4
Modelo de Equilíbrio Geral e Opções

4.1.
Introdução

Para melhor compreender a teoria utilizada para encontrar a probabilidade de *default* de uma empresa, é importante conhecer as bases conceituais do modelo apresentado por MERTON, em 1974, que está todo baseado na teoria das opções.

4.2.
Derivativos

Derivativo é um contrato definido entre duas partes no qual se definem pagamentos futuros baseados no comportamento dos preços de um ativo de mercado. Pode-se resumir dizendo que um derivativo é um contrato cujo valor deriva de um outro ativo. O que se denomina por derivativo pode ser negociado em uma série de mercados, quais sejam:

I. Mercado A Termo;
II. Mercado Futuro;
III. Mercado de Opções.

Os mercados futuros e de opções são extremamente importantes no mercado financeiro. Utilizados por hedgers, especuladores e arbitradores, a sua formação de preços deriva de mercadorias e de ativos financeiros. Foram desenvolvidos para atender a produtores e comerciantes expostos a riscos de preços, nos períodos de escassez e superprodução do produto negociado, reduzindo o risco de flutuação dos preços futuros da mercadoria.

No início do desenvolvimento dos mercados financeiros, os derivativos foram criados como forma de proteger os agentes econômicos contra os riscos das oscilações de preços. Estes ativos recebem esta denominação porque seus preços dependem do valor de outro ativo, denominado ativo-objeto.

A idéia básica dos agentes econômicos, ao operar com derivativos, é obter um ganho financeiro nas operações de forma a compensar uma perda em outras atividades econômicas. Desvalorização cambial e variações bruscas nas taxas de juros são exemplos de situações que já ocorreram na economia, cujos prejuízos foram reduzidos ou até se transformaram em ganhos para os agentes econômicos que protegeram os seus investimentos realizando operações com derivativos.

Entre os derivativos mais populares encontram-se as opções e, sobre estas, existem diversos modelos teóricos de valorização. Dentre estes modelos, um dos mais difundidos é o Modelo de BLACK e SCHOLES (1973), cuja formulação será utilizada exaustivamente nesta dissertação.

4.3. Conceito de opção:

O conceito de opção nasce como um direito negociável de compra ou venda de um ativo a um preço futuro predeterminado. Nasce, porque, apesar de esta ser a definição correta e a essência dos contratos de opções mais simples, é cada vez menos útil definir assim a gama de produtos gerados a partir desta base.

O fato de ser um direito implica que a parte titular possui uma escolha possível – exercer ou não exercer o direito. Contudo, não há praticamente nenhum tipo de opção em que, dada uma situação e assumida a racionalidade do titular, o resultado da escolha não seja conhecido. Isto é, assumindo-se que o titular é um agente racional que prefere mais dinheiro a menos dinheiro, na verdade não há escolha alguma sobre o exercício, e a opção deixa de representar uma escolha para representar um perfil de fluxo de caixa a ser atribuído ao titular em alguma data futura. Este perfil é sempre, pelo menos, uma função de um preço S em uma data qualquer. Pode ser função de outras coisas (como, de modo mais simples, de vários preços, S1, S2 etc. combinados da maneira que se queira), mas sempre guarda uma relação especial para com um preço, do qual o produto é derivativo. Esse perfil é chamado função *payoff* ou simplesmente *payoff* da opção.

As funções *payoff* que foram comentadas acima são as funções *payoff* de opções vanilla eurupérias[6]. A forma matemática dessas funções é:

$$C^* = \max [\ 0, V^* - B]$$
$$P^* = \max [\ 0, B - V^*],$$

sendo C* e P* os valores de exercício de uma *call* e uma *put* (iguais ao valor da opção na data de exercício), B o preço de exercício da opção, V* o preço do ativo na data de exercício.

O prêmio pelo qual uma opção é negociada reflete as expectativas sobre seu valor de exercício. Na data de exercício, o preço de uma opção é exatamente igual a seu valor de exercício, sendo indiferente exercê-la ou vendê-la. Isto significa que toda informação acerca do exercício de uma opção está contida em seu prêmio, e que o prêmio sempre converge para o valor de exercício, na data de exercício.

