5 Formulação do Método de Elementos de Contorno na Elasticidade Gradiente

Nesta seção apresenta-se a formulação do método de elementos de contorno na elasticidade gradiente desenvolvido por Polyzos et al [20] - [22] para a solução de problemas elastostáticos e fratura. Com essa finalidade utiliza-se o critério proposto por Mindlin e Eshel [27] de considerar um material isotrópico e o caso especial da teoria geral de Mindlin [2] a qual se adota que as deformações macroscópicas coincidem com as microdeformações. Assim, esboça-se a modificação da lei de Hooke através da contribuição de cinco constantes, três constantes não-clássicas além das de Lamè. A partir dessa hipótese é possível obter uma equação constitutiva mais simples e matematicamente mais manipulável reduzindo o número total de constantes constitutivas a três, conforme apresentado nas seções 2.3 e 2.4.

A seguir, apresenta-se novamente as equações constitutivas que serão utilizadas na formulação do método de elementos de contorno:

$$\sigma_{ji} = \tau_{ji} + s_{ji} \,, \tag{5-1}$$

$$\tau_{ji} = 2\mu\varepsilon_{ji} + \lambda u_{k,k}\delta_{ji} \tag{5-2}$$

$$\varepsilon_{ji} = \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)/2 \,, \tag{5-3}$$

$$\mu_{kji} = g^2 \tau_{ji,k} \tag{5-4}$$

$$s_{ji} = -\mu_{kji,k} = -g^2 \tau_{ji,kk} \tag{5-5}$$

onde δ_{im} é o delta de Kronecker, λ e μ as constantes de Lamè, ε_{ij} o tensor de deformações, τ_{ij} o tensor de tensões de Cauchy, s_{ij} o tensor de tensões relativas e g o coeficiente da energia de deformação volumétrica, a única constante que relaciona a microdeformação com a macroestrutura.

Considerando as forças de massa clássicas e não-clássicas nulas, a equação de equilíbrio estático fica representada de forma indicial pela equação:

$$\tau_{jim,j} - \mu_{kjim,kj} = 0 \tag{5-6}$$

acompanhadas pelas condições de contorno clássicas:

$$\mathrm{u(x)} = \mathrm{u}_0 \quad \mathrm{x} \in \Gamma_1 \ \mathrm{e}$$

$$\mathrm{P(x)} = \mathrm{P}_0 \quad \mathrm{x} \in \Gamma_2\,,\ \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \tag{5-7}$$

e as condições de contorno não-clássicas:

$$\mathrm{q(x)} = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial n} = \mathrm{q}_0 \equiv q_i = u_{i,j} n_j\,,\ \mathrm{x} \in \Gamma_3$$

$$\mathrm{R(x)} = \hat{\mathrm{n}} \cdot \tilde{\mu} \cdot \hat{\mathrm{n}} = \mathrm{R}_0 \equiv R_i = \mu_{kji} n_j n_k\,,\ \mathrm{x} \in \Gamma_4\,,\ \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma \tag{5-8}$$

Na expressão (5-8) $\hat{\mathrm{n}}$ é o vetor normal em **Γ**, **P** é o vetor de forças de superfície, **R** representa as forças duplas de superfície e os subscritos $(\ )_0$ representam grandezas prescritas em **Γ.**

Adotando-se a teoria simplificada de Mindlin, combinadas com as expressões (5-1) -(5-5) na expressão (5-6), obtém-se a equação de equilíbrio da elasticidade gradiente em termos do deslocamento **u.** Essa expressão já foi apresentada previamente na seção 2.4 incluindo as forças de massa:

$$\mu\, u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} - g^2 \left[\mu\, u_{i,jjkk} + (\lambda + \mu) u_{j,jikk} \right] = 0 \tag{5-9}$$

cuja solução fundamental foi também apresentada no Capítulo 4 como:

$$U^*_{im} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[Y(r,\nu,g)\delta_{im} - X(r,g) r_{,i} r_{,m} \right] \tag{5-10}$$

onde:

$u^*_i = U^*_{im} e_m$, deslocamento no eixo *i*.

