risco de crédito, ou seja, a probabilidade de uma empresa entrar em *default*.

O risco de *default* é a incerteza em volta de uma empresa de continuar pagando suas obrigações e dívidas, as quais são provocadas por problemas operacionais e/ou financeiros. Os riscos operacionais que podem iniciar um processo de inadimplência em uma empresa podem ser uma elevação do preço da matéria-prima, queda do preço de venda dos produtos e diminuição ou paralisação da venda dos produtos e/ou serviços. Os riscos financeiros ligados à inadimplência de uma empresa têm origem na elevação dos juros a serem pagos aos credores, benefícios fiscais que não se concretizam e outras situações do gênero.

Antecedendo um evento de *default*, não há maneira de se identificar entre empresas qual irá entrar em *default* e qual não irá. Na melhor das hipóteses, pode-se apenas fazer inferências probabilísticas sobre a possibilidade de *default*. Com isso, as firmas normalmente pagam um spread sobre a taxa livre de risco, que é proporcional a sua probabilidade de *default*, e também que compense os agentes pela incerteza sobre o pagamento das contas.

Default é um evento raro decepcionante. Uma empresa típica possui a probabilidade de *default* em torno de 2% a cada ano. Contudo, existem variações consideráveis entre as probabilidades de *default* entre as empresas. Por exemplo, a chance de falência de uma empresa com *rating* AAA é de 2 em 10.000 por ano, enquanto uma empresa com *rating* A possui 10 chances de falência em 10.000 por

ano. Mudando de AAA para A aumenta em cinco vezes a probabilidade de *default* das empresas. A classificação mais baixa é CCC, que possui uma média de *default* de 4 empresas em 100 (4%), ou seja, 200 vezes mais arriscado que empresas com *ratings* AAA.

Em caso de *default* de uma empresa, a perda dos credores e contrapartes são significantes e amplificados pela extensão e detalhamento dos contratos e obrigações envolvidos. Por exemplo, tipicamente a taxa de perda em um evento de *default* para títulos dívida *senior*, dívida subordinada e títulos com zero coupon (*bullets*) são 49%, 68% e 81%, respectivamente, conforme CROSBIE e BOHN, 2003.

A probabilidade de *default* é igual para todos os agentes, credores ou contraparte, contudo, em um evento de *default*, a perda vai variar para cada agente e/ou contraparte, principalmente se houver seguros, garantias, colateral, etc.

Existem três principais elementos que determinam a probabilidade de *default*:

- I. Valor dos Ativos (valor de mercado dos ativos da empresa) – Valor presente do fluxo de caixa livre produzido pelos ativos da empresa descontado pela taxa apropriada ao nível de risco dos ativos (WACC – *Weighted Average Cost of Capital*), ou seja, o modelo KMV assume que a melhor estimativa do valor dos ativos de uma empresa é o preço de suas ações no mercado. Para analisar o risco do negócio, é indispensável a análise retrospectiva e atual do desempenho financeiro da empresa para que se façam projeções adequadas dos fluxos livres de caixa.
- II. Risco dos Ativos (volatilidade ou risco do valor dos ativos) – Mede o risco inerente ao negócio e ao setor onde a empresa está situada. O valor dos ativos é apenas uma estimativa e por isso existe incerteza. Com isso, o valor dos ativos de uma empresa sempre deverá ser considerado sob a ótica do negócio (setor de atuação) da empresa, ou seja, sobre seu risco.
- III. Alavancagem (tamanho da dívida contratada pela empresa) – É usual utilizar o valor contábil das dívidas, já que este é o valor que a empresa deverá repagar ao credor.

A probabilidade de *default* de uma empresa aumenta quando o valor de mercado dos ativos atinge o valor contábil das dívidas, até o ponto em que, o valor dos ativos não for suficiente para pagá-las.

Em estudos, a KMV chegou à conclusão de que, em geral, as empresas não entram em *default* quando o valor dos seus ativos alcançam o valor contábil das dívidas. Claro que existem empresas que entram em *default* quando atingem essa marca, mas muitas empresas continuam suas atividades trocando e pagando serviços das suas dívidas. O longo prazo destas dívidas normalmente dá mais tempo para as firmas. De qualquer jeito, a KMV observou que o ponto de *default* geralmente se encontra entre o total das dívidas contratadas e devidas de curto prazo.

