8 Tensão Axial Pura na Teoria de Elasticidade Gradiente

8.1. Introdução

A bibliografia sobre esse assunto foi referida basicamente aos trabalhos de Elias Aifantis [7] quem realizou um estudo introdutório à análise estática e dinâmica longitudinal de uma barra submetida a tensão pura na elasticidade gradiente. Posteriormente em Tsepoura et al [1] foi complementado esse trabalho mediante a consideração de uma constante constitutiva não clássica adicional, a qual é estudada em detalhe no presente capítulo através da consideração de diferentes condições de contorno.

8.2. Equações que regem o problema de Tensão Pura

Em Tsepoura et al [1] foi desenvolvido o caso particular que relaciona a tensão e a deformação de uma barra submetida a tensão axial pura com dois parâmetros constitutivos g e l descritos na expressão (8-1). Neste caso consideram-se os deslocamentos $u_y=u_z=0$, $u = u_{xx}$. O objetivo básico é mostrar como a deformação não se mantém constante ao longo da barra como no caso clássico. A seguir é apresentado o vetor de tensões generalizadas numa barra de treliça:

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ \mu \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & l \\ l & g^2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} u \\ u' \end{Bmatrix} \tag{8-1}$$

onde:

u : deslocamento longitudinal no eixo x.

$u' = du/dx$ tradicionalmente conhecida pela deformação longitudinal mas aqui também é o deslocamento de segunda ordem.

$\tau = \tau_{xx}$: tensão de Cauchy no eixo x.

$\mu = \mu_{xx}$: tensão dupla, ou tensão de segunda ordem.

l : constante da energia de deformação superficial longitudinal.

g : constante da energia de deformação volumétrica.

E : módulo de elasticidade do material.

Se é definida a matriz $\mathbf{E} = E\begin{bmatrix} 1 & l \\ l & g^2 \end{bmatrix}$ é necessário restringir ela como positiva definida e por tanto $g^2 - l^2 > 0$, ou $g > l$;

A tensão total é definida como:

$$\sigma = \tau - \frac{\partial \mu}{\partial x} = E\left(u' - g^2 u'''\right) = \sigma_{11} \tag{8-2}$$

8.3. Princípio dos Trabalhos Virtuais

Na variação da energia potencial é considerado além dos termos clássicos o trabalho realizado pelas forças de segunda ordem R ao longo dos deslocamentos de segunda ordem e assim é possível chegar a seguinte expressão da Energia Potencial Total:

$$\delta \Pi = A\int_0^L (\tau \delta u' + \sigma \delta u'')dx - \int_0^L q\delta u dx + P\delta u\Big|_0^L + P\delta u'\Big|_0^L \tag{8-3}$$

Integrando por partes obtém se:

$$\delta \Pi = \int_0^L [q + A(\tau' - \mu'')\delta u]dx + [P - A(\tau - \mu') \cdot \delta u]\Big|_0^L + [R - A\mu' \cdot \delta u']\Big|_0^L \tag{8-4}$$

Obtendo-se assim a primeira parcela da integral que representa a equação diferencial de deslocamentos:

$$u'' - g^2 u^{iv} + \frac{q(x)}{AE} = 0 \tag{8-5}$$

Da segunda e terceira parcela obtém-se as condições de contorno clássicas e não-clássicas respectivamente.

$$\begin{aligned} &[P - A(\tau - \mu')\delta u]\Big|_0^L = 0 \\ &[R - A\mu'\delta u']\Big|_0^L = 0 \end{aligned} \tag{8-6}$$

8.4. Principio de Forças Virtuais

Similarmente, pode-se esboçar o problema em função de forças virtuais mediante as seguintes considerações:

u, u', variáveis em $\mathbf{\Omega}$.

$\tilde{u}$, $\tilde{u}'$, variáveis em $\mathbf{\Gamma}$.

$\delta\tau$, $\delta\mu$, variações de τ e μ em $\mathbf{\Omega}$.

No sistema de coordenadas ilustrado na Figura 11 representa-se com duplas flechas as coordenadas (2) e (3), que são os graus de liberdade de segunda ordem u e u' da equação (8-10):

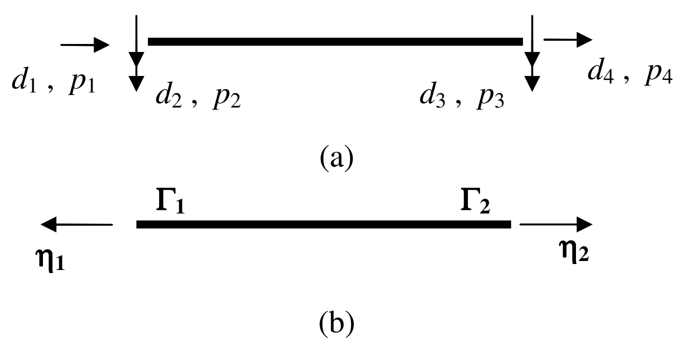


Figura 33.- (a) Sistema de Coordenadas da matriz de rigidez; e (b) definição do domínio $\mathbf{\Omega}$, os contornos $\mathbf{\Gamma_1}$, $\mathbf{\Gamma_2}$ correspondentes aos cossenos diretores η_1 e η_2 do elemento.