Refletir as expectativas significa dizer que uma opção deveria negociar hoje ao valor presente de seu valor de exercício esperado. Para se calcular o valor de exercício esperado, deve-se projetar V para a data de exercício de alguma forma. Esta projeção é feita utilizando-se as taxas de juros de mercado.

Pode-se questionar se a projeção via taxas de juro é uma boa estimativa; afinal, nenhum ativo real é obrigado a corrigir via taxas de juros. Pode-se argumentar que melhor estimativa seria projetar V pelo mesmo valor que ele apresenta hoje, ou no máximo acrescentar a ele a inflação. Acontece que a projeção por juros não parte da premissa de que todos os ativos devam acompanhar os juros, mas de uma outra sutilmente diferente: a de que o valor médio visualizado pelo mercado para um ativo em data futura coincida com seu valor futuro. Isto é, o mercado, como um todo, visualizaria o ativo no futuro como sendo o seu preço à vista carregado aos juros correntes. Se o mercado visualizasse o preço V acima de seu valor futuro, sem dúvida promoveria uma pressão compradora que acabaria elevando V e corrigindo a diferença; se visualizasse

[6] Uma opção européia é aquela que contratualmente só permite o exercício na data de vencimento.

abaixo, promoveria uma pressão vendedora. Em ambos os casos, o valor de V que hoje equilibra as expectativas teria a propriedade de, carregado a juros, coincidir com o preço esperado pelo mercado para a data futura.

Um mercado onde especuladores tenham essas expectativas é dito neutro ao risco, ou *risk-neutral*. Em um mercado neutro ao risco, é fácil justificar a projeção para o futuro pela taxa de juros livre de risco. O fato é que é difícil comprovar o comportamento *risk-neutral* no mercado real. No entanto, um axioma diz que a suposição de um mundo *risk-neutral* não é necessária para a precificação de futuros e opções: mesmo em um mundo não *risk-neutral*, derivativos têm preços iguais aos que seriam a eles atribuídos em um mundo *risk-neutral*, e isto se dá pela impossibilidade de haver arbitragem[7].

Sabe-se, até o momento, que o preço de uma opção é que ele deve ser o valor presente da expectativa de valor de exercício em um mundo neutro ao risco. Este valor de exercício é obtido carregando-se V aos juros r, pelo prazo t, e achando-se a diferença sobre B. Se esta diferença for favorável ao exercício, este é o valor de exercício da opção; senão, seu valor de exercício é zero. Uma *call* vale o maior entre zero e V* - B; uma *put* vale o maior entre zero e B – V*. Em ambos os casos, uma vez que o prêmio da opção é uma quantidade de dinheiro à vista, traz-se o valor de exercício a valor presente para se ter a primeira aproximação do preço de uma opção:

$$C_I = VP\,[\max(0, VF(V) - B)] = \max[\,0, V - VP(B)]$$
$$P_I = VP\,[\,\max(0, B - VF(V))] = \max[\,0, VP(B) - V]$$

Estas são as expressões para o valor intrínseco das opções. O valor intrínseco de uma opção é a porção de seu preço que se deve à vantagem real que V, em relação a B, proporciona. O valor intrínseco de uma opção pode ser zero em qualquer tempo, ainda que seu prêmio nunca o seja antes do vencimento.

Existem dois tipos básicos de opções: primeiro são as opções de compra (*call*) e segundo são as opções de venda (*put*).

[7] Uma arbitragem é uma operação de ganho sem risco.

Esses dois tipos de opções podem ser subdivididos em quatro posições:

I. Comprada numa opção de compra (titular da opção) – tem o direito de comprar os ativos subjacentes por um preço pré-determinado em uma data futura, também pré-determindada.
II. Comprada numa opção de venda (titular da opção) – tem o direito de vender os ativos subjacentes por um preço pré-determinado em uma data futura, também pré-determinada.
III. Vendida numa opção de compra – os vendedores são obrigados a vender esses ativos aos titulares quando for solicitado por estes.
IV. Vendida numa opção de venda – os vendedores são obrigados a comprar esses ativos dos titulares quando for solicitado por estes.