Oldrich Vasicek e Stephen Kealhofer estenderam a modelagem de BLACK e SCHOLES (1973) e MERTON (1974) para produzir um modelo de *default* chamando-o de *Vasicek-Kealhofer (VK) model*. Esse modelo assume que o valor do *equity* da empresa é uma opção perpétua com um ponto de *default* agindo como uma barreira absorvente para o valor dos ativos da empresa. Quando o valor dos ativos atinge o ponto de *default*, a empresa é considerada inadimplente, ou seja, a empresa entra em *default*. Múltiplas classes de dívidas e *equity* são modeladas: curto-prazo, longo-prazo, dívida conversível, ações preferenciais e ações comuns. Quando o valor dos ativos se torna muito grande, as dívidas conversíveis são chamadas para conversão e diluem, portanto, o *equity* existente. Adicionalmente, dividendos são explicitamente usados na modelagem VK. Uma base de dados extensa é utilizada para encontrar uma distribuição empírica, que relaciona a distância-para-*default* com a probabilidade de *default*.

A KMV implementou o modelo de VK para calcular a EDF (*Expected Default Frequency*). É uma medida de probabilidade de *default* com uma janela de um ano para frente, mas essa janela pode ser variada (esse modelo EDF pode ser modificado para avaliar empresa de capital fechado).

Existem essencialmente três passos para encontrar a probabilidade de *default* de uma empresa:

- 1) **Estimar o valor dos ativos e sua volatilidade;**
- 2) **Calcular a distância de *default*; e**
- 3) **Probabilidade de *default*.**

1) Estimar o valor dos ativos e a sua volatilidade:

A modelagem de VK (modelo usado pela KMV) utiliza a abordagem das opções para chegar ao valor de mercado dos ativos e volatilidade, extraindo informações do valor de mercado da empresa, volatilidade do *equity* e alguns valores contábeis. Esse processo é semelhante ao procedimento utilizado pelos analistas para determinação da volatilidade implícita de uma opção do preço corrente da opção.

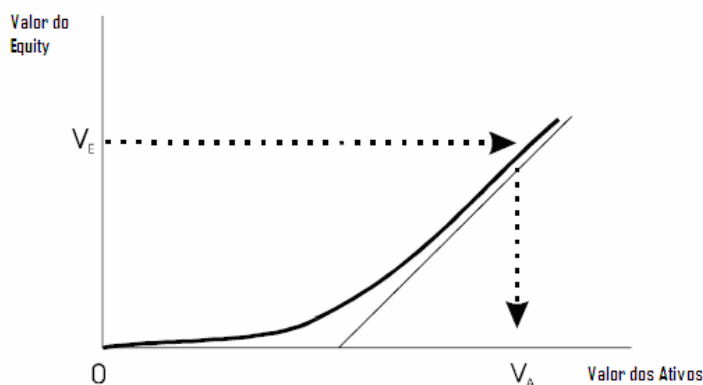


Figura 3 – Processo para extrair o valor e volatilidade dos ativos
Fonte: CROSBIE e BOHN (2003)

Na prática, a estrutura de capital de uma empresa é complexa, e para isso a modelagem VK considera diversas formas e natureza de dívidas (curto prazo, longo prazo, instrumentos conversíveis, dentre outros). Também leva em consideração a natureza de perpetuidade do *equity* e o valor do dinheiro no tempo.

2) Calcular a distância de *default*:

Pela abordagem KMV existem seis variáveis que determinam a probabilidade de *default*, sobre um horizonte de tempo até o ponto H.

1. Valor de mercado do ativo;
2. Distribuição dos valores dos ativos em H;
3. Volatilidade dos futuros valores dos ativos em H;
4. O ponto de *default* (valores contábeis da dívida);
5. A taxa de crescimento do valor dos ativos neste horizonte de tempo; e
6. Tamanho do horizonte H .

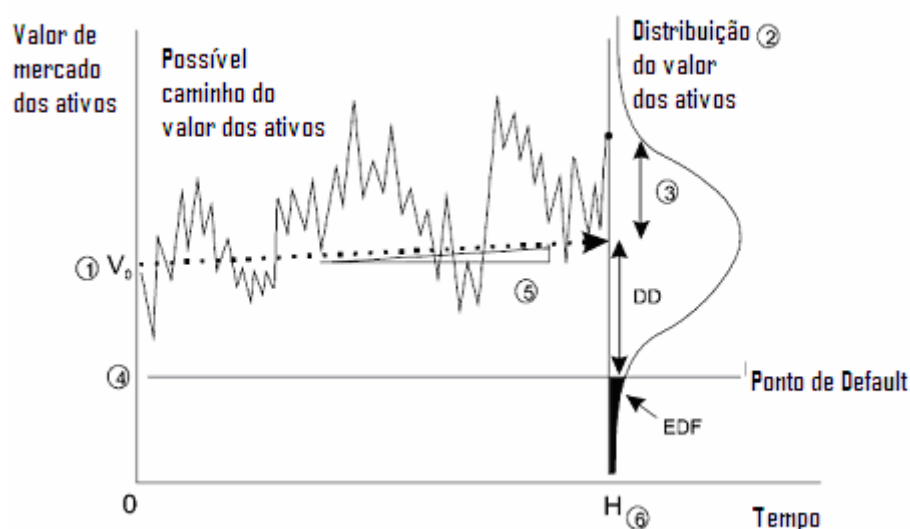


Figura 4- Fluxograma da modelagem KMV

Fonte: CROSBIE e BOHN (2003)