Para ter certeza da compatibilidade de deslocamentos deve-se cumprir-se o seguinte:

$$A\int_0^L \left[(u-\tilde{u})'\delta\tau + (u-\tilde{u})''\delta\mu\right]dx = 0 \tag{8-7}$$

que integrada por partes fica:

$$-A\int_0^L \left[(u-\tilde{u})(\delta\tau' - \delta\mu'')\right]dx + A(u-\tilde{u})\delta P\Big|_0^L + A(u-\tilde{u})'\delta R\Big|_0^L = 0 \tag{8-8}$$

Quando se considera o sistema de coordenadas conforme ilustrado na Figura 33 e as condições de contorno (8-9), obtém-se:

$u(x=0)=u_1,\ \ u'(x=0)=u'_1$

$u(x=L)=u_2,\ \ u'(x=L)=u'_2$

$P(x=0)=P_1,\ R(x=0)=R_1$

$P(x=L)=P_2,\ R(x=L)=R_2$ (8-9)

que podem ser escritos como:

$$\langle u \quad u' \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \delta P \\ \delta R \end{Bmatrix} \Bigg|_{x=0}^{x=L} = \langle \tilde{u} \quad \tilde{u}' \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \delta P \\ \delta R \end{Bmatrix} \Bigg|_{x=0}^{x=L} \tag{8-10}$$

8.5. Equações de Movimento Longitudinal de uma Barra a Tensão

É possível a obtenção da equação de movimento para uma barra a tensão pura mediante a equação de equilíbrio de Newton:

$$A\frac{\partial \sigma}{\partial x} + q(x) = \rho \ddot{u} \tag{8-11}$$

onde:

ρ : é a densidade de massa por unidade de cumprimento.

$\boldsymbol{\sigma} = E\,(\,u\,' - g\,^2 u''')$: tensão total. (8-12)

Com (8-11) e (8-12) obtém-se finalmente a equação de movimento de uma barra com tensão axial pura na elasticidade gradiente:

$$\boxed{AE\left(u'' - u^{iv} g^2\right) + q(x) = \rho \ddot{u}} \tag{8-13}$$

Através da mudança de variáveis $u=u^{*}\mathbf{e}^{-\omega t i}$, e considerando $q(x)=0$, obtém-se a equação de deslocamentos no domínio da freqüência:

$$u^{*iv} g^2 - u^{*}'' + \frac{\rho}{AE}\omega^2 u^{*} = 0 \tag{8-14}$$

cuja solução é:

$$u^{*} = c_1 \sin(k_1 x) + c_2 \sinh(k_2 x) + c_3 \cos(k_1 x) + c_1 \cosh(k_2 x) \tag{8-15}$$

onde:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{1+4\omega^2 g^2\alpha} - 2}}{2g} \;\;,\;\; k_2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{1+4\omega^2 g^2\alpha} + 2}}{2g} \;\;,\;\; \alpha = \rho / AE \tag{8-16}$$

sendo a densidade do sólido ρ, a área da seção transversal A e o módulo de elasticidade do material E. Para o caso estático é preciso considerar ω=0 e a solução da equação diferencial do problema resulta em:

$$\begin{aligned} u^* &= c_1 e^{(-x/g)} + c_2 e^{(x/g)} + c_3 x + c_4 \text{ ó} \\ &= \begin{bmatrix} e^{(-x/g)} & e^{(x/g)} & x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{8-17}$$

cujas equações de contorno foram estabelecidas previamente em (8-9) e (8-10).

A seguir o vetor u^* é definido para o calculo dos termos que serão utilizados na formulação híbrida do problema:

$$\mathrm{u}^* = \begin{bmatrix} e^{(-x/g)} & e^{(x/g)} & x & 1 \end{bmatrix} \tag{8-18}$$

que, consequentemente, define as grandezas correspondentes ao contorno:

$$\mathrm{u}_1^* = \mathrm{u}\big|_{x=0} \,,\; \mathrm{u}_2^* = \mathrm{u}\big|_{x=L} \tag{8-19}$$

8.6. Formulação Híbrida na Elasticidade Gradiente de uma Barra sujeita a tensão axial pura

A solução da equação diferencial de deslocamentos pode ser descrita em termos dos graus de liberdade *u, u'*, numa barra submetida a tensão pura no âmbito da elasticidade gradiente. A configuração do esboço matricial é análoga ao desenvolvimento para flexão realizado por Oliveira [26], onde também se considera o elemento unidimensional com dois graus de liberdade. Esse enfoque facilita o procedimento da solução do presente problema.

O deslocamento generalizado de uma barra é:

$$\mathrm{u} = \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & u_4^* \\ u_1^{*\prime} & u_2^{*\prime} & u_3^{*\prime} & u_4^{*\prime} \end{bmatrix} \mathrm{p}^* = \mathrm{u}^* \mathrm{p}^* \tag{8-20}$$

onde:

$\mathbf{p}^* = [\,p^*_1, p^*_2, p^*_3, p^*_4\,]^T$; pode ser interpretado como um vetor base de um sistema interno auxiliar de coordenadas distinguido pelo símbolo (*) .

$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(x)$

Com essa consideração é possível também definir as forças internas generalizadas da barra como:

$$\begin{bmatrix} \tau \\ \mu \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & l\dfrac{\partial}{\partial x} \\ l\dfrac{\partial}{\partial x} & g^2\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & u_4^* \\ u_1^{*\prime} & u_2^{*\prime} & u_3^{*\prime} & u_4^{*\prime} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* & p_3^* & p_4^* \end{bmatrix}^T \qquad (8\text{-}21)$$
$$= E \cdot \mathbf{D}_1 \mathbf{u}^* \mathbf{p}^*$$

onde $\mathbf{D_1}$ é o operador de deslocamentos do sistema interno (*). Abaixo são definidas matricialmente as forças do sistema externo da barra:

$$\begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} \partial/\partial x & -g^2\,\partial^2/\partial x^2 \\ \ell\,\partial/\partial x & +g^2\,\partial/\partial x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & u_4^* \\ u_1^{*\prime} & u_2^{*\prime} & u_3^{*\prime} & u_4^{*\prime} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{p}^* \qquad (8\text{-}22)$$
$$= AE \cdot \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{p}^*$$

onde $\mathbf{D_2}$ é um segundo operador matricial de deslocamentos do sistema interno (*). Cabe mencionar que a dimensão da força de segunda ordem é força×comprimento, e que o deslocamento correspondente a u' é adimensional, análogo ao caso de flexão de vigas. No caso de tensão pura o deslocamento de segunda ordem é a deformação longitudinal.