U^*_{im} é o tensor do campo de deslocamentos da solução fundamental,

e_m: é a componente do vetor unitário na direção *i*.

Para o caso geral de superfícies não suaves, a formulação integral do problema de elementos de contorno é representada pelas seguintes expressões do modo indicial:

$$c_{ij}(\overline{\mathrm{x}})u_j(\overline{\mathrm{x}}) + \int_{\Gamma_y}\left[P_{ij}^*(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{y}})u_j(\overline{\mathrm{y}}) - U_{ij}^*(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{y}})p_j(\overline{\mathrm{y}})\right]d\Gamma_{\mathrm{y}} =$$
$$\int_{\Gamma_y}\left[Q_{ij}^*(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{y}})R_j(\overline{\mathrm{y}}) - R_{ij}^*(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{y}})\frac{\partial u_j(\overline{\mathrm{y}})}{\partial n_{\mathrm{y}}}\right]d\Gamma_{\mathrm{y}} +$$
$$\oint_{C_y}\left[U_{ij}^*(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{y}})E_j(\overline{\mathrm{y}}) - E_{ij}^*(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{y}})u_j(\overline{\mathrm{y}})\right]d\mathrm{C}_{\mathrm{y}} \tag{5-11}$$

$$c_{ij}(\overline{\mathrm{x}})\frac{\partial u_j(\overline{\mathrm{x}})}{\partial n_{\mathrm{x}}} + \int_{\Gamma_y}\left[\frac{\partial P_{ij}^*(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{y}})}{\partial n_{\mathrm{x}}}u_j(\overline{\mathrm{y}}) - \frac{\partial U_{ij}^*(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{y}})}{\partial n_{\mathrm{x}}}p_j(\overline{\mathrm{y}})\right]d\Gamma_{\mathrm{y}} =$$
$$\int_{\Gamma_y}\left[\frac{\partial Q_{ij}^*(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})}{\partial n_{\mathbf{x}}}R_j(\overline{\mathbf{y}}) - \frac{\partial R_{ij}^*(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})}{\partial n_{\mathbf{x}}}\frac{\partial u_j(\overline{\mathbf{y}})}{\partial n_{\mathbf{y}}}\right]d\Gamma_{\mathrm{y}}$$
$$+\oint_{\Gamma_y}\left[\frac{\partial U_{ij}^*(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})}{\partial n_{\mathbf{x}}}E_j(\overline{\mathbf{y}}) - \frac{\partial E_{ij}^*(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})}{\partial n_{\mathbf{x}}}u_j(\overline{\mathbf{y}})\right]d\mathbf{C}_{\mathbf{y}} \tag{5-12}$$

onde $\partial(\,)/\partial n_{\mathrm{x}}$ representa a derivada direcional respeito ao vetor normal no ponto fonte **x.**

A seguir é apresentada a expansão explícita de todos os termos vinculados ás expressões (5-11) e (5-12), as quais foram transformadas da forma original simbólica, conforme Polyzos et al [13], à forma indicial.

Tensor do Campo de Deslocamentos de Segunda Ordem:

$$Q_{ij}^* = b_1\left[\left(\frac{2X}{r} - X'\right)d_1 v_i v_j + Y' d_1 \delta_{ij} - \frac{X}{r}\left(n_{yi}v_j + n_{yj}v_i\right)\right] \tag{5-13}$$

Tensor de Forças de Superfície de Segunda Ordem:

$$R_{ij}^* = b_2\left\{\left[\left(A' - \frac{3A}{r}\right)d_1^2 + \frac{A}{r}\right]v_i v_j + \left[\left(B' - \frac{B}{r}\right)d_1^2 + \frac{B}{r}\right]\delta_{ij} + \left(B' - \frac{B}{r} + \frac{A}{r}\right)d_1 n_{yi} v_j + \right.$$
$$\left. + \left(C' - \frac{C}{r} + \frac{A}{r}\right)d_1^2 v_i n_{yj} + \frac{B+C}{r}n_{yi}n_{yj}\right\} \tag{5-14}$$