As primeiras quatro variáveis, valor dos ativos, distribuição futura dos ativos, volatilidade dos ativos e o nível do ponto de *default*, são as principais variáveis. A taxa de crescimento dos ativos possui pouco poder explicativo e analistas definem o tamanho do horizonte temporal sempre fixa em um ano.

A figura 4 mostra que a empresa entra em *default* quando os valores dos ativos caem abaixo do ponto de *default* (item 4). Essa área marcada em negrito é a região da EDF, ou melhor, a região da probabilidade de *default*.

Se a distribuição futura dos ativos fosse conhecida, a probabilidade de *default* (valor do EDF) seria simplesmente a probabilidade do valor final dos ativos que estivesse abaixo do ponto de *default* (item 4), dado que já se sabe a distribuição dos ativos. Contudo, na prática, a distribuição é muito difícil de se mensurar. Suposições de distribuição normal ou Log-normal não são recomendáveis pela visão da KMV (no processo DLI utiliza-se a distribuição normal diferente da idéia da VK). Para mensurar o risco de *default* corretamente, deve-se, também, ter cuidado na escolha do ponto de *default*. Conseqüentemente, a KMV primeiro mede a distância para o *default*, como sendo o número de desvios-padrão do valor dos ativos em relação ao ponto de *default*, e em seguida a KMV usa dados empíricos para determinar a

probabilidade de *default*. A distância para *default* é calculada pela seguinte formula:

$$[Distância_Default] = \frac{[Valor_mercado_ativos] - [ponto_default]}{[valor_mercado_ativos] \times [volatilidade_ativos]}$$

3) Probabilidade de *default*:

Para conseguir a relação entre a distância para *default* e a probabilidade de *default*, a KMV utiliza dados históricos de empresas que entraram em *defaults*. O banco de dados da KMV possui 250.000 anos/empresa com mais de 4.700 incidentes de *default* e inadimplência. Com esses dados foi montada a distribuição empírica que relaciona a probabilidade de *default* com as distâncias para *default*.

Por exemplo, assumindo o interesse em determinar a probabilidade de *default* (EDF) de uma empresa, para o próximo ano, deve-se verificar no histórico de *default* a proporção de empresas, que estão a sete desvios-padrão do ponto de *default* e que realmente vieram a entrar em *default*. A resposta é aproximadamente 5 b.p. (*base points*) ou 0,05% ou equivalente a um *rating* AA.

A KMV testou a relação entre a distância para *default* e a frequência de *default* entre setores, tamanho, tempo e outros efeitos. O resultado foi que a relação entre a distância para *default* e a frequência de *default* é constante às variáveis apresentadas. Não se pode concluir que não há diferenças de *default rates* entre os setores, tamanho, tempo e outros efeitos, mas se pode afirmar que essas diferenças são capturadas com grande sucesso pela distância para *default*. Estudos internacionais também corroboram tais relações.

No quadro 1, abaixo, serão expostas as principais variáveis para modelar o risco de *default* pela modelagem KMV e as ferramentas para encontrar tais variáveis.

Variável	Ferramenta utilizada para encontrar os resultados
Valor de mercado do <i>Equity</i>	(Preço da ação) x (Quant. de ações)
Valor Contábil das Dividas	Balanço Patrimonial
Valor de mercado dos ativos	Modelagem Opções
Volatilidade dos ativos	Modelagem Opções
Ponto de <i>Default</i> (B)	Valor Contábil
Distância para <i>Default</i>	$\frac{(\text{valor_mercado_ativo}) - (\text{default_point})}{(\text{valor_mercado_ativo}) \times (\text{volativo})}$
Probabilidade de <i>Default</i>	Utilizar curva empírica das probabilidades de <i>default</i>

Quadro 1 – As principais variáveis na modelagem do risco de crédito da KMV Corporation.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na prática, é importante usar uma modelagem mais geral, como a desenvolvida por VK.

5.4. Modelagem DLI

5.4.1. Introdução

Nesta seção será analisada extensivamente a modelagem DLI, com uma atenção especial, pois essa metodologia foi utilizada na parte prática da dissertação. A modelagem DLI se assemelha muito à modelagem KMV, e suas diferenças serão ressaltadas e explicadas a seguir.