Neste caso é fácil provar que a força P(x) e a tensão normal ao longo da barra são constantes, $P(x) = p^*_3\, AE$, e $\sigma = p^*_3$. Efetivamente, expandindo-se a equação (8-18) e utilizando-se a expressão para força de superfície (8-22), obtém-se:

$$\begin{aligned} P(x) &= AE(u' - g^2 u''') \\ &= AE\left[(-p_1^* e^{-x/g}/g + p_2^* e^{x/g}/g + p_3^* 1) - g^2(-p_1^* e^{-x/g}/g^3 + p_2^* e^{x/g}/g^3)\right] \\ &= AEp_3^* \end{aligned}$$

(8-23)

Para o cálculo da matriz **H** apresenta-se a seguir da determinação dos termos que serão necessários:

$\mathbf{N}^* = \mathbf{D_2}\,\mathbf{u}^*;\quad \mathbf{N}_1^* = \mathbf{N}^*\big|_{x=0} \quad \mathbf{N}_2^* = \mathbf{N}^*\big|_{x=L}$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}\big|_{x=0} = \mathbf{u}^*\big|_{x=0} \cdot \mathbf{p}^* = \mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{p}^* \tag{8-24}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}\big|_{x=L} = \mathbf{u}^*\big|_{x=L} \cdot \mathbf{p}^* = \mathbf{u}_2^* \cdot \mathbf{p}^*$$

Desta forma é possível caracterizar um sistema vetorial de deslocamentos de todos os graus de liberdade da barra mediante as seguintes matrizes de transformação de coordenadas e os vetores cossenos diretores dela:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{Bmatrix} u \\ u' \end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \mathrm{N_1 d} \;\; ; \;\; \eta_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ em } \boldsymbol{\Gamma_1} \\ \\ \begin{Bmatrix} u \\ u' \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \mathrm{N_2 d} \;\; ; \;\; \eta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ em } \boldsymbol{\Gamma_2} \end{array}\right\} \tag{8-25}$$

As expressões em (8-5) permitem calcular a matriz de rigidez cinemática **H** que transforma os deslocamentos do sistema auxiliar (*) ao sistema global ilustrado na Figura 33.

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}_1^{*T} \eta_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^{*T} \eta_2 \mathbf{N}_2 \tag{8-26}$$

Também é possível calcular a matriz de flexibilidade no sistema interno (*)

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}_1^* \eta_1 \mathbf{u}_1^* + \mathbf{N}_2^* \eta_2 \mathbf{u}_2^* \tag{8-27}$$

De forma análoga a matriz de rigidez no sistema global **K** é obtida de duas formas:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H^T} \mathbf{U}^{*-1} = \mathbf{H^T} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \tag{8-28}$$

onde:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \end{bmatrix} \text{ obtida por meio de (8-18) e (8-19).} \tag{8-29}$$

Finalmente, obtém-se o vetor de deslocamentos com:

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} \tag{8-30}$$

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^*(x)(\mathbf{U}^*)^{-1}\mathbf{d} \tag{8-31}$$

onde $\mathbf{u}^*$ é obtido com (8-18), $\mathbf{U}^*$ com (8-29) e $\mathbf{d}$ são os deslocamentos mostrados segundo os grados de liberdade da Figura 33.

8.6.1. Análise no Domínio da Freqüência.

Utilizando a expressão de $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T\mathbf{U}^{*-1}$ tem-se algebricamente a matriz $\mathbf{K}_{[4\times4]}$. Fazendo a mudança de variáveis $C=\cosh(k_1L)$; $S=\sinh(k_1L)$; $c=\cos(k_2L)$; $s=\sin(k_2L)$ obtém-se os termos de $\mathbf{K}$:

$$K[1,1] = -AE\frac{g^2(k_1^3Cs + Sck_1^2k_2 + Csk_2^2k_1 + Sck_2^3)k_2k_1}{Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_2k_1 - 2k_2k_1}$$

$$K[1,2] = -AE(2Cck_1^3 + Ssk_1^2 - 2k_1k_2 + g^2Cck_1^3k_2 + g^2Ssk_1^4 - g^2k_1^3k_2$$
$$- Ssk_2^2 + g^2Ssk_2^4 - g^2k_2^3k_1)/(-Ssk_2^2 + Ssk_1^2 + 2Cck_2k_1 - 2k_2k_1)$$

$$K[1,3] = g^2AE\frac{(k_1^3s + Sk_1^2k_2 + sk_2^2k_1 + Sk_2^3)k_1k_2}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_2k_1 - 2k_1k_2}$$

$$K[1,4] = g^2AE\frac{(-Ck_1^2 + ck_1^2 - Ck_2^2 + ck_2^2)k_2k_1}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_1k_2 - 2k_2k_1}$$

$$K[2,2] = -g^2AE\frac{(-cSk_1 + sCk_2)(k_2^2 + k_1^2)}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_2k_1 - 2k_2k_1}$$

$$K[2,3] = -g^2AE\frac{(-Ck_1^2 + ck_1^2 - Ck_2^2 + ck_2^2)k_2k_1}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_1k_2 - 2k_2k_1}$$

$$K[2,4] = g^2AE\frac{(-Sk_1 + sk_2)(k_2^2 + k_1^2)}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_2k_1 - 2k_2k_1}$$

$$K[3,3] = -g^2AE\frac{(Csk_1^3 + Sck_1^2k_2 + Csk_2^2k_1 + Sck_2^3)k_2k_2}{-Ssk_2^2 + Ssk_1^2 + 2Cck_1k_2 - k_1k_2}$$

$$K[3,4] = -AE(-2Cck_1k_2 + c^2k_1k_2 + Ccg^2k_1^3k_2 + c^2g^2k_1^3k_2 + C^2k_1k_2$$
$$- C^2g^2k_1k_2^3 + Ccg^2k_1k_2^3 - sSk_1^2 + s^2k_1k_2 - sSg^2k_1^4 + s^2g^2k_1^3k_1$$
$$- S^2k_1k_2 + Ssk_2^2 + S^2g^2k_1k_2^3 - Ssg^2k_2^4)/$$
$$(-Ssk_2^2 + Ssk_1^2 + 2Cck_1k_2 - 2k_1k_2)$$

$$K[4,4] = -AEg^2\frac{sCk_1^2k_2 - Sck_1k_2^2 - cSk_1^3 + sCk_2^3}{-Ssk_2^2 + Ssk_1^2 + 2Cck_1k_2 - 2k_1k_2} \tag{8-32}$$

onde k_1 e k_2 são apresentados na expressão (8-16).