Tensor de Forças de Superfície Clássico:

$$P_{ij}^{*} = P_{ij}^{*[1]} + P_{ij}^{*[2]} + P_{ij}^{*[3]} + P_{ij}^{*[4]} + P_{ij}^{*[5]} + P_{ij}^{*[6]} \tag{5-15}$$

$$P_{ij}^{*[1]} = b_3\left[Ad_1 v_i v_j + Bd_1\delta_{ij} + Bn_{yi}v_j + Cv_i n_{yj}\right]$$

$$P_{ij}^{*[2]} = b_3\left[G_1 v_i v_j + G_2\delta_{ij} + G_3 v_i n_{yj} + G_4 n_{yi} r_j + G_4 n_{yi} n_{yj}\right]$$

onde:

$$G_1 = g^2\left\{\left(A'' - \frac{7}{r}A' + \frac{15A}{r^2}\right)d_1^3 + 3\left(\frac{1}{r}A' - \frac{3A}{r^2}\right)d_1\right\}$$

$$G_2 = g^2\left\{\left(B'' - \frac{3}{r}B' + \frac{3B}{r^2}\right)b_1^3 + 3\left(\frac{1}{r}B' - \frac{B}{r^2}\right)d_1\right\}$$

$$G_3 = g^2\left\{\left(C'' - \frac{3}{r}C' + \frac{3C}{r^2} + \frac{2}{r}A' - \frac{6A}{r^2}\right)b_1^2 + \frac{2A}{r^2} + \frac{1}{r}C' - \frac{C}{r^2}\right\}$$

$$G_4 = g^2\left\{\left(B'' - \frac{3}{r}B' + \frac{3B}{r^2} + \frac{2}{r}A' - \frac{6A}{r^2}\right)b_1^2 + \frac{2A}{r^2} + \frac{1}{r}B' - \frac{B}{r^2}\right\}$$

$$G_5 = 2g^2\left(\frac{1}{r}B' - \frac{B}{r^2} + \frac{1}{r}C' - \frac{C}{r^2} + \frac{A}{r^2}\right)b_1$$

$$P_{ij}^{*[3]} = -b_2\left\{\left(A'' + \frac{(\alpha-1)}{r}A' - \frac{3(\alpha+1)A}{r^2}\right)d_1 v_i v_j + \right.$$

$$+\left(B'' + \frac{(\alpha-1)}{r}B' - \frac{(\alpha-1)B}{r^2} + \frac{2A}{r^2}\right)\left[d_1\delta_{ij} + n_{yi}v_j\right] +$$

$$\left. +\left(C'' + \frac{(\alpha-1)}{r}C' - \frac{(\alpha-1)C}{r^2} + \frac{2A}{r^2}\right)v_i n_{yj}\right\}$$

$$P_{ij}^{*[4]} = -b_2\left\{\left(B'' + \frac{\alpha}{r}B' - \frac{\alpha B}{r^2} + \frac{1}{r}C' - \frac{C}{r^2}\right)d_1\delta_{ij} + \right.$$

$$+\left(A'' + \frac{(\alpha-3)}{r}A' - \frac{3(1-\alpha)A}{r^2} + B'' - \frac{3}{r}B' + \frac{3B}{r^2} + C'' - \frac{3}{r}C' + \frac{3C}{r^2}\right)d_1 v_i v_j$$

$$\left. +\left(\frac{1}{r}A' + \frac{(\alpha-1)}{r^2}\frac{A}{r^2} - \frac{1}{r}B' - \frac{B}{r^2} + \frac{1}{r}C' - \frac{C}{r^2}\right)\left(n_{yi}v_j + n_{yj}v_i\right)\right\}$$

$$P_{ij}^{*[5]} = b_2 e_1\left\{\left[\left(A' - \frac{3A}{r}\right)d_1^2 + \frac{A}{r}\right]v_i v_j + \right.$$

