4 Solução Fundamental na Elasticidade Gradiente

4.1. Introdução

Na formulação do método de elementos de contorno, Polyzos et al [13]-[14], apresenta-se um desenvolvimento detalhado da determinação da solução fundamental na elasticidade gradiente. Conforme apresentado na expressão (4-1), a solução fundamental manifesta o efeito escala através da relação do comprimento do raio e a constante *g* (*r/g*), os quais são argumentos das funções Bessel modificada para o caso 2D e a função exponencial no caso 3D; eles são somados a termos hiper-singulares de ordem $O(1/r^2)$ para o caso 2D e $O(1/r^3)$ para o caso 3D. Quando $r/g \rightarrow 0$ a solução fundamental tende ao caso clássico.

A equação fundamental vem da equação diferencial de quarta ordem apresentada na formulação simplificada de Mindlin:

$$\mu\, u^*_{i,kk} + (\lambda+\mu)u^*_{j,ji} - g^2\left[\mu\, u^*_{i,jjkk} + (\lambda+\mu)u^*_{j,jikk}\right] = 0 \qquad (4\text{-}1)$$

4.2. Solução da Equação Diferencial

Polyzos et al [13] começa a apresentação da solução da equação diferencial utilizando a decomposição de Hemholtz em uma parte irrotacional e outra solenoidal. A solução fundamental obtida finalmente é a seguinte:

$$u^*_{im} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[Y(r,\nu,g)\delta_{im} - X(r,g)r_{,i}r_{,m}\right] \qquad (4\text{-}2)$$

onde:

ν: módulo de Poisson,

g: constante da energia de deformação volumétrica

$\bar{\mathrm{r}} = \bar{\mathrm{x}} - \bar{\mathrm{y}} = \begin{cases} [r_1, r_2] & \text{para 2D} \\ [r_1, r_2, r_3] & \text{para 3D} \end{cases}$, é vetor geométrico ilustrado na Figura 5.

Na Figura 5 são também ilustrados os vetores normais $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{y}$.

O módulo do vetor **r, o** vetor unitário na direção **r** e a derivada parcial do módulo do raio são obtidos pelas seguintes expressões:

$$r^2 = r_i r_i\,; \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r} \quad ;\ r_{,j} = \frac{r_j}{r} \tag{4-3}$$

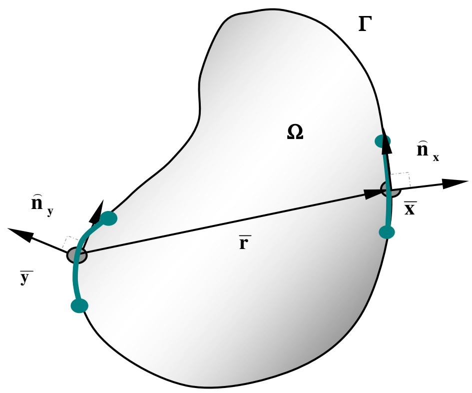


Figura 27. - Grandezas vetoriais utilizadas para a integração do Método de Elementos de Contorno.

As funções X e Y apresentadas na expressão (4-2) são descritas como:

$$X = \begin{cases} -2 + \dfrac{8g^2}{r^2} - 4K_2\left(\dfrac{r}{g}\right) & 2D \\ -\dfrac{1}{r} + \dfrac{6g^2}{r^3} - \left(\dfrac{6g^2}{r^3} + \dfrac{6g}{r^2} + \dfrac{2}{r}\right)e^{-r/g} & 3D \end{cases} \tag{4-4}$$

$$Y = \begin{cases} -2(3-4\nu)\ln r + \dfrac{4g^2}{r^2} - 2(3-4\nu)K_0\left(\dfrac{r}{g}\right) - 2K_2\left(\dfrac{r}{g}\right) & \text{para } 2D \\ (3-4\nu)\dfrac{1}{r} + 2(1-2\nu)\left[-\dfrac{g^2}{r^3} + \left(\dfrac{g^2}{r^3} + \dfrac{g}{r^2}\right)e^{-r/g}\right] + \\ \qquad 4(1-\nu)\left[\dfrac{g^2}{r^3} - \left(\dfrac{g^2}{r^3} + \dfrac{g}{r^2} + \dfrac{1}{r}\right)e^{-r/g}\right] & \text{para } 3D \end{cases} \tag{4-5}$$

onde K_0 e K_2 são as funções de Bessel modificadas de segundo tipo e das ordens 0 e 2 respectivamente.