8.6.2. Análise Estática

Considerando-se o sistema de coordenadas ilustrado na Figura 11, escreve-se a solução de deslocamentos generalizados como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} = \cdot\begin{bmatrix} e^{x/g} & e^{-x/g} & x & 1 \\ e^{x/g}/g & e^{-x/g}/g & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{p}^* = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{p}^* \tag{8-33}$$

Utilizando-se as equações (8-24), (8-25) e (8-26) obtém-se a expressão de **H:**

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}_1^{*\mathbf{T}}\eta_1\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^{*\mathbf{T}}\eta_2\mathbf{N}_2$$

$$= AE \cdot \begin{bmatrix} 0 & -(1+\ell/g) & 0 & \ell \cdot e^{L/g}/g + e^{L/g} \\ 0 & -(1-\ell/g) & 0 & -\ell e^{-L/g}/g + e^{-L/g} \\ -1 & -\ell & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8-34}$$

Com (8-29) obtém-se a matriz U^* para o problema:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1/g & -1/g & 1 & 0 \\ e^{L/g} & e^{-L/g} & L & 1 \\ l \cdot e^{L/g}/g & -e^{-L/g}/g & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \end{bmatrix} \tag{8-35}$$

Finalmente, para o caso estático de uma barra de elasticidade gradiente a matriz **K**, admite a seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T\mathbf{U}^{*-1}$$

$$= \frac{AE}{L\cdot\beta}\cdot\begin{bmatrix} 1 & g(C-1)/S & -1 & g(C-1)/S \\ g(C-1)/S & K_{22} & g(C-1)/S & g(gS-L)/S \\ -1 & -g(C-1)/S & 1 & -g(C-1)/S \\ g(C-1)/S & g(gS-L)/S & -g(C-1)/S & K_{44} \end{bmatrix}$$

(8-36)

onde:

$\beta = 1 + 2g/LS - 2gC/LS$

$K_{22} = +2g\ell/S + (g^2 - L\ell) - C/Sg(L+2\ell)$

$K_{44} = -2g\ell/S + (g^2 - L\ell) - C/Sg(L-2\ell)$

S = sinh(L/g) ; C = cosh(L/g)

L : comprimento da barra

A: área da seção transversal

E: módulo de elasticidade do material

Deve-se mencionar que o Posto(K)=3 para o caso estático.

Além disso, pode-se analisar o caso limite quando *g* tende a zero:

$$\lim_{g\to 0}\left[\frac{\sinh(L/g)}{\cosh(L/g)}\right] = 1\ ;\ \lim_{g\to 0}\left[\mathrm{S/C}\right] = 1;\ \lim_{g\to 0}\left[1/\mathrm{S}\right] = 0 \qquad (8\text{-}37)$$

Obtendo consistentemente a matriz de rigidez clássica

$$\mathrm{K}_{clasico} = \lim_{g\to 0}\mathrm{K} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (8\text{-}38)$$

8.7. Exemplos

Nesta seção são resolvidos diferentes tipos de exemplos que tem como objetivo mostrar a sensibilidade do problema de tensão pura para as condições de contorno não-clássicas.

Exemplo 1

K. G. Tsepoura et al [1] desenvolveu o seguinte problema com as condições de contorno ilustradas na Figura 12 que permitem calcular os coeficientes da solução de deslocamentos. Neste trabalho obteve-se a solução através do método da rigidez direta com a matriz **K** obtida na seção anterior:

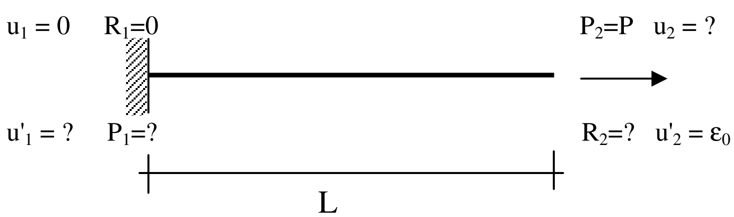


Figura 34. - Condições de contorno de una barra gradiente elástica engastada.

Os termos da matriz obtida em (8-36) podem ser substituídos por *a, b, c, d* e *e* na seguinte equação correspondente à conhecida relação do método da rigidez:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{P} \equiv \frac{AE}{L\beta}\cdot\begin{bmatrix} 1 & g(C-1)/S & -1 & g(C-1)/S \\ g(C-1)/S & K_{22} & g(C-1)/S & g(gS-L)/S \\ -1 & -g(C-1)/S & 1 & -g(C-1)/S \\ g(C-1)/S & g(gS-L)/S & -g(C-1)/S & K_{44} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} d_1 = 0 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 = \varepsilon_0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{AE}{L\beta}\cdot\begin{bmatrix} a & b & -a & b \\ b & c & -b & -d \\ -a & -b & a & -b \\ b & -d & -b & e \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} d_1 = 0 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 = \varepsilon_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = P \\ p_4 \end{Bmatrix}$$

(8-39)

cuja solução é:

$$\mathrm{d} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{Pb + b^2 e - ad\varepsilon_0}{b^2 - a \cdot c} \\ \dfrac{Pc + bc\varepsilon_0 - bd\varepsilon_0}{b^2 - ac} \\ \varepsilon_0 \end{Bmatrix} \frac{L\beta}{AE}; \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ P \\ R_0 \end{Bmatrix} \tag{8-40}$$

onde:

$$R_0 = (Pbd - Pbc + 2b^2 d\varepsilon_0 - ad^2\varepsilon_0 - b^2 c\varepsilon_0 + aec\varepsilon_0 - eb^2\varepsilon_0)/(b^2 - ac) \tag{8-41}$$