$$+\left[\left(B'-\frac{B}{r}\right)d_1^2+\frac{B}{r}\right]\delta_{ij}+\left(B'-\frac{B}{r}+\frac{A}{r}\right)d_1 n_{yi}v_j+$$

$$+\left(C'-\frac{C}{r}+\frac{A}{r}\right)d_1 v_i n_{yj}+\frac{B+C}{r}n_{yi}n_{yj}\quad\Bigg\}$$

$$P_{ij}^{*[6]}=-b_2\left\{\left[\left(A'-\frac{3A}{r}\right)e_2+\frac{A}{r}e_1\right]v_i v_j++\left[\left(B'-\frac{B}{r}\right)e_2+\frac{B}{r}e_1\right]\delta_{ij}\right.$$

$$\left.+\frac{A}{r}\left[\beta_{ij}+\beta_{ji}\right]+\left(B'-\frac{B}{r}\right)\phi_{ij}+\left(\frac{dC}{dr}-\frac{C}{r}\right)\phi_{ji}+\frac{C}{r}\alpha_{ji}+\frac{B}{r}\alpha_{ij}\right\}$$

As derivadas direcionais dos tensores anteriores são apresentadas nas expressões (5-16)-(5-19).

A derivação direcional do tensor de deslocamentos:

$$\frac{\partial U_{ij}^*}{\partial n_{\mathbf{x}}}=b_1\left[-Y'd_2\delta_{ij}+(X'-2\frac{X}{r})d_2 v_i v_j+\frac{X}{r}\left(n_{xi}v_j+v_i n_{xj}\right)\right] \tag{5-16}$$

A derivação direcional do tensor de deslocamentos de segunda ordem:

$$\frac{\partial Q_{ij}^*}{\partial n_{\mathbf{x}}}=b_1\left[-\left(5\frac{X'}{r}-\frac{8X}{r}-X''\right)d_2 d_1 v_i v_j-\left(\frac{2X}{r^2}-\frac{X'}{r}\right)d_1\left(n_{xi}v_j+v_i n_{xj}\right)\right.$$

$$-\left(Y''-\frac{Y'}{r}\right)d_2 d_1\delta_{ij}-\frac{Y'}{r}d_3\delta_{ij}-\left(\frac{2X}{r^2}-\frac{X'}{r}\right)d_2 n_{yi}v_j+\frac{X}{r^2}n_{yi}n_{xj}$$

$$\left.-\left(\frac{2X}{r^2}-\frac{X'}{r}\right)d_2 v_i n_{yj}+\frac{X}{r^2}n_{xi}n_{yj}\right] \tag{5-17}$$

A derivação da força de segunda ordem **R** é:

$$\frac{\partial R_{ij}^*}{\partial n_{\mathbf{x}}}=b_2\left[-\left(A_1'-\frac{4A_1}{r}\right)d_1^2 d_2 v_i v_j-\frac{2A_1}{r}d_1 d_3 v_i v_j-\frac{A_1}{r}d_1^2\left(n_{xi}v_j+v_i n_{xj}\right)-\left(A_6'-\frac{2A_6}{r}\right)d_2 v_i v_j\right.$$

$$-\left(A_2'-\frac{2A_2}{r}\right)d_1^2 d_2\delta_{ij}-\frac{2A_2}{r}d_1 d_3\delta_{ij}-A_7'd_2\delta_{ij}-\left(A_3'-\frac{2A_3}{r}\right)d_1 d_2 n_{yi}v_j-\frac{A_3}{r}d_1 n_{yi}n_{xj}$$

$$\left.-\left(A_4'-2\frac{A_4}{r}\right)d_1 d_2 v_i n_{yj}-\frac{A_4}{r}d_3 v_i n_{yj}-\frac{A_4}{r}d_1 n_{xi}n_{yj}-A_5'd_2 n_{yi}n_{yj}\right] \tag{5-18}$$