Quando o coeficiente gradiente g tende a zero, pode-se comprovar facilmente que:

$$X = \begin{cases} -2 & 2D \\ -\dfrac{1}{r} & 3D \end{cases} \qquad\qquad Y = \begin{cases} -2(3-4\nu)\ln r & 2D \\ -2(3-4\nu)\ln r & 3D \end{cases} \tag{4-6}$$

essas expressões representam a solução fundamental clássica estática.

Se essas grandezas são utilizadas na forma de series expandidas em 2D, tem-se:

$$X = \left(\frac{r^2}{2g^2} + O(r^4)\right)\ln(r) + \left(\frac{4\ln(1/2g) + 4\gamma + 3}{8g^2}\right)r^2 + O(r^4) \tag{4-7}$$

$$\begin{aligned} Y = &\left(\frac{(8\nu-7)r^2}{4g^2} + O(r^4)\right)\ln(r) + \left(1 - 6(\ln(2g) - \gamma) + 8\nu(\ln(2g) - \gamma)\right) \\ &-\left(\frac{28(\ln(2g) - \gamma)}{16g^2}\right)r^2 + O(r^4) \end{aligned} \tag{4-8}$$

Pode-se verificar que ambas as expressões são regulares em relação a r, e que a singularidade do caso clássico vai embora quando r→0 e é possível fazer o cálculo do deslocamento para r=0, conforme é mostrada na expressão abaixo:

$$\left. u^*_{im} \right|_{r=0} = \frac{1 + 2(4\nu - 3)(\ln(2\mathrm{g}) - \gamma)}{16\pi(1-\nu)\mu}\delta_{im} \tag{4-9}$$

onde γ é a constante de Euler.

Analogamente, no caso 3D depois de transformar a X e Y séries, tem-se que o deslocamento da solução fundamental para r=0 é:

$$\left. u^*_{im} \right|_{r=0} = \frac{6\nu - 5}{24\pi(1-\nu)\mu g}\delta_{im} \tag{4-10}$$

4.3. Comparação das Forças de Superfície Clássicas e Não-clássicas

Caso se aplique uma carga unitária no ponto de origem e se integre o campo de forças de superfície ao redor de um contorno circular **Γ,** conforme ilustrado na Figura 6, utilizando as expressões (4-10) e (4-11), verifica-se que a integral de forças, aparentemente, não fica equilibrada com a força unitária aplicada. Se, por outro lado, fizesse-se o mesmo como a tensão total $\sigma_{jim} n_j$, então é possível a obtenção do equilíbrio. Esse é um aspecto interessante da elasticidade gradiente.

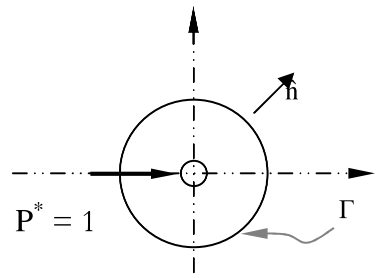


Figura 28. - Integração da força de superfície no contorno circular Γ

Na equação seguinte é mostrada essa diferença:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{jim} n_j \mathrm{d}\Gamma = -\delta_{im} \neq \int_{\Gamma} \tilde{P}^{*}_{im} \mathrm{d}\Gamma = -[1+(2r-1)K_0(r/g)+\frac{2gK_1(r/g)}{r}+\frac{2g^2}{r^2}]\delta_{im} \qquad (4\text{-}11)$$

onde:

$$\tilde{P}^{*}_{im} = \underbrace{n_j \tilde{\tau}_{jim} - \tilde{\mu}_{kjim,k} n_j}_{\sigma_{jim} n_j} - \tilde{\mu}_{kjim,l} n_j n_k n_l - \tilde{\mu}_{kjim,j} n_k + (D_p n_p)\tilde{\mu}_{kjim} n_j n_k + (D_j n_k)\tilde{\mu}_{kjim} \qquad (4\text{-}12)$$

K_o e K_1 são as funções de Bessel modificadas.