Neste caso, é possível observar o surgimento de uma força dupla. Por equilíbrio, a força de tensão clássica tem que ser constante ao longo da barra. Os deslocamentos podem ser calculados através da expressão (8-31) e são ilustrados na Figura 35 para um intervalo de valores de ℓ / g =[0.01 ..0.3] e g / L=[0.01..0.5] (para $\ell = 0$).

$$\mathrm{u}(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{bmatrix} = \mathrm{u}^*(x)\mathrm{U}^{*-1} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \tag{8-42}$$

Na Figuras 13 visualiza-se o comportamento dos deslocamentos *u* crescente no eixo *x*, e distinguir a diferença da deformação com o caso clássico onde u'=**ε=**constante. Na Figura 13 (d) se aprecia como no caso não clássico a deformação é decrescente fortemente a partir da metade do comprimento da barra enquanto ℓ / g varia e g/L mantém-se constante. Neste caso, é apreciável a influência do parâmetro ℓ / g , que é função de D/L, relação do diâmetro das microestruturas entre o comprimento da barra.

Deve-se mencionar que esse exemplo reflete a metade do caso de uma barra submetida a duas tensões P em ambos os extremos de cumprimento 2L. A Figura 13 (d) não mostra a possibilidade de uma simetria na deformação neste caso, gerando-se a dúvida se é apropriado o uso da constante ℓ que é omitida por Elias Aifantis [7].

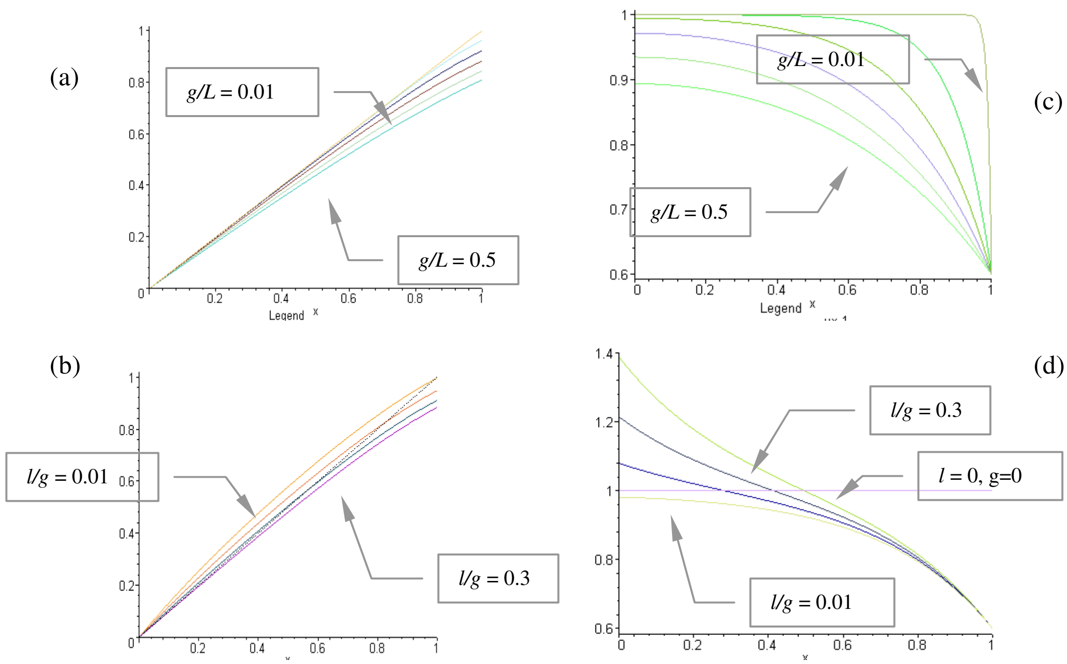


Figura 35. - Resultado dos Deslocamentos e Deformações de uma Barra de elasticidade gradiente submetida tensão pura; (a) sensibilidade de u a g/L (b) sensibilidade de u a ℓ/g (c) sensibilidade de u' a g/L (d) sensibilidade de u' a ℓ/g.

<u>Funções de Forma Não-clássicas</u>

A equação das funções de forma de uma barra de elasticidade gradiente pode ser calculada mediante a seguinte expressão do método híbrido de elementos de contorno e apresentada na Figura 36 para um intervalo de g/L=[0.01, 0.5].

$$\mathbf{B} = \mathbf{u}^{*} \cdot \mathbf{U}^{*-1} \tag{8-43}$$

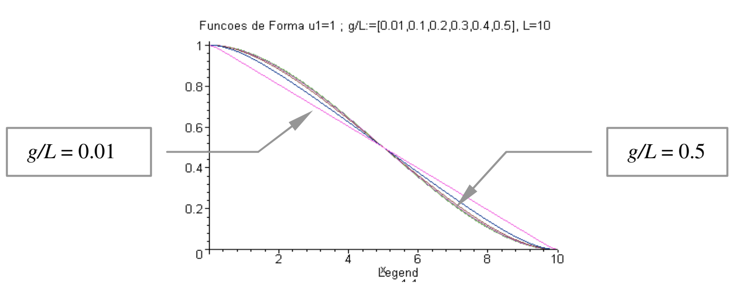


Figura 36. - Funções de Forma de uma Barra de Elasticidade Gradiente a tensão.

Exemplo 2

Se é considerado um campo de deslocamentos **d** clássico com o eixo de coordenadas localizado no meio da barra, tem-se:

$$\mathrm{d} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ 1/L \\ 1/2 \\ 1/L \end{Bmatrix} \tag{8-44}$$

então a solução fica clássica.