A derivação direcional das forças de superfície é:

$$\frac{\partial P_{ij}^{*}}{\partial n_{\mathrm{x}}} = \partial P_{ij}^{*[1]} + \partial P_{ij}^{*[2]} + \partial P_{ij}^{*[3]} + \partial P_{ij}^{*[4]} + \partial P_{ij}^{*[5]} + \partial P_{ij}^{*[6]} \tag{5-19}$$

$$\partial P_{ij}^{*[1]} = b_2 \Bigg[-\left(A' - \frac{3A}{r} \right) d_1 d_2 v_i v_j - \frac{A}{r} d_3 v_i v_j - \frac{A}{r} d_1 \left(n_{xi} v_j + v_j n_{xj} \right) - \left(B' - \frac{B}{r} \right) d_1 d_2 \delta_{ij} - \frac{B}{r} d_3 \delta_{ij}$$

$$- \left(B' - \frac{B}{r} \right) d_2 n_{yi} v_j - \frac{B}{r} n_{yi} n_{xj} - \left(C' - \frac{C}{r} \right) d_2 v_i n_{yj} - \frac{C}{r} n_{xi} n_{yj} \Bigg]$$

$$\partial P_{ij}^{*[2]} = b_2 \Bigg[-\left(B_1' - \frac{5B_1}{r} \right) d_1^3 d_2 v_i v_j - \frac{3B_1}{r} d_1^2 d_3 v_i v_j - \frac{B_1}{r} d_1^3 \left(n_{xi} v_j + v_i n_{xj} \right)$$

$$- \left(B_2' - \frac{3B_2}{r} \right) d_1 d_2 v_i v_j - \frac{B_2}{r} d_3 v_i v_j + \frac{B_2}{r} d_1 \left(n_{xi} v_j + v_i n_{xj} \right) - \left(B_3' - \frac{3B_3}{r} \right) d_1^{\,3} d_2 \delta_{ij}$$

$$- \frac{3B_3}{r} d_1^2 d_3 \delta_{ij} - \left(B_4' - \frac{B_4}{r} \right) d_1 d_2 \delta_{ij} - \frac{B_4}{r} d_3 \delta_{ij} - \left(B_5' - \frac{B_5}{r} \right) d_1^2 d_2 v_i n_{yj} - \frac{2B_5}{r} d_1 d_3 v_i n_{yj}$$

$$- \frac{B_5}{r} d_1^{\,2} n_{xi} n_{yj} - \left(B_6' - \frac{B_6}{r} \right) d_2 v_i n_{yj} - \frac{B_6}{r} n_{xi} n_{yj} - \left(B_7' - \frac{3B_7}{r} \right) d_1^2 d_2 n_{yi} v_j - \frac{2B_7}{r} d_1 d_3 n_{yi} v_j$$

$$- \frac{B_7}{r} d_1^2 n_{yi} n_{xj} - \left(B_8' - \frac{B_8}{r} \right) d_2 n_{yi} v_j - \frac{B_8}{r} n_{yi} n_{xj} - \left(B_9' - \frac{B_9}{r} \right) d_1 d_2 n_{yi} n_{yj} - \frac{B_9}{r} d_3 n_{yi} n_{yj} \Bigg]$$

$$\partial P_{ij}^{*[3]} = -b_2 \Bigg[\left(F_1' - \frac{3F_1}{r} \right) d_1 d_2 v_i v_j - \frac{F_1}{r} d_3 v_i v_j - \frac{F_1}{r} d_1 \left(n_{xi} v_j + v_i n_{xj} \right) - \left(F_2' - \frac{F_2}{r} \right) d_1 d_2 \delta_{ij}$$

$$- \left(F_2' - \frac{F_2}{r} \right) d_2 n_{yi} v_j - \frac{F_2}{r} n_{yi} n_{xj} - \left(F_3' - \frac{F_3}{r} \right) d_2 v_i n_{yj} - \frac{F_3}{r} n_{xi} n_{yj} \Bigg]$$