O caso onde $g \to 0$ é similar a considerar $r \to \infty$ e a integração da força de superfície tende ao caso clássico, ou seja, ao delta de Kronecker δ_{im}.

4.4. Comportamento da Solução Fundamental

Como parte do estudo de uma nova teoria de elasticidade não clássica nesta seção apresenta se o efeito escala de g: o único parâmetro constitutivo adicional à teoria clássica. O objetivo desse item é apresentar as semelhanças entre a teoria clássica e não clássica e em qual direção elas se afastam.

Com esse objetivo foi esboçado o comportamento de parâmetros comumente usados como os deslocamentos u_x, u_y, e as deformações ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{xy} nos eixos de avaliação paralelos aos eixos principais x e y. A força singular utilizadas é aplicada na origem e na direção x.

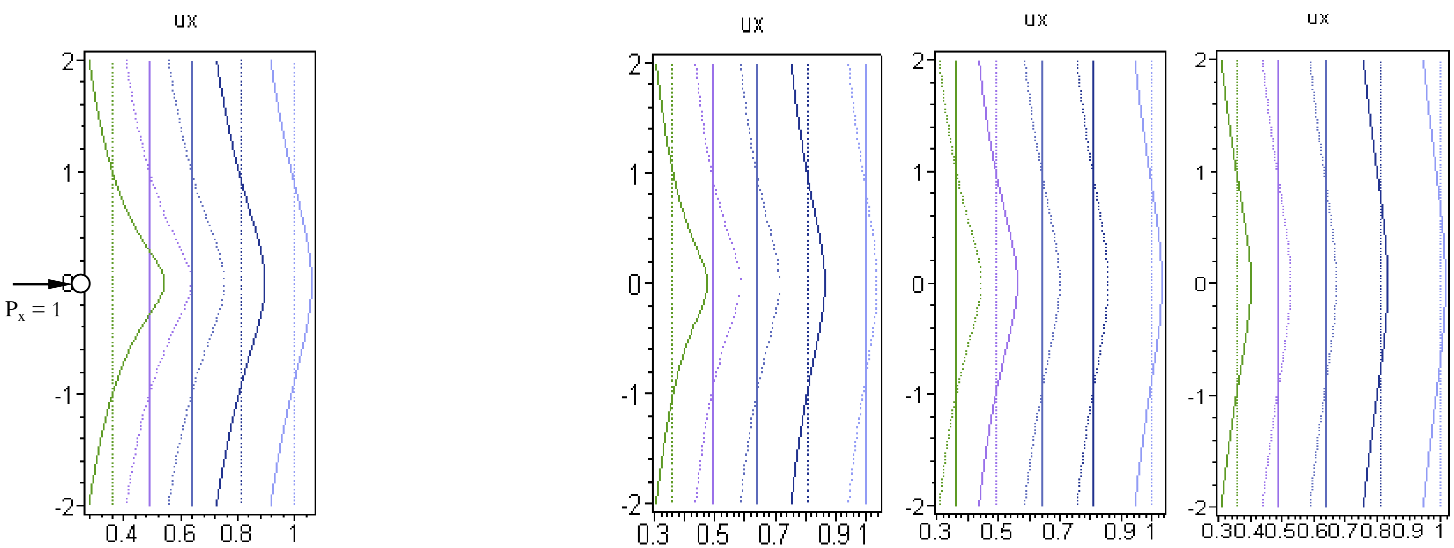
Na Figura 29 é ilustrada a sensibilidade da solução fundamental da elasticidade gradiente e a convergência dela à solução clássica quando $g \to 0$, para uma carga unitária e paralela ao eixo *x*. A constante *g* gera uma redução dos deslocamentos paralelos ao carregamento quando ela aumenta.

Na Figura 30 são ilustrados os deslocamentos transversais à carga unitária e como estes são afeitados pelo valor de *g* fazendo dele menos oscilante e mais uniforme.