Se $\ell = 0$ e a matriz de rigidez geral apresentada na expressão (8-36) for arranjada de forma a identificar um sistema externo, correspondente aos deslocamentos clássicos, e um sistema interno, correspondente aos deslocamentos não clássicos, a matriz **K** poder ser representada pela seguinte expressão:

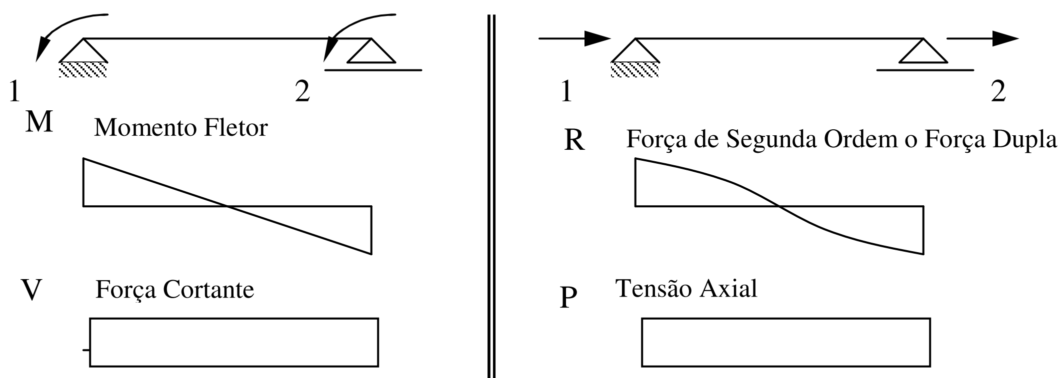
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ie} \\ \mathbf{K}_{ei} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \tag{8-45}$$

e se são consideradas nulas as forças de segunda ordem, então é possível pensar numa condensação estática, $\mathbf{K}_{cond} = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ie}$, a qual fica também clássica.

Exemplo 3:

A natureza do grau de liberdade não clássico é semelhante à flexão de uma viga e por isso a seguir é feita uma analogia das equações para tensão pura da elasticidade gradiente com a flexão tradicional da elasticidade clássica.

$\theta = dy/dx$	$u' = du/dx$
$M = EIy'' = M_1(1 - x/L) + x/L M_2$	$R = EA(g^2 u'')$
$V = dM/dx = cte.$	$P = EA(u' - g^2 u''') = cte.$



<u>FLEXÃO DA ELASTICIDADE CLÁSSICA</u>

<u>CARREGAMENTO AXIAL NA ELASTICIDADE GRADIENTE</u>

<u>Caso 1</u>

BC (1) $u_1 = -u_2$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u(x=-L/2) = c_1 \sinh(-L/2g) - c_2 L/2 \\ u_2 &= u(x=+L/2) = c_1 \sinh(+L/2g) + c_2 L/2 \\ u_2 &= -u_1 = c_1 \sinh(+L/2g) + c_2 L/2;\ \text{OK}\ \forall c_1, c_2 \end{aligned}\right\} \quad (8\text{-}46)$$

BC (2) $u'_1 = u'_2$

$$u'_1 = c_1/g \cosh(-L/2g) + c_2\ ;$$

$$u'_2 = c_1/g \cosh(+L/2g) + c_2 = u'_1\ ;\text{OK}\ \forall c_1, c_2 \qquad (8\text{-}47)$$

BC (3) $R_1 = -R_2$

$$R(x) = EA(l\,u' + g^2 u'') = EA[2\ell\, c_1/g \cosh(x/g) + 2c_1 \sinh(x/g) + c_2 \ell] \tag{8-48}$$

por tanto se $R_1 = R(x=-L/2) = -R_2 = -R(x=L/2)$, então

$$c_1 = \frac{-c_2 \cdot g}{2\cosh(L/2g)} \neq 0 \ , \ \forall \ell \tag{8-49}$$

Este valor de c_1 é independente do valor de ℓ. É interessante mencionar que c_1 está condicionado pelos valores de contorno de R, e que R está condicionado pelos valores de ℓ, mas c_1 não depende dos valores de ℓ para as condições de contorno descritas.

BC (4) $P_1 = P_2 = P(x) = P$ constante

$P(x) = EA(u' - g^2 u''') = EA\ c_2$

portanto $c_2 = P/EA$

Finalmente,

$$u(x) = \frac{P}{EA}\left[\frac{-g\sinh(x/g)}{\cosh(L/2g)} + x\right] \ ; \forall\, l \tag{8-50}$$

Neste caso, é interessante analisar primeiro o comportamento da força de segunda ordem longitudinalmente para diferentes valores de g e ℓ de acordo com ilustrado na Figura 37. Nos gráficos apresentados nessa figura pode-se verificar que as condições de contorno simétricas não resultam em resultados simétricos, e isso apenas para $\ell = 0$. Dessa forma, a simplificação apresentada em Aifantis [7], quem usa só 1 variável não clássica, é aparentemente mais consistente em uma interpretação física do problema.