$$\partial P_{ij}^{*[4]} = -b_2 \Bigg[\left(D_1' - \frac{3D_1}{r} \right) d_1 d_2 v_i v_j - \frac{D_1}{r} d_3 v_i v_j - \frac{D_1}{r} d_1 \left(n_{xi} v_j + v_i n_{xj} \right) - \left(D_2' - \frac{D_2}{r} \right) d_1 d_2 \delta_{ij}$$

$$- \frac{D_2}{r} d_3 \delta_{ij} - \left(D_3' - \frac{D_3}{r} \right) d_3 \left(n_{yi} v_j + v_i n_{yj} \right) - \frac{D_3}{r} \left(n_{yi} n_{xj} + n_{xi} n_{yj} \right) \Bigg]$$

$$\partial P_{ij}^{*[5]} = b_2 e_1 \Bigg[-\left(A_1' - \frac{3A_1}{r} \right) d_1^{\,2} d_2 v_i v_j - \frac{2A_1}{r^2} d_1 d_3 v_i v_j - \frac{A_1}{r} d_1^2 \left(n_{xi} v_j + v_i n_{xj} \right)$$

$$-\left(A_6'-\frac{2A_6}{r}\right)d_2\delta_{ij}-\frac{A_6}{r}\left(n_{xi}v_j+v_in_{xj}\right)-\left(A_2'-\frac{2A_2}{r}\right)d_1^2d_2\delta_{ij}-\frac{2A_2}{r}d_1d_3\delta_{ij}$$

$$-A_7'd_2\delta_{ij}-\left(A_3'-\frac{2A_3}{r}\right)d_1d_2n_{yi}v_j-\frac{A_3}{r}d_3\frac{n_{yi}v_j}{r}-\frac{A_3}{r}d_1n_{xi}n_{xj}-\left(A_4'-\frac{2A_4}{r}\right)d_1d_2v_in_{yj}$$

$$\left.-\frac{A_4}{r}d_3v_in_{yj}-\frac{A_4}{r}d_1n_{xi}n_{xj}-A_5'd_2n_{yi}n_{yj}\quad\right]$$

$$\partial P_{ij}^{*[6]}=b_2\left\{\left[\left(A_1'-\frac{4A_1}{r}\right)d_2e_2+\frac{A_1}{r}e_3+\left(A_6'-\frac{2A_6}{r}\right)d_2e_1\quad\right]v_iv_j\right.$$

$$\left[\left(A_2'-\frac{2A_2}{r}\right)d_2e_2+\frac{A_2}{r}e_3+A_7'e_1\right]\delta_{ij}+\left(\frac{A_6}{r}e_1+\frac{A_1}{r}e_2\right)\left(n_{xi}v_j+v_in_{xj}\right)$$

$$\left(A_6'-\frac{A_6}{r}\right)d_2\left(\beta_{ij}+\beta_{ji}\right)+\frac{A_6}{r}\left(\theta_{ij}^{<1>}+\theta_{ij}^{<2>}+\theta_{ij}^{<3>}\right)+\left(A_2'-\frac{2A_2}{r}\right)d_2\theta_{ij}^{<4>}+\frac{A_2}{r}\theta_{ij}^{<5>}$$

$$\left.\left(A_9'-\frac{2A_9}{r}\right)d_2\theta_{ji}^{<4>}+\frac{A_9}{r}\theta_{ji}^{<5>}+A_8'd_2\alpha_{ji}+A_7'd_2\alpha_{ij}\quad\right\}$$

