

2 Teorias de Elasticidade Linear Não-Clássicas

2.1. Ecuaciones de Equilíbrio de Cosserat

Na mecânica dos meios contínuos para materiais com microestruturas, a interação entre forças e momentos externos que atuam num corpo é descrita por forças e momentos internos que são absorvidos pelas partículas através de forças internas diferenciais conforme ilustrado na Figura 1. Nesse caso pode-se afirmar que são duas as grandezas que representam as tensões internas: a primeira representa o carácter clássico do problema e é mostrada na expressão (2-1)₁ e a segunda tensão $\vec{\mu}$ incorpora o novo conceito de grandeza de segunda ordem, tensão de segunda ordem ou uma tensão dupla indicada na expressão (2-1)₂:

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad (2-1)$$

$$\vec{\mu} = \frac{d\vec{M}}{dS}$$

onde $\vec{\sigma}$ é a tensão clássica, $\vec{\mu}$ é a tensão dupla, $d\vec{F}$ representa as forças internas diferenciais e $d\vec{M}$ a densidade de momentos não-clássicos.

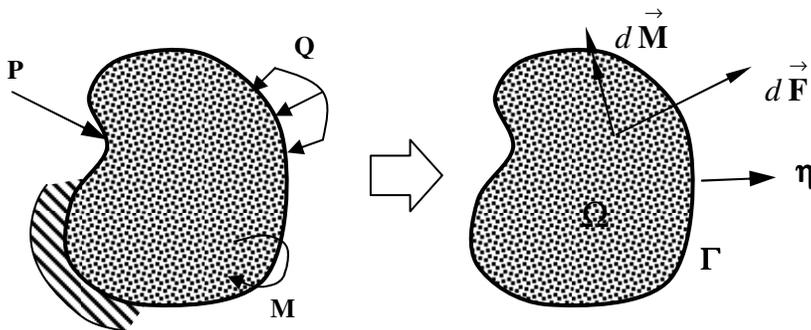


Figura 23. - Sistemas de partículas que conformam um sólido submetido a forças externas que são equilibradas por forças internas diferenciais clássicas $d\vec{F}$ e a uma densidade de momentos $d\vec{M}$ não-clássicos.

O equilíbrio entre as forças de superfície $\bar{\mathbf{p}}$ e as tensões internas σ_{ik} é dado por:

$$\bar{\mathbf{p}} = p_i \bar{\mathbf{i}}_i = \sigma_{ik} \eta_i \bar{\mathbf{i}}_k \quad (2-2)$$

A tensão dupla μ_{ij} depende do comprimento das partículas, para o caso limite da teoria clássica a tensão dupla tende a zero.

Na teoria da elasticidade generalizada conforme apresentada em Cosserat [5] as equações de equilíbrio na forma integral são apresentados nas expressões (2-3) e (2-4) onde se mostra o cálculo da força dupla R_i e o momento M_i em um domínio Ω e contorno Γ , de acordo com De Arante e Oliveira [10]:

$$R_i = \int_{\Omega} f_i d\Omega + \int_{\Gamma} \eta_j \quad (2-3)$$

$$M_i = \int_{\Omega} (\Phi_i + e_{ijk} r_k f_j) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mu_{li} + e_{ijk} \sigma_{jk}) \eta_l d\Gamma \quad (2-4)$$

onde os índices representam os eixos 1,2 e 3 no caso tridimensional, Φ_i são as componentes do vetor de densidade de momentos, σ_{ij} e μ_{ij} são os tensores de tensões totais generalizados aplicados em Ω e Γ . e_{ijk} é o tensor alternante 123 dado por:

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{permutação par 12312...} \\ -1 & \text{permutação impar 32132...} \\ 0 & \text{se tem dois subscritos iguais.} \end{cases}$$

É possível apresentar a equação de equilíbrio na forma indicial e infinitesimal para um ponto em geral dentro do domínio Ω :

$$\sigma_{j i, j} + f_i = 0 \quad (2-5)$$

$$\mu_{j i, j} + \Phi_i + e_{i j k} \sigma_{j k} = 0 \quad (2-6)$$

2.2. Elasticidade Linear das Microestruturas de Mindlin

Em Mindlin [2] foi desenvolvida uma teoria linear para microestruturas em 3D para materiais contínuos introduzindo a idéia de unidade celular. Nessa teoria foram propostas algumas propriedades equivalentes às malhas que compõem os

cristais. A unidade celular pode ser interpretada como a molécula de um polímero, o cristal de um poli-cristal ou o grão de um material granular.