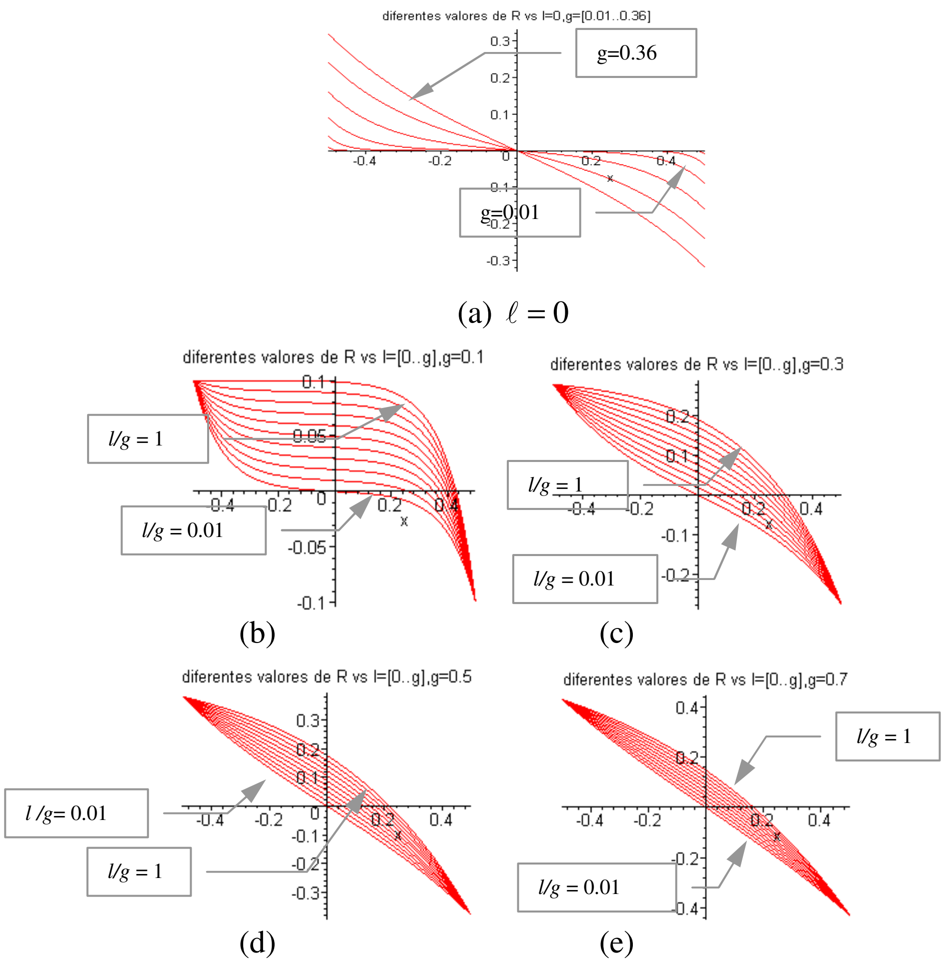
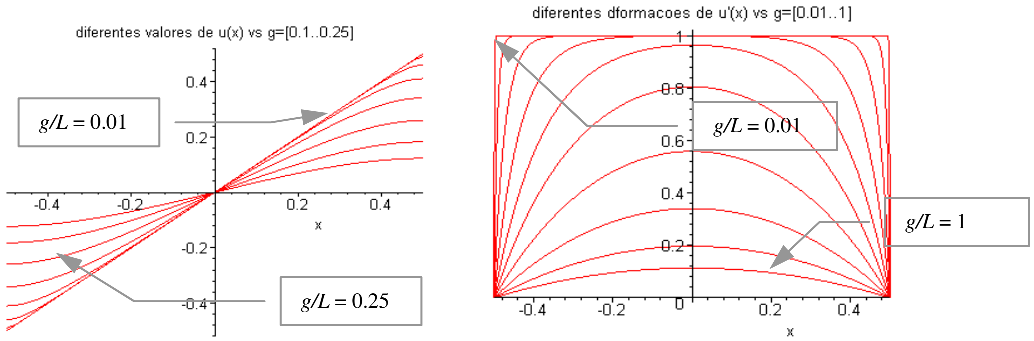


Figura 37 . - Comportamento da Força de Segunda Ordem R para diferentes valores de ℓ, Exemplo 3; (a) ℓ =0 (b) g=0.1 (c) g =0.3 (d) g =0.5 (e) g =0.7

Comportamento de *u(x)* e *u'(x)*

O comportamento de deslocamento *u(x)* para diferentes quocientes g/L mostra a tendência para o caso clássico quando este tende a zero. Similarmente, acontece com as deformações, as quais são independentes do valor ℓ. Outro aspecto interessante é que em diferentes condições de contorno as deformações nas extremidades mantêm-se nulas.



(a) (b)

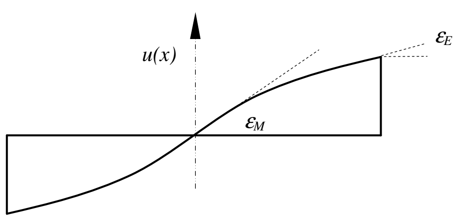
Figura 38. - Deslocamentos (a) e deformações (b) no problema de tensão pura na elasticidade gradiente

Caso 2

Para R_1=R_2 a solução é totalmente clássica para valores quaisquer de g e ℓ.

Caso 3

Neste caso, considerou-se $\ell = 0$ e uma condição de contorno que permita obter uma distribuição de deformações que não seja nula nas extremindades, tal como é mostrado no seguinte esquema:



$$\varepsilon_E/\varepsilon_M = \alpha$$

os resultados *u(x)* são ilustrados na Figura 39 e *u'(x)* na Figura 40:

(a) (b) (c)

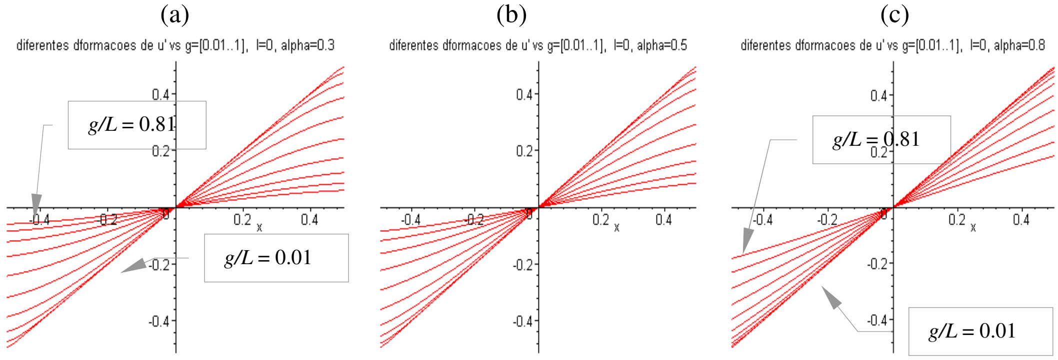
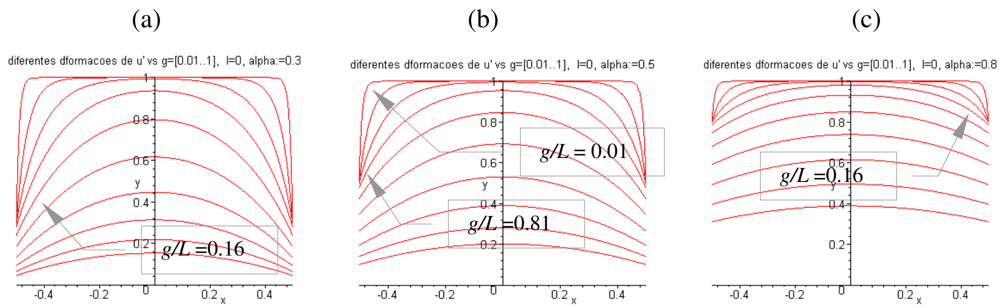