A derivação direcional da tensão de descontinuidade geométrica:

$$\frac{\partial E_{ij}^*}{\partial n_{\mathbf{x}}}=b_2\left\{\left[-\left(A_1'-\frac{4A_1}{r}\right)d_1d_2d_4+\frac{A_1}{r}d_3d_4+\frac{A_1}{r}d_1d_5\quad\right]v_iv_j-\frac{A_1}{r}d_1d_4\left(n_{xi}v_j+v_in_{xj}\right)\right.$$

$$\left[\left(A_2'-\frac{2A_2}{r}\right)d_2d_1d_4+\frac{A_2}{r}d_3d_4+\frac{A_1}{r}d_1d_5\right]\delta_{ij}-\left(A_2'-\frac{A_2}{r}\right)d_2\frac{m_{yi}v_j}{r}-\frac{A_2}{r}m_{yi}n_{xj}$$

$$\left(A_9'-\frac{A_9}{r}\right)d_2v_im_{yj}-\frac{A_9}{r}n_{xi}m_{yj}-\left[\left(A_6'-\frac{2A_6}{r}\right)d_2d_5+\frac{A_6}{r}d_5\right]n_{yi}v_{xj}$$

$$-\frac{A_6}{r}d_4n_{yi}n_{xj}-\left[\left(A_6'-\frac{2A_6}{r}\right)d_2d_5+\frac{A_6}{r}d_5\right]v_in_{yj}-\frac{A_6}{r}d_4n_{xi}n_{yj}$$

$$\left.-A_8'd_2n_{yi}m_{yj}-A_7'd_2m_{yi}n_{yj}\quad\right\}$$

A seguir apresentam-se variáveis e parâmetros que encontram-se contidos nas expressões apresentadas acima.

$$\alpha=\begin{cases}2,\text{ para } 2\text{-D}\\3,\text{ para } 3\text{-D}\end{cases}$$

$$b_1 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\ ;\ b_2 = \frac{g^2}{16\pi\mu(1-\nu)};\ b_3 = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \tag{5-20}$$

As variáveis adicionais escalares dentro cada termo estão expressas por:

$$\left.\begin{aligned}
d_1 &= \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = n_{yk} v_k \\
d_2 &= \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = n_{xk} v_k \\
d_3 &= \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{y}} = n_{xk} n_{yk} \\
d_4 &= \hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = m_{yk} v_k \\
d_5 &= \hat{\mathbf{m}}_{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} = m_{yk} n_{xk}
\end{aligned}\right\} \tag{5-21}$$

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= \nabla_S \cdot \hat{\mathbf{n}}_y = n_{yk,k} - n_{yi} n_{yi} n_{yi,j} \\
e_2 &= \left(\nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y\right) : \left(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}\right) = \alpha_{ij} v_i v_j \\
e_3 &= \left(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}}\right) : \left(\nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y\right) = \left(n_{xi} v_j + v_i n_{xj}\right) \alpha_{ij}
\end{aligned}\right\} \tag{5-22}$$

Tensores que também encontram-se dentro dos termos de integração:

$$\left.\begin{aligned}
[\alpha] &= \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y && \rightarrow \alpha_{ij} = n_{yi,j} - n_{yi} n_{yk} n_{yk,j} \\
[\beta] &= \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y && \rightarrow \beta_{ij} = v_i v_k \alpha_{kj} \\
[\varepsilon] &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} && \rightarrow \varepsilon_{ij} = v_j v_k \alpha_{ki} = \beta_{ji} \\
[\phi] &= \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} && \rightarrow \phi_{ij} = v_j v_k \alpha_{ik} \\
[\gamma] &= \hat{\mathbf{r}} \otimes \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}} && \rightarrow \gamma_{ij} = v_i v_k \alpha_{jk} = \phi_{ji}
\end{aligned}\right\} \tag{5-23}$$