O modelo matemático para uma célula é uma versão linear da teoria dos diretores deformáveis de Ericksen e Truesdel [4]. Se as células são rígidas, as equações reduzem-se ao contínuo linear de Cosserat [5].

Mindlin [2] utilizou a teoria de duplo esforço de Toupin [3] para a obtenção de uma generalização eliminando a diferença entre as deformações da unidade celular e o meio que encontra-se entorno ao ponto de análise.

2.2.1. Cinemática

Os deslocamentos de uma partícula são definidos classicamente pela diferença das coordenadas entre a posição original e final dentro de um macromeio Ω . Em Mindlin [2] foi feita uma extensão desse critério no âmbito de observação de um micro domínio Ω' . Assim, tem-se:

$$u_i = x_i - X_i \quad \text{em } \Omega \quad (2-7)$$

Supõe-se que dentro de Ω exista um micromeio Ω' dentro do qual é possível definir um microdeslocamento, ilustrado na Figura 24 e dado por:

$$u'_i = x'_i - X'_i ; \quad \text{em } \Omega' \quad (2-8)$$

Assume-se pequenos deslocamentos e obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} & \left| \frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right| &\ll 1 & \left| \frac{\partial u'_i}{\partial X'_i} \right| &\ll 1 \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{x}' - \mathbf{X}' & & & & \end{aligned} \quad (2-9)$$

Na Figura 2 são ilustrados os sistemas de coordenadas x , x' e x'' utilizados para esquematizar o problema.

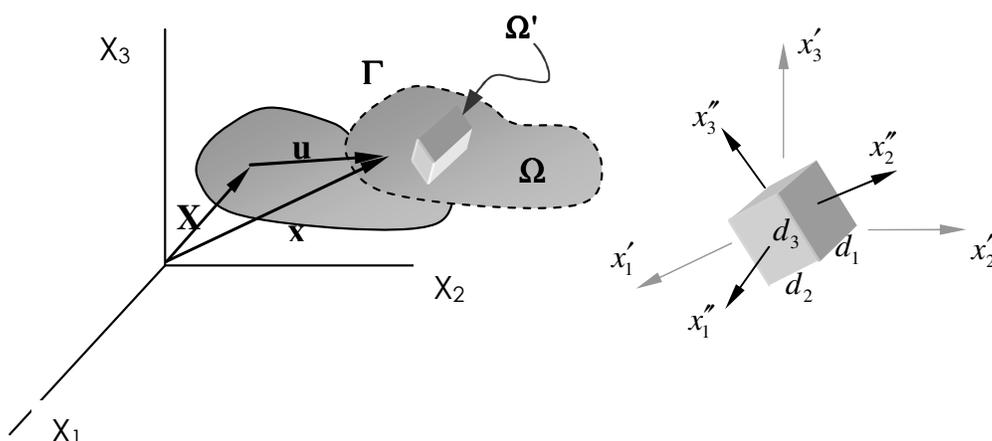


Figura 24. - Esquema do deslocamento no macromeio \mathbf{u} e micromeio \mathbf{u}' .

A expressão (2-9) permite equivalentemente à elasticidade clássica para pequenos deslocamentos considerar:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \partial_j u_i = u_{i,j} ; \quad u_i = u_i(x_i, t) \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial X'_j} \approx \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \partial_j u'_i = u'_{i,j} ; \quad u'_i = u'_i(x_i, t) \quad (2-11)$$

onde t é a variável tempo. Assume-se que os microdeslocamentos podem ser expressos como uma somatória de produtos de funções de x'_i e funções de x_i . Em Mindlin [2] foi considerado só um termo linear das series como aproximação do deslocamento no micromeio:

$$u'_j = x'_k \psi_{kj} \quad (2-12)$$

onde $\psi_{kj} = \psi_{kj}(x_i, t)$. Considerando (2-12) Mindlin [2] define o gradiente de deslocamento no micromeio como:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \partial'_j u'_i = u'_{i,j} = \psi \quad (2-13)$$

A expressão (2-13) gera que a microdeformação ψ_{ij} seja homogênea no micromeio Ω' e não homogênea dentro do macromeio Ω .