Abaixo, estão representados os *payoff*s das opções do tipo *CALL* e *PUT*, conforme explicado acima:

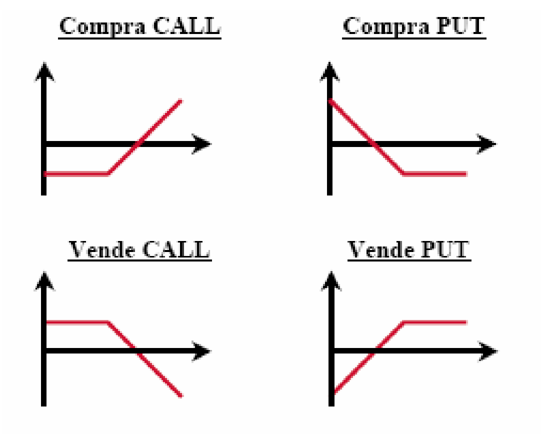

Figura 29 – Tipos de Opções
Fonte: CHAIA (2003)

No início da década de 1970, Fischer Black e Myron Scholes formularam matematicamente uma maneira de precificar as opções, basicamente as européias. Tal fórmula foi fundamental no campo das finanças, sendo responsável por uma considerável evolução em termos de precificação de ativos.

BLACK e SCHOLES (1973) abordaram o problema do preço das opções a partir da ótica de que, sendo uma opção um derivativo de V, ela deve servir para o propósito de *hegde*, e que, se há uma forma de implementar sistematicamente *hedge* com opções, o preço atribuído a elas para esta finalidade é o seu preço justo. Por trás desta colocação está um argumento de arbitragem: o preço justo da opção é aquele que permite a entrada em uma posição *hedgeada*, isto é, uma posição sem riscos, de forma que o resultado ao longo do tempo seja sempre zero. Se o preço de mercado de uma opção difere deste, é possível a um operador tomar uma posição *hedgeada* – sem riscos - e com resultado diferente de zero (o operador tomará a posição de forma a produzir o resultado positivo para ele). Em um mundo em que os agentes preferem os ganhos sem risco a quaisquer tipos de aposta, um enorme volume de operações deste tipo responderia imediatamente a qualquer distorção entre o preço de mercado das opções e seu preço justo, e a conseqüência disso é que tal distorção sequer chegaria a se verificar.

Para desenvolver o seu modelo e aplicar a sua fórmula, BLACK e SCHOLES (1973) partiram de algumas hipóteses:

I. Comportamento do preço dos ativos corresponde ao modelo lognormal;
II. Não há custos operacionais[8];
III. O ativo objeto não paga dividendos ou qualquer outro rendimento durante a vida da opção[9];
IV. Não há oportunidade de arbitragem sem risco, pois tal condição permite que o preço do modelo seja aquele em vigor no mercado;
V. A negociação com títulos é contínua e estes são perfeitamente divisíveis;
VI. Os investidores podem captar ou emprestar a taxa de juros livre de risco. Isso permite que se faça a operação de arbitragem onde a carteira equivalente contém uma posição vendida no ativo objeto, permitindo assim a compra da opção quando ela for considerada barata;
VII. A taxa de juros de curto prazo é a livre de risco e a volatilidade do ativo objeto é constante. Assim, a única fonte de risco da opção é o

---

[8] A adição de qualquer custo operacional (custos de transação, impostos, margens e outros) altera a operação de arbitragem levando a um intervalo de preço para opção.

[9] Caso venha a render, a fórmula deve ser ajustada, conforme mostra MERTON (1973)

ativo objeto, que é eliminada pelo próprio ativo quando a carteira equivalente for montada.

Além disso, a fórmula de Black & Scholes depende de seis parâmetros de mercado:

• Preço do ativo básico (V);

• Preço de exercício da opção (B);

• Volatilidade do ativo básico (desvio padrão da taxa de retorno do ativo básico, isto é, de dV/V (σ);

• Período a que se refere o preço da opção (t);

• Vencimento da opção (T);

• A taxa de juros livre de risco (r);

• A taxa de distribuição de dividendos do ativo básico (δ) .