VASSOLOU e XING (2004) também utilizam a abordagem DLI, inclusive a sigla DLI (*Default Likelihood Indicator*) foi descrita originalmente por eles. Neste mesmo alinhamento, GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) também utilizam a metodologia do DLI.

Equivalente à modelagem KMV, a DLI também utiliza a abordagem de MERTON (1974), na qual o valor do *equity* da empresa é visto como uma opção de compra sobre o valor dos ativos. Isso porque os acionistas só vão receber alguma parcela da empresa depois que todos os outros agentes envolvidos na empresa receberem. O ponto de exercício é um valor contábil das obrigações financeiras da empresa. Quando o valor dos ativos for menor que um determinado valor contábil destas obrigações, o valor do *equity* é zero.

A diferença básica entre as modelagens é que a KMV utiliza métodos mais complexos para obter as principais variáveis do modelo, e também possui algumas inovações adicionais, como:

- I. Incorporação de informações bayesianas para ajustes do tamanho da firma, indústria e país. DWYER (2006), em artigo, comenta sobre a validação destas informações. Na modelagem DLI não há incorporação de informações bayesianas.
- II. Na modelagem KMV há incorporação de estrutura de capital mais complexa, como já visto na seção 3.3, que são: ações conversíveis e ações preferenciais, dívida de curto prazo, bônus de subscrição, dívida de longo prazo e dívida conversível. Os dividendos também são explicitamente usados nessa modelagem. A modelagem KMV foi originalmente elaborada por VASICEK

(1984). Alguns anos depois, em conjunto com KEALHOFER, aperfeiçoaram a metodologia ficando, portanto, conhecida como *Vasicek-Kealhofer model* (VK model). A abordagem DLI utiliza somente *equity* e uma única estrutura de dívida.

- III. Na modelagem KMV utiliza-se uma distribuição empírica que relaciona a probabilidade de *default* e distâncias para *default*. Para encontrar essa distribuição empírica, a KMV utiliza dados históricos de empresas que realmente entraram em *default*. O banco de dados da KMV possui 250.000 anos/empresa (quantidade de empresas multiplicada pelos anos de informação) com mais de 4.700 incidentes de *default*.

Na abordagem DLI a distribuição que relaciona a probabilidade de *default* com a distância para *default* será a distribuição normal.

VASSALOU e XING (2004) utilizam a distribuição normal para encontrar a probabilidade de *default*, mas ressaltam que essa não é probabilidade real para grandes amostras. Eles também colocam que as probabilidades de *defaults* calculadas pela KMV são de fato as probabilidades de *default* reais já que utilizam a distribuição empírica dos *defaults*. Devido a isso, VASSALOU e XING (2004) não chamam sua medida de probabilidade de *default*, mas a chamam de DLI. Portanto nesta dissertação também será utilizado este termo.

Por outro lado, GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) argumentam que alguns pesquisadores acham inconsistente trabalhar com uma formulação para calcular probabilidades de *default* toda baseada no valor de mercado dos ativos, seguindo uma distribuição normal, e, no último momento, para calcular a probabilidade de *default*, a KMV se utiliza de uma distribuição que não é normal.

Esta dissertação não entrará na discussão sobre qual é a melhor distribuição a ser utilizada, mas como a distribuição da KMV é proprietária, será utilizada a distribuição normal, seguindo o mesmo procedimento que VASSALOU e XING (2004) e GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006).

- IV. A formulação de MERTON (1974) é *path-independent* (independe do caminho percorrido), porque o evento de *default* só ocorre se o valor dos

ativos for menor que um determinado valor somente na maturidade, ou seja, está-se modelando uma opção européia (exerce ou não somente no vencimento) onde a estrutura de dívida continua constante até a maturidade. O caminho que o valor dos ativos percorre antes da maturidade, ou seja, o *path* percorrido pelo valor dos ativos, não afeta a probabilidade de *default*. Essa aproximação não condiz com a realidade já que empresas constantemente estão alterando e renegociando suas dívidas para atingirem suas obrigações corporativas.

A modelagem da KMV é *path-dependent* (depende do caminho percorrido), ou seja, o caminho percorrido pelo valor dos ativos é levado em consideração. Muitos pesquisadores afirmam que essa metodologia é mais realista para modelar o *equity*. O modelo VK, da KMV, trata o *equity* como uma opção perpétua *down-and-out call* (DOC) do valor dos ativos da empresa. Com o DOC, o valor do *equity* é zero se o valor dos ativos for menor que um determinado ponto ótimo antes ou na maturidade da opção.