Na Figura 31 é ilustrado o comportamento das deformações paralelas e transversais à carga unitária. Pode-se também verificar que a distribuição delas é se mais uniforme e menos oscilante quando *g* aumenta.

DESLOCAMENTOS SOLUÇÃO FUNDAMENTAL 2D PARA P_X=1

u_x eixos x = {0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1}, intervalo de y = [-2,2]



g=0 g=0.1 g=0.3 g=0.6

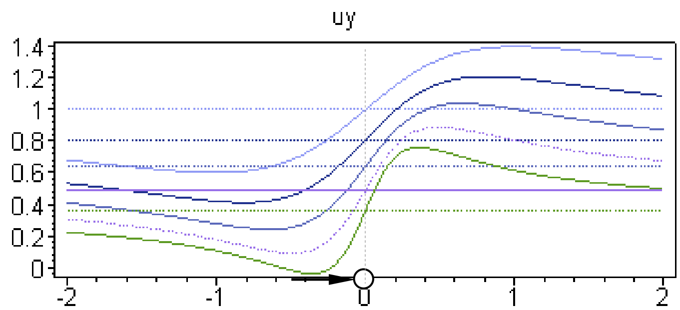
Clássico Elasticidade Gradiente

Figura 29.- Comportamento da Solução Fundamental: Deslocamento na direção da Carga

CAMPO DESLOCAMENTOS SOLUÇÃO FUNDAMENTAL 2D

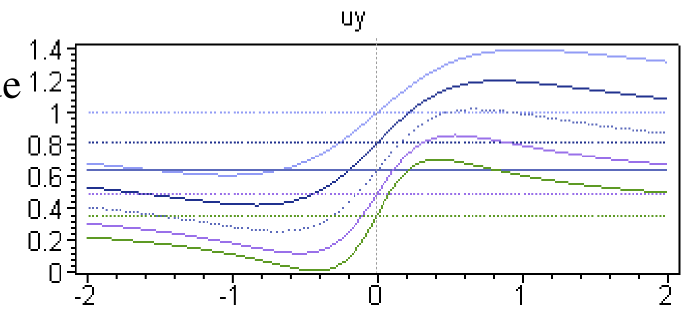
u_y eixos y = {0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1}, rango de x = [-2,2]

Clássico

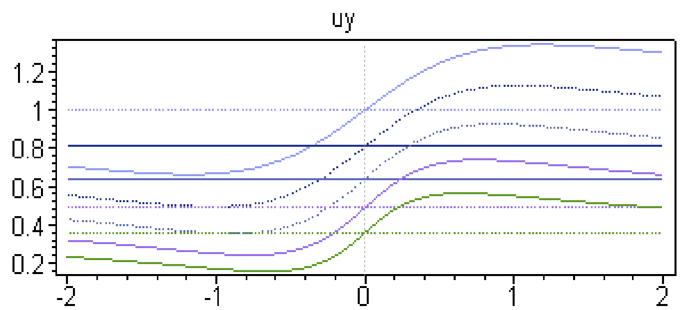


Elasticidade Gradiente

g=0.1



g=0.3



g=0.6

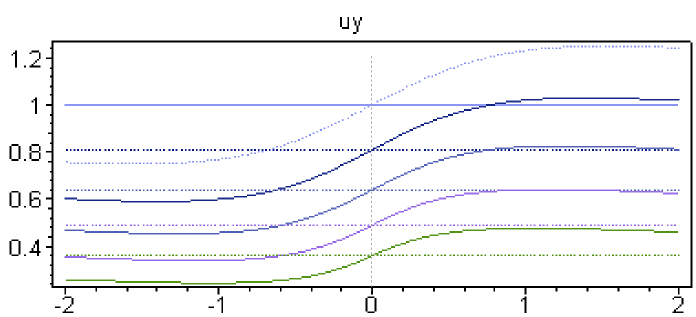


Figura 30.- Comportamento da Solução Fundamental: Deslocamento Perpendicular á Carga