As fórmulas de precificação de BLACK e SCHOLES (1973) para os preços de opções de compra européias de ações sem dividendos são:

$$C = V.\ N(d1) - B\ .e^{-r(T-t)}\ N(d2)$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{V}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Alimentando-se a equação diferencial de Black & Scholes com a condição inicial de uma *put*, a qual é P (V*, 0) = *max* [0, B – V*], chega-se à formula analítica do preço de uma *put* européia. Uma maneira alternativa e mais simples de obtê-lo é substituir a fórmula do preço da *call* na da paridade *put-call*. De qualquer forma, obtém-se:

$$P = B\ .e\text{-}r(T\text{-}t)\ N(-d2) - V\ .\ N(-d1)$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{V}{B}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \qquad d2 = d1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

A função N(X), por sua vez, representa a função de probabilidade acumulada de uma variável normal padronizada. O papel da volatilidade, que representa a incerteza do retorno do preço da ação, é de extrema importância, pois é o mais complexo de todos os parâmetros descritos, justamente por não ser observável necessitando de modelos para quantificá-los.

Se a volatilidade e a taxa de juros apresentarem a mesma periodicidade, o número (T – t) corresponde à fração do ano até o exercício da opção, sendo t o momento presente e T o prazo de expiração, conforme explicitado acima.

Alternativamente, COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979) desenvolveram um modelo que converge para a solução de BLACK e SCHOLES. Para isto, eles mostraram que a equação do MGB poderia ser obtida como um limite contínuo de um caminho aleatório em tempo discreto. O objetivo central do método binomial usado por eles era discretizar o processo de neutralidade ao risco representado pela EDP de Black & Scholes e usar o modelo de programação dinâmica para achar o preço da opção. No artigo original de COX, ROSS e RUBINSTEIN, o modelo binomial é caracterizado pelos seguintes parâmetros: $u = e^{\sigma \Delta t}$, $u = 1/d$, $\Delta t = T / n$, onde n corresponde ao número de passos da árvore entre os instantes inicial e final (T). Estabelecidos os parâmetros, a árvore binomial converge para o MGB à medida que n tende a infinito.

Até o momento, foram comentados apenas as opções européias, ou seja, são opções que podem ser completamente definidas em termos das funções *payoff* na data de vencimento. Contudo, há opções das quais o *payoff* não pode ser definido a priori, pois depende do que acontece durante o período até o vencimento.

Os dois exemplos (asiáticas e barreira) a serem analisados, a seguir, são classificados como opções *path-dependent*. As opções *path-dependent* significa que o valor da opção depende não somente do preço do ativo objeto mais também do caminho percorrido por ele. Caminho aqui é o percurso que o preço V fará até a data de vencimento. Elas têm de ser especificadas pelos eventos a que são sensíveis, além da curva Valor Intrinseco x V (às vezes, a curva é o menos importante de tudo). Assim como as opções *plain vanilla*, as *path-dependent* podem ser precificadas, admitem o cálculo de taxas de *hedge* (deltas, vegas etc.) e podem participar de *books* junto a outras opções quaisquer. O que as diferencia das opções *plain vanillas* não é isto, mas a aplicabilidade do tratamento matemático.

Opção Asiática:

O segundo caso é o de uma opção pela média, chamada comumente de asiática. O valor final desta opção é igual à diferença positiva entre um preço fixo e uma média de preços do ativo V. Aparentemente, ela só se difere de uma opção comum pelo fato de que o preço que definirá seu valor no vencimento é um preço médio, e não um preço final. Contudo, essa diferença implica uma separação radical entre ambos os tipos.

A opção pela média não admite *payoff* conhecido antecipadamente. Podem existir infinitos caminhos até um mesmo valor S final, cada um deles com uma média diferente. Por exemplo, se em cinco dias o histórico do preço de um ativo for 100, 101, 105, 103, 101, sua média final será de 102. Se este mesmo ativo, em cinco dias, exibir o histórico 100, 99, 97, 98, 101, terá um preço médio de 99, apesar de ter encerrado o quinto dia no mesmo preço.

Aqui há que se abrir um parêntese para opções pela média geométrica. Devido a uma propriedade matemática, todo caminho que resultar em um mesmo número final possui a mesma média geométrica. Portanto, opções sobre a média geométrica – e não aritmética – possuem de fato um *payoff* fixo e conhecido.