BROCKMAN e TURTLE (2003) argumentam que opções *path-dependent* para modelar *equities* e inferir probabilidades de *default* para empresas são melhores do que as opções *path-independent*, como a opção padrão utilizada na modelagem de MERTON (1974).

Mesmo sabendo desta limitação, VASSALOU e XING (2004), GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006), CHAN-LAU, JOBERT e KONG (2004) e outros, na literatura, utilizaram em seus trabalhos a abordagem de MERTON (1974).

GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) chegaram a uma conclusão interessante, pois além de modelarem utilizando a abordagem de MERTON (1974) também utilizaram a abordagem pela opção de barreira. Concluíram que as duas abordagens são excelentes para classificar empresas por probabilidade de *default*, e que o desempenho destas duas abordagens foi muito parecido e de difícil distinção.

Com isso, na parte prática desta dissertação, para modelar DLI será seguida a abordagem tradicional de MERTON (1974) para encontrar a probabilidade de *default*.

5.4.2. Desenvolvimento da Modelagem DLI

O modelo de MERTON (1974) foi o gênesis para o entendimento da relação entre o valor de mercado dos ativos e o valor de mercado do *equity*. Com essa modelagem, juntamente com a abordagem das opções conforme BLACK e SCHOLES (1973) extraem-se as variáveis V_A e σ_A , dado que se tenham as variáveis: valor de mercado do equity (V_E), volatilidade do equity (σ_E), tempo (t), taxa livre de risco (r) e o ponto de *default* (B). Em seguida, calcula-se a Distância para *Default* (D.D.), que dado uma distribuição de *default*, leva à probabilidade de uma empresa entrar em *default* com condições pré-estabelecidas de tempo e ponto de *default*.

Pela KMV, a modelagem de BLACK e SCHOLES (1973) é muito restritiva para utilizá-la na prática, contudo é altamente didática e possui resultados satisfatórios, conforme GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) encontraram no mercado australiano.

Basicamente, o modelo de MERTON (1974) considera que a empresa possui uma estrutura de capital composta de uma única dívida (não paga cupons) e *equity* sem dividendos. Ela considera que os ativos seguem um MGB (Movimento Geométrico Browniano), parametrizados por um *drift* e volatilidade. A dívida nesta modelagem é encarada como *bullet* (pagamento de juros e principal em um ponto específico do tempo). Com isso, pode-se obter para o valor do *equity* uma expressão analítica construindo um portfólio livre de risco, e resolver a EDP resultante utilizando duas condições de contorno, que é o valor da opção na expiração e valor da opção quando os ativos se tornam totalmente depreciados. Neste caso, a solução é utilizar a equação de BSM.

Portanto, será explorada a modelagem das opções para encontrar o valor de mercado dos ativos e sua volatilidade através das informações fornecidas pelo mercado com base no valor do seu *equity*. No caso, para encontrar tais variáveis (V_A e σ_A), será utilizada a modelagem das opções na ordem inversa do convencional, ou seja, a partir do preço da opção (valor de mercado do *equity*) e da sua volatilidade (volatilidade do *equity*) será encontrado o valor implícito dos ativos (V_A) e sua volatilidade (σ_A).

O objetivo desta seção é obter a probabilidade de *default* utilizando a modelagem DLI, ou seja, utilizando a base conceitual de MERTON (1974). Para isso, será dividida em três etapas:

- 1) Apresentação da relação entre volatilidade do *equity* e volatilidade dos ativos.
- 2) Apresentação da relação para encontrar a Distância para *Default* (DD).
- 3) Encontrar a Probabilidade de *Default*

1) Apresentação da relação entre volatilidade dos ativos e volatilidade do *equity*.

Assumindo que o valor de mercado dos ativos segue o processo estocástico MGB – Movimento Geométrico Browniano¹¹:

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dz \quad (3.2)$$

Onde,

V_A , dV_A – valor dos ativos e variação do valor dos ativos, respectivamente

μ , σ_A – *drift* do valor dos ativos e a volatilidade dos ativos

dz – incremento do processo de *wiener*

Nesta modelagem, a estrutura de capital de uma empresa é dividida em duas formas simples, que são: dívida e patrimônio (*equity*). Se B for o ponto de exercício da opção e o seu vencimento é em T, pela formulação de BLACK e

¹¹ Conceituação e desenvolvimento do Movimento Geométrico Browniano, verificar ANEXO C

SCHOLES^{12 13} (1973) para uma opção de compra, o valor de mercado do *equity* e o valor de mercado dos ativos estão relacionados da seguinte forma:

$$V_E = V_A \cdot N(d1) - B \cdot e^{-rT} N(d2) \quad (3.3)$$

Sendo d1 e d2,

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{V_A}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}} \quad (3.4)$$

$$d2 = d1 - \sigma_A \sqrt{T} \quad (3.5)$$

V_E – Valor de mercado do *equity* (capital próprio) da empresa

r – taxa livre de risco

V_A – Valor de mercado de seus ativos (*assets*)

