7 Elementos Híbridos de Contorno

Nesse capítulo será feita uma apresentação resumida da formulação híbrida dos elementos finitos que pode ser utilizada no desenvolvimento do método de elementos de contorno para a elasticidade gradiente. Mostra-se as equações matriciais de equilíbrio, de acordo com a formulação simplificada dos elementos de contorno.

7.1. Equações Matriciais de Equilíbrio

O método híbrido de elementos de contorno, introduzido por Dumont [15] como uma generalização dos conceitos desenvolvidos por Pian no método de elementos finitos, só precisa da avaliação das integrais ao longo do contorno utilizando a soluções fundamentais como funções de interpolação no domínio.

O método utiliza um domínio arbitrário na forma de um único macroelemento finito que tem a quantidade de graus liberdade condicionado pelo grau de exatidão numérica que precise a solução do problema. O método foi aplicado satisfatoriamente em problemas de potencial e elasticidade, problemas dependentes do tempo e na mecânica da fratura. Chávez [16] efetuou uma versão simplificada desde método e obtém-se uma formulação mais rápida que a anterior. A formulação simplificada tem como resultado o seguinte par de equações matriciais:

$$\mathbf{U}^{*}\mathbf{p}^{*} = \mathbf{d} - \mathbf{d}^{b}$$

$$\mathbf{H}^{T}\mathbf{p}^{*} = \mathbf{p} - \mathbf{p}^{b} \qquad (7\text{-}1)$$

onde

$\mathbf{d} \equiv d_r$ é o vetor de deslocamentos nodais

$\mathbf{d}^b \equiv d_r^b$ é o vetor de deslocamentos da solução particular $u^b{}_i$ que para o caso estático é zero.

$\mathbf{U}^*$: a matriz de deslocamentos, onde os coeficientes $U^*{}_{ij}$ pertencem à solução fundamental, $u^*{}_i$ obtidas nos pontos nodais num comprimento r para um parâmetro de forças $p^*{}_{s.}$

As matrizes **H** e **U*** para elasticidade gradiente são definidas na expressão (6-7),

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{H}}_{[\tilde{\mathbf{P}}]} & \tilde{\mathbf{K}}_{[\tilde{\mathbf{R}}]} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{[\partial\tilde{\mathbf{P}}]} & \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{T}}_{[\partial\tilde{\mathbf{R}}]} \end{bmatrix} \tag{7-2}$$

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{[\tilde{\mathbf{U}}]} & \tilde{\mathbf{L}}_{[\tilde{\mathbf{Q}}]} \\ \tilde{\mathbf{V}}_{[\partial\tilde{\mathbf{U}}]} & \tilde{\mathbf{W}}_{[\partial\tilde{\mathbf{Q}}]} \end{bmatrix} \tag{7-3}$$

A equação básica que relaciona as forças e os deslocamentos é definida por:

$$\mathbf{K}\left(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b\right) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \tag{7-4}$$

onde:

$$\mathbf{K}=\mathbf{H}^{\mathbf{T}}(\mathbf{U}^*)^{-1} \tag{7-5}$$

A matriz da equação anterior é simétrica se a função de interpolação introduzida na equação $\bar{u} = u_{ir} d_r$ pode representar analiticamente no contorno as expressões de $u^*{}_{is}$, como são os casos de barras e vigas, Dumont 2003 [17].