Figura 39 . - Deslocamentos *u(x)* barra a tensão, Exemplo 3. para diferente valores de α: (a) α = 0.3 (b) α = 0.5 (c) α = 0.8.



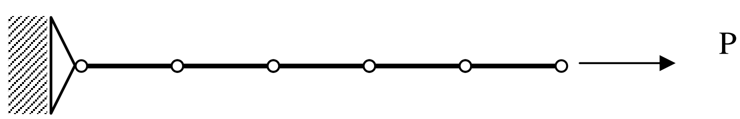
g/L=[0.01, 0.04, 0.09, 0.16, 0.25, 0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1]

$\sqrt{(g/L)}$ =[0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 1]

Figura 40. - Deformação *u'(x)* de uma Barra a Tensão, α: (a) α = 0.3 (b) α = 0.5 (c) α = 0.8. Exemplo 3.

Exemplo 4

Realizou-se o exemplo de superposição modal e foi comparado com o modelo clássico desenvolvido por Oliveira [26] para uma barra dividida em cinco elementos e submetida a uma força pulso. O esquema geral do problema é ilustrado na Figura 41. No problema desenvolvido não foi considerado o amortecimento da estrutura.



Dados do problema: A=1, L=1, E=1000, ρ=0, ζ=0.

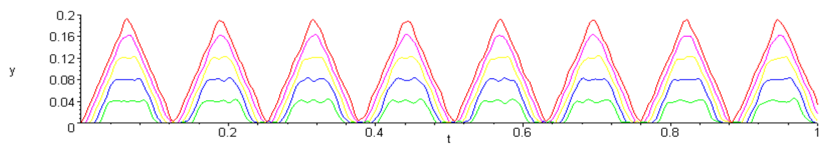
Figura 41. - Barra com um extremo engastado e outro livre submetida a uma força pulso. Barra discretizada em 5 elementos por Oliveira [26].

Esse problema foi resolvido para diferentes valores de *g*. Observa-se que quando $g \to 0$ a solução do problema se assemelha à solução clássica. Por outro lado enquanto *g* cresce também cresce a freqüência de vibração. Na Figura 42 é ilustrada a resposta do problema com diferentes cores que representam a resposta dos cinco graus de liberdade clássicos da barra, sendo o valor superior o pertencente ao extremo da barra.

As condições iniciais são $u(x,t=0)= - Px/EA$ e $\partial u(x,t=0)/\partial t= 0$. Para a expansão das séries no domínio da freqüência foi utilizado n=4 (ω^8), valor mostrado por Oliveira [26] como o menor valor que fornece a solução mais próxima e razoável à solução analítica.

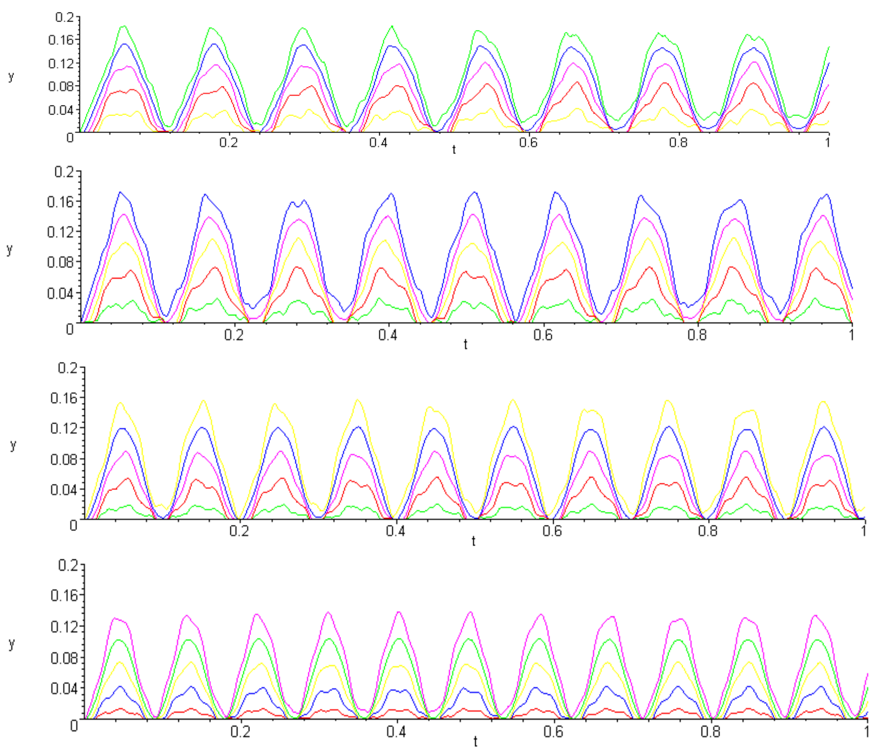
Basicamente pode-se concluir que o efeito da escala na vibração livre de barras faz com que a freqüência aumente enquanto o tamanho relativo das partículas torna-se grande.

Caso Clássico



(i) g=0

Caso no Clássico



(ii) g=0.05

(iii) g=0.1

(iv) g=0.2

(v) g=0.3

Figura 42 . - Resposta da Superposição Modal de uma barra discretizada em cinco elementos, com *n=4* que implica uma expansão da series de freqüências até O(ω^8).