T - tempo de maturação

σ_A – volatilidade do valor de mercado de seus ativos

B – ponto de exercício para a empresa entrar em *default* (obrigações de curto prazo mais a metade do valor contábil da dívida de longo prazo em circulação,

¹² A formulação clássica BLACK e SCHOLE (1973) é a solução de uma equação diferencial parcial (EDP). Para se chegar à EDP pelo método clássico "*contingent claims*" a relação F (valor da opção) e V (valor do ativo base) é dada por um portfólio livre de risco: $\Phi = F - nV$

1) Compra-se uma opção de investimento, ou seja, F .

2) Vende-se n unidades do ativo básico V , sendo n (conhecido por *delta hedge*) escolhido de forma a tornar o portfólio sem risco ($n = F_V$).

Após montam-se as equações de retorno desses portfólio no tempo dt . Por ser livre de risco, o retorno exigido é a taxa livre de risco r .

Usa-se, então, o lemma de Itô para expandir dF em relação a V e t . Usa-se também a equação do processo estocástico de V para (dV^2) .

Calculando chega-se à EDP do derivativo $F(V, t)$ com c.c. $V=0, F(0,t)=0$ (premissas para não deixar ficar negativo) e $t=T, F(V,T)=\max(V-I, 0)$

Resolvendo essa EDP encontra-se a formulação de BLACK e SCHOLE (1973).

¹³ Para conceituação e mais detalhes verificar BLACK e SCHOLE (1973).

segundo a KMV, VASSOLOU e XING (2004) e GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006)).

VASSALOU e XING (2004), GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) utilizaram um processo iterativo para encontrar o valor de σ_A . Primeiro, utilizaram as informações diárias dos últimos 12 meses para os retornos do *equity*, e extraíram σ_E , para usá-lo como aproximação inicial do σ_A . Usando a fórmula de BSM, para cada dia dos últimos 12 meses, foi calculado o V_A diário utilizando o V_E diário. Com isso, obtêm-se valores diários de V_A . Em seguida será computado o desvio padrão desta série de V_A 's diários, e este desvio será utilizado como nova aproximação para a próxima interação. Esse procedimento foi repetido até convergirem dois resultados consecutivos. A tolerância para conversão é de $10E-4$. Foi colocado ainda que, para a maioria das vezes, é preciso apenas algumas interações para que σ_A convirja. Com σ_A convergido, utilizar novamente a formulação de B&S para extrair V_A .

Esse processo foi repetido no final de cada mês, resultando em estimativas mensais de σ_A . Para toda a avaliação utilizaram como taxa livre de risco o *T-bill* de 1 ano, observado no final de cada mês. No caso, se for utilizada essa metodologia para avaliar empresas brasileiras, será necessário incorporar o risco país na taxa livre de risco (*T-bill*) americana.

Uma vez que os valores diários de V_A foram obtidos, é calculado o *drift* μ , como sendo a média das variações do $\ln V_A$. Lembra-se que o *drift* μ será incorporado na modelagem somente na equação 3.10 (Distância para *Default*), a ser visto mais adiante.

Antes de explicar outra forma de interação, para encontrar os valores de V_A e σ_A , será explicada a razão de o espaço temporal ser de um ano para as modelagens:

- I. Um período maior é difícil de justificar, pois existem inúmeras incertezas que atingem a probabilidade de *default* da empresa, por exemplo, configuração de mercado, mudança estrutural na empresa, etc. Adicionalmente o modelo estrutural DLI está baseado em que os ativos seguem um MGB, e como apresentado no ANEXO C, a incerteza vai aumentando conforme o tempo aumenta.

- II. O período de um ano representa um equilíbrio razoável entre o peso colocado na alavancagem financeira, a volatilidade dos ativos e a taxa de crescimento dos ativos, na construção da equação da probabilidade de *default* (PD - utilizando MERTON, 1974). Adiante o desenvolvimento da formulação da PD mostrará com mais clareza essas variáveis preponderantes.
- III. Para o cálculo da PD, se o tempo for curto, o peso da alavancagem financeira será grande. Enquanto que se utilizar um tempo grande estará dando mais ênfase na volatilidade dos ativos e na taxa de crescimento desses ativos.
- IV. Basle II ¹⁴ recomenda a utilização de 12 meses.
- V. Autores como VASSALOU e XING (2004), GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006), CHAN-LAU, JOBERT e KONG (2004) utilizaram um período de um ano.