$$\left.\begin{aligned}
\left[\theta^{<1>}\right] &= \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} \otimes \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}} && \rightarrow \theta_{ij}^{<1>} = n_{xk} \alpha_{ki} v_j \\
\left[\theta^{<2>}\right] &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \otimes \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} && \rightarrow \theta_{ij}^{<2>} = v_k n_{kj} \alpha_{ki} \\
\left[\theta^{<3>}\right] &= \left(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}}\right) \cdot \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y && \rightarrow \theta_{ij}^{<3>} = (n_{xi} v_k + v_i n_{xk}) \alpha_{kj} \\
\left[\theta^{<4>}\right] &= \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} && \rightarrow \theta_{ij}^{<4>} = v_k v_j \alpha_{ik} \\
\left[\theta^{<5>}\right] &= \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \left(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}}\right) && \rightarrow \theta_{ij}^{<5>} = \alpha_{ik} (n_{xk} v_j + v_k n_{xj}) \\
\left[\theta^{<6>}\right] &= \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y\right)^T && \rightarrow \theta_{ij}^{<6>} = v_i v_k \alpha_{jk} = \theta_{iji}^{<4>} \\
\left[\theta^{<7>}\right] &= \left(\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}}\right) \cdot \left(\nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y\right)^T && \rightarrow \theta_{ij}^{<7>} = (n_{xi} v_k + v_i n_{xk}) \alpha_{jk} = \theta_{ji}^{<5>}
\end{aligned}\right\} \tag{5-24}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A = 2\left(\frac{2X}{r} - X'\right),\ B = Y' - \frac{X}{r},\ C = \frac{2\nu}{1-\nu}\left(Y' - X' - \frac{(\alpha-1)}{r}X\right) - \frac{2X}{r}\\
&A_1 = A' - \frac{3A}{r},\ A_2 = B' - \frac{B}{r},\ A_3 = B' - \frac{B}{r} + \frac{A}{r},\ A_4 = C' - \frac{C}{r} + \frac{A}{r}\\
&A_5 = \frac{(B+C)}{r},\ A_6 = \frac{A}{r};\ A_7 = \frac{B}{r},\ \ A_8 = \frac{C}{r},\ A_9 = C' - \frac{C}{r}
\end{aligned}\right\}\tag{5-25}$$

$$\left.\begin{aligned}
&B_1 = A'' - \frac{7}{r}A' + \frac{15A}{r^2};\ B_2 = \frac{3}{r}A' - \frac{9A}{r^2},\ B_3 = B'' - \frac{3}{r}B' + \frac{3B}{r^2}\\
&B_4 = \frac{3}{r}B' - \frac{3B}{r^2},\ B_5 = C'' - \frac{3}{r}C' + \frac{3C}{r^2} + \frac{2}{r}A' - \frac{6A}{r^2},\\
&B_6 = \frac{2A}{r^2} + \frac{1}{r}C' - \frac{C}{r^2}\\
&B_7 = B'' - \frac{3}{r}B' + \frac{3B}{r^2} + \frac{2}{r}A' - \frac{6A}{r^2},\ B_8 = \frac{2A}{r^2} + \frac{1}{r}B' - \frac{B}{r^2}\\
&B_9 = \frac{2B'}{r} - \frac{2B}{r^2} + \frac{2}{r}C' - \frac{2C}{r^2} + \frac{2A}{r^2}
\end{aligned}\right\}\tag{5-26}$$

$$\left.\begin{aligned}
&F_1 = A'' + \frac{(\alpha-1)}{r}A' - \frac{3(\alpha+1)}{r^2}A;\\
&F_2 = B'' + \frac{(\alpha-1)}{r}B' - \frac{(\alpha-1)}{r^2}B - \frac{2A}{r^2}\\
&F_3 = C'' + \frac{(\alpha-1)}{r}C' - \frac{(\alpha-1)}{r^2}C + \frac{2A}{r^2}
\end{aligned}\right\}\tag{5-27}$$

$$\left.\begin{aligned}
&D_1 = A'' + \frac{(\alpha-3)}{r}A' + \frac{3(1-\alpha)}{r^2}A + B'' - \frac{3}{r}B' + \frac{3}{r}B + C'' - \frac{3}{r}C' + \frac{3}{r^2}C\\
&D_2 = B'' + \frac{\alpha}{r}B' - \frac{\alpha}{r^2}B + \frac{1}{r}C' - \frac{1}{r^2}C\\
&D_3 = \frac{1}{r}A' + \frac{(\alpha-1)}{r^2}A + \frac{1}{r}B' - \frac{1}{r^2}B + \frac{1}{r}C' - \frac{1}{r^2}C
\end{aligned}\right\}\tag{5-28}$$