DEFORMAÇÕES SOLUÇÃO FUNDAMENTAL 2D

ε_{xx} eixo x = {0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1}, rango de y = [-2,2]
ε_{yy} eixo y = {0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1}, rango de x = [-2,2]

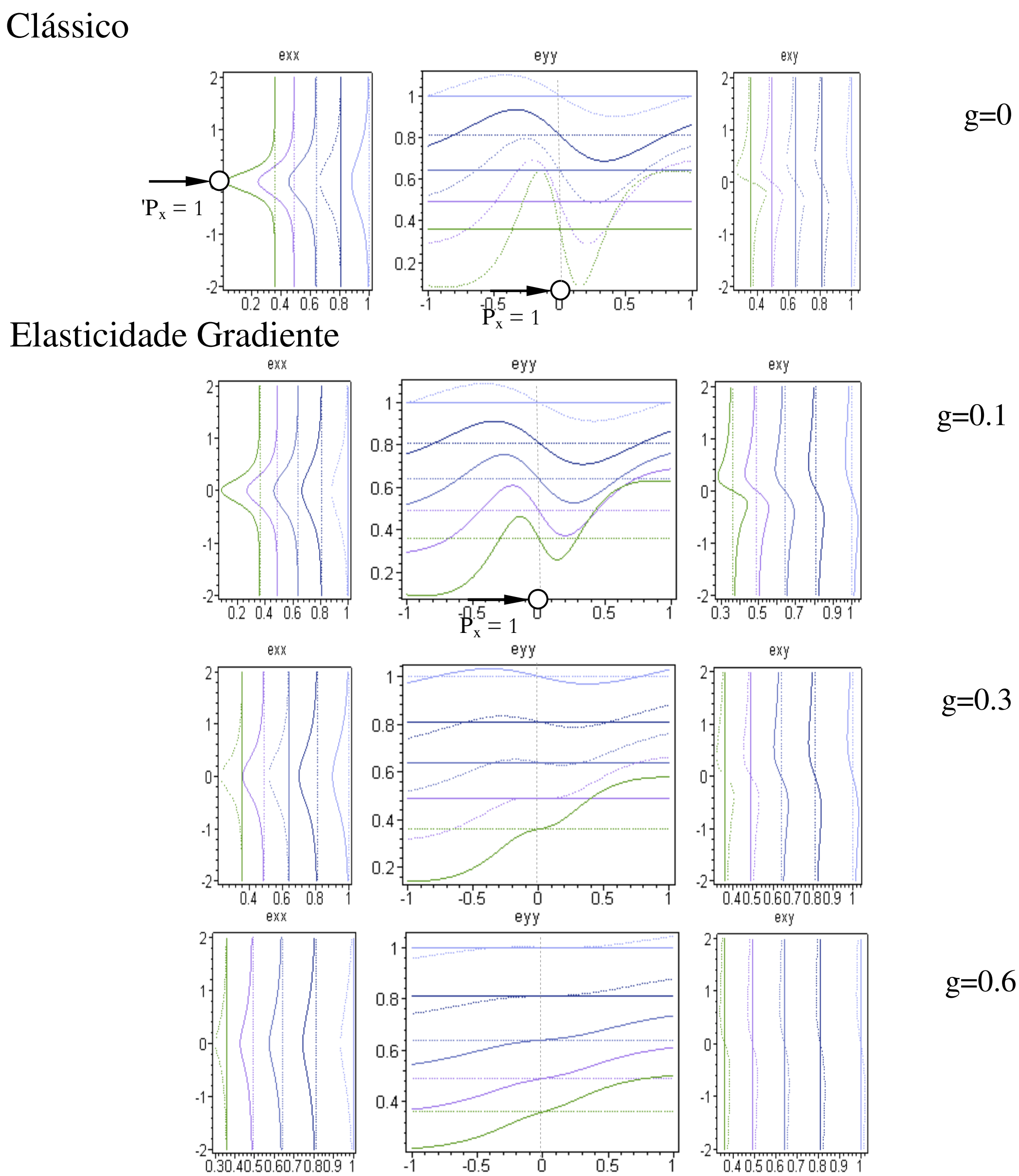


Figura 31.- Comportamento da Solução Fundamental: Deformações