Opção de Barreira

Como último exemplo de opções que não têm *payoff* fixo, abordam-se as opções de barreira. A opção por barreira é o tipo mais antigo de opção exótica, sendo que sua existência remonta ao final da década de 1960 no mercado americano. Para esta dissertação, esse tipo de opção será exaustivamente comentada, pois será analisada nos próximos capítulos a utilização pela KMV Corporation desta opção para quantificar a probabilidade de *default* de uma empresa.

As opções de barreira podem ser dividas em *Knock-out* e *Knock-in*. As opções do tipo *Knock-out* são extintas no caso de algum evento ocorrer durante o prazo da opção ou durante um período definido entre duas datas. Este evento geralmente é o ativo atingir um determinado preço, chamado preço de barreira. As opções *Knock-in* inicialmente não existem, e passam a valer apenas se um determinado evento ocorrer. A opção *Knock-in* não será relevante nesta dissertação. No caso de uma opção Knock-out, pode-se devolver ao comprador algum valor diferente de zero, no caso em que a opção é extinta, e este valor é chamado de rebate.

As opções de barreira foram criadas para dar maior proteção sem aumentar o valor do prêmio pago por ela. Por exemplo, se acreditar que a ação da Petrobras vai subir este ano, contudo não estar disposto a apostar que seu preço vá passar de R$ 100,00, é necessário apenas comprar a opção até essa barreira e pagar menos prêmio do que as opções *plain vanilla*.

Opção de barreira é *path-dependent*, e se assemelha em alguns pontos com as opções *plain vanilla*. Existem opções de barreira do tipo *put* e *call*, sendo européia ou americana. Contudo, só se torna ativa (*knock-in*), ou então nula (*knock-out*), somente se o ativo subjacente atingir um nível pré-determinado (barreira).

Existem quatro tipos de opções de barreira:

- *Up and Out* – preço *spot* do ativo objeto começa abaixo de uma barreira pré-estabelecida e precisa fazer uma trajetória ascendente até a opção se tornar nula definitivamente.
- *Down and Out* - preço *spot* do ativo objeto começa acima de uma barreira pré-estabelecida e precisa fazer uma trajetória descendente até a opção se tornar nula definitivamente. Esse tipo de opção é utilizado na modelagem KMV para quantificar o risco de *default*.
- *Up and in* - preço *spot* do ativo objeto começa abaixo de uma barreira pré-estabelecida e precisa fazer uma trajetória ascendente até a opção se tornar ativa.
- *Down and in* - preço *spot* do ativo objeto começa acima de uma barreira pré-estabelecida e precisa fazer uma trajetória descendente até a opção se ativar.

Avaliar o valor de uma opção de barreira pode ser complicado, pois se trata de uma modelagem *path-dependent*, ou seja, o valor da opção não só depende do valor do ativo objeto mais também do seu trajeto. Contudo, mesmo não podendo utilizar diretamente a formulação de BLACK e SCHOLES, alguns outros métodos mais complexos podem ser utilizados:

I. Consiste em replicar uma opção de barreira utilizando um portifólio estático de opções *plain vanilla*, no qual são valoradas utilizando a metodologia de BLACK e SCHOLES. Essas opções *plain vanilla* são escolhidas para reproduzir o valor da barreira na maturação e para alguns pontos ao longo da barreira. Essa abordagem foi desenvolvida por Peter Carr.

II. O método clássico seria utilizar a própria EDP de BLACK e SCHOLES para uma opção *plain vanilla*, adicionando uma condição de contorno que no momento que o ativo base tocar uma barreira predefinida essa opção se torna nula.

III. Uma outra maneira de se obter o resultado final é utilizar a simulação de Monte Carlo, contudo é importante ressaltar a instabilidade no modelo decorrente da modelagem das gregas.

IV. A abordagem mais rápida é utilizar o método de diferenças finitas, onde se encontram os resultados da condição de contorno voltando para o resultado básico, utilizando sempre a EDP de BLACK e SCHOLES (1973). Pode-se utilizar o método explícito ou Crank-Nicholson para obter as respostas.

V. Metodologias mais modernas, como os modelos *lattice* (árvores Binomiais, Trinomiais e *Adaptive Mesh*), buscam, através de um passeio aleatório discreto, modelar um movimento browniano discreto. São modelos intuitivos e flexíveis, os quais podem ser aplicados tanto para opções européias como para americanas, e também as opções de barreira.