Outra forma de encontrar os valores de V_A e σ_A , utilizada na parte prática desta dissertação, é trabalhar com algoritmo de Newton Raphson. Esse método é indicado por HULL (2002) em seu livro, no capítulo 26. Seguem os passos:

- I. A principal fórmula neste processo é a relação entre σ_A e σ_E :

$$\sigma_E = \left(\frac{V_A}{V_E} \right) \frac{\partial V_E}{\partial V_A} \sigma_A \quad ^{15} \quad (3.6)$$

¹⁴ Basel II é um documento formalmente conhecido como *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*, publicado pela *Basel Committee on Banking Supervision of the Bank for International Settlements* (2004).

¹⁵ A demonstração da equação 3.6 encontra-se no ANEXO A

No modelo de BLACK & SCHOLES (1973), pode ser mostrado que

$\frac{\partial V_E}{\partial V_A} = N(d_1)$, então, pelo modelo de MERTON (1974), a relação das volatilidades dos *assets* com o *equity* é:

$$\sigma_E = \left(\frac{V_A}{V_E} \right) N(d_1) \sigma_A \quad (3.7)$$

II. O próximo passo é interagir as equações 3.4 e 3.5 na equação 3.3, resultando:

$$V_A N \left(\frac{\ln \left(\frac{V_A}{B} \right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right) - B e^{-rT} N \left(\frac{\ln \left(\frac{V_A}{B} \right) + \left(r - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right) - V_E = 0 \quad (3.8)$$

III. Em seguida, interagir as equações 3.4 em 3.7:

$$\sigma_E V_E - \sigma_A V_A N \left(\frac{\ln \left(\frac{V_A}{B} \right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right) = 0 \quad (3.9)$$

As equações 3.8 e 3.9 possuem variáveis V_A e σ_A que são incógnitas, enquanto as variáveis V_E , σ_E , r , B e T são conhecidas¹⁶.

¹⁶ Importante lembrar que r é a taxa livre de risco, e como *proxy* é usual utilizar a remuneração do título de renda fixa norte-americano *t-bill*. T é o tempo para maturação, conforme explicado acima, de um ano. σ_E é a volatilidade dos retornos contínuos do *equity* (US\$), utilizando uma janela diária dos 12 meses passados. Com isso, encontra-se a volatilidade anualizada após se multiplica por $(252)^{1/2}$. B é o ponto de exercício, no qual se utiliza dívida de curto prazo + $\frac{1}{2}$ dívida de longo prazo (Fonte: KMV Corporation).

Portanto, o resultado é um sistema não linear, com duas incógnitas (V_A e σ_A) e duas equações (3.8 e 3.9). Este sistema pode ser resolvido pela metodologia de Newton Raphson.

Conforme HULL (2002) sugere em seu livro, serão resolvidas estas duas equações não lineares no Excel®, minimizando a seguinte função:

$$\text{Equação 3.8} = F(V_A, \sigma_A) = F(x,y) = 0$$

$$\text{Equação 3.9} = G(V_A, \sigma_A) = G(x,y) = 0$$

$$\text{Minimizar } [F(x,y)]^2 + [G(x,y)]^2$$

Foram explicados dois métodos para calcular duas incógnitas que são V_A e σ_A . O próximo passo é explicar como chegar à distância de *default*. Antes, é importante explicar com mais detalhes o ponto de exercício (B).

O ponto de exercício ou ponto de *default* de uma empresa (B) é uma barreira muito difícil de quantificar. Atualmente a KMV utiliza como ponto de *default* toda a dívida de curto prazo mais a metade da dívida de longo prazo (CROSBIE e BOHN 2003). Esse ponto também é utilizado por diversos autores e pesquisadores que sabendo da dificuldade de se estimar tal barreira, baseiam-se na barreira da KMV para prosseguirem seus estudos sobre risco.

DAVYDENKO (2005) encontrou um ponto de *default médio*, ou seja, quando o valor de mercado dos ativos atingir 72% do valor de face de suas dívidas em média, essa empresa irá à *default*. Com tudo, cerca de um terço dos *defaults* ocorreu acima desta relação, enquanto um número igual de empresas evita *default* por pelo menos um ano. Mesmo calibrando o ponto de *default* em 72%, há de se ficar atento à falta de precisão na avaliação *cross-section*.

HUANG e HUANG (2003) encontraram um valor de 60% do valor de face das dívidas, enquanto LELAND (2004) encontrou 73%. A KMV, como visto anteriormente, utiliza dívida de curto prazo mais 50% da dívida de longo prazo (utilizando dados contábeis). ,Esse modelo é proprietário e não se conhecem as razões da escolha destes números.

Deve-se observar como flexibilidade da modelagem, que o usuário ou analista pode inserir qualquer valor de B que julgar economicamente apropriado.

Esse ponto de exercício é fonte para diversas discussões. E, para apimentar as discussões, nos últimos anos têm surgido modelos baseados em que tais

barreiras de *default* não são fixas, ou seja, são barreiras variáveis e que dependem de situações de risco exógenas específicas. Na literatura chamam essa abordagem de modelos baseados em intensidade. Essa teoria está baseada em que o *default* segue uma distribuição de Poisson, e ele surge contingente ao aparecimento de algum perigo específico.¹⁷

2) Apresentação da relação para encontrar a distância para *default*.

Após apresentar duas formas de interações para encontrar as variáveis V_A e σ_A , e comentar pontos importantes sobre as variáveis envolvidas, será apresentado o próximo passo: Distância para *Default* (D.D.)

Com todas as informações (V_A , σ_A , B , r , T e μ) necessárias, pode-se encontrar a Distância para *Default* (D.D.). A fórmula universal para calcular a distância para *default* na modelagem DLI é dada abaixo:

$$D.D.^{18} = \frac{\ln\left(\frac{V_{A,t}}{B_t}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma_A \sqrt{\Delta t}} \quad (3.10)$$

A distância para *default* consiste no número de desvios-padrão que $\ln(V_{A,t}/B_t)$ tem que desviar negativamente da sua média para caracterizar o *default*. Assim, quanto menor esse valor, mais próxima do *default* a empresa estará e, conseqüentemente, maior será o seu risco de *default*.

Na modelagem DLI, que utiliza a metodologia de MERTON (1974), é comum trabalhar com o *drift* igual a zero ($\mu = 0$). Na parte prática desta dissertação, todas as simulações consideram a variável *drift* como sendo zero.

¹⁷ Ver DUFEE e SINGLETON (1999), JARROW e TURNBULL (1995) e JARROW, LANDO e TURNBULL (1997)

¹⁸ A demonstração da equação 3.10 encontra-se no ANEXO B

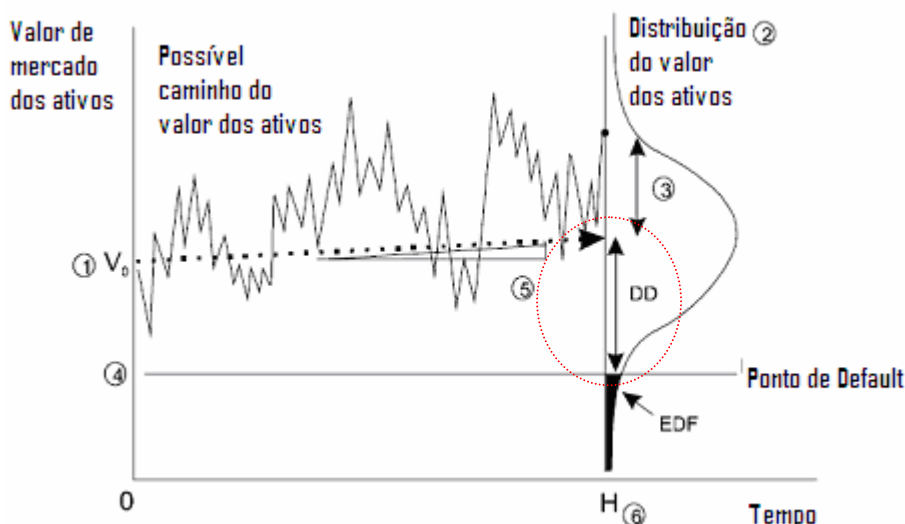


Figura 5 – Distância para *Default*
Fonte: CROSBIE e BOHN (2003)

Pode-se visualizar na figura 5 a distância para *default* (DD).

3) Encontrar a Probabilidade de *Default*

Com a informação da Distância para *Default* (DD), utiliza-se, na modelagem DLI, uma distribuição normal para encontrar a probabilidade de *default*.

Utiliza-se a distribuição normal por diversas razões a serem expostas:

- I. Coerência com a modelagem básica, por trás da Distância para *Default* (D.D.), de MERTON (1974), além da coerência com a modelagem de BLACK e SCHOLES (1973), que assume normalidade dos retornos e lognormalidade para os preços.
- II. A KMV encontrou empiricamente a distribuição de *defaults*, utilizando dados reais. A distribuição encontrada é proprietária e acessível apenas nas modelagens quando utilizados programas específicos da KMV. Devido a esse fato complicador, a distribuição normal se torna uma boa aproximação.
- III. VASSALOU e XING (2004), GHARGHORI, CHAN e FAFF (2006) utilizaram a distribuição normal e a metodologia de MERTON (1974).