Na expressão (2-14) é definida a parte simétrica e antisimétrica da microdeformação respectivamente:

$$\psi_{(kj)} = (\psi_{kj} + \psi_{jk}) / 2 ; \quad \psi_{[kj]} = (\psi_{kj} - \psi_{jk}) / 2 \quad (2-14)$$

A deformação usual é designada aqui como uma *macrodeformação*:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-15)$$

A deformação relativa é expressa por:

$$\gamma_{ij} = u_{i,j} - \psi_{ij} \quad (2-16)$$

Na expressão abaixo apresenta-se o novo conceito de microdeformação (o macrogradiente da microdeformação):

$$\kappa_{ijk} = \psi_{ij,k} \quad (2-17)$$

Os três tensores ε_{ij} , γ_{ij} e $\kappa_{ij,k}$ são independentes da microcoordenada x'_i .

2.2.2. Equações de Compatibilidade

As propriedades das equações de compatibilidade apresentam-se a seguir pelas seguintes expressões:

$$e_{mik} e_{nlj} \varepsilon_{kl,ij} = 0 \quad (2-18)$$

$$e_{mik} \kappa_{jkl,i} = 0 \quad (2-19)$$

$$\varepsilon_{jk,i} + \omega_{jk,i} - \gamma_{jk,i} = \kappa_{ijk} \quad (2-20)$$

$$\omega_{ij} \equiv (u_{i,j} - u_{j,i}) / 2, \quad \text{onde } e_{ijk} \text{ é o tensor alternante } 123. \quad (2-21)$$

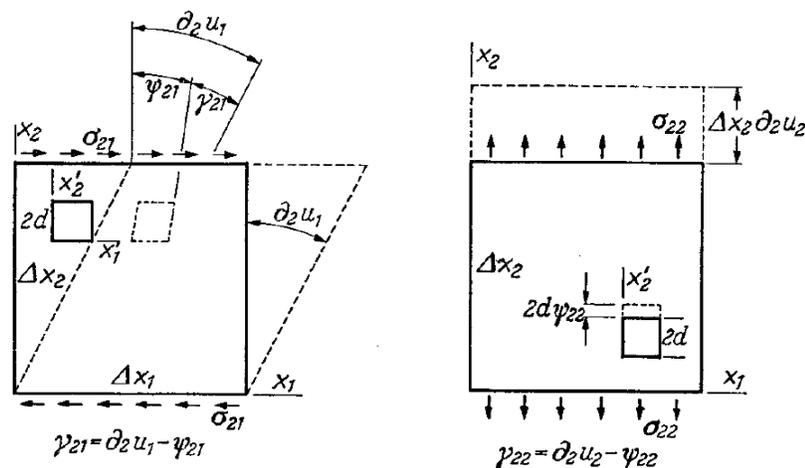


Figura 25.- Representação de dois deslocamentos ilustrativos de segunda ordem identificadas por Mindlin [2]

2.2.3. Equações Variacionais de Movimento

A seguir são apresentadas as equações integrais de energia cinética gerada por um sólido global e o sistema de partículas com coordenadas locais localizadas no micromeio.

a) Energia Cinética

A energia cinética total para dois sistemas de coordenadas locais da microestrutura x''_i e x'''_i tal como é mostrado por Mindlin [27], ilustradas nas Figuras 2 e 3, provém de somar na expressão clássica os termos vinculados com as funções de deformação interna ψ_{ij} :

$$K = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' d_{kl}^2 \dot{\psi}_{kj} \dot{\psi}_{kj} \right) d\Omega \right] dt \quad (2-22)$$

onde:

$d_{kl}^2 = 2d_p d_q (\delta_{p1} \delta_{q1} l_{k1} \quad l_{l1} + \delta_{p2} \delta_{q2} l_{k2} \quad l_{l2} + \delta_{p3} \delta_{q3} l_{k3} \quad l_{l3})$ são as dimensões da microestrutura ao quadrado, ver Figura 2.

$\rho = \rho' + \rho_m$: densidade total do contínuo.

ρ' : densidade do micromeio.

ρ_m : densidade do macromeio.

$2d_i$: comprimentos das unidades celulares.

l_{ij} : cossenos diretores da orientação da unidade celular x''_i com eixos x'_i .

Se x'_i e x''_i são paralelos e a microestrutura tem lados quadrados, então $l_{ij} = \delta_{ij}$ e $d_1 = d_2 = d_3 = d$. Nesse caso a variação da energia cinética simplifica-se depois de fazer uma integração por partes:

$$\delta K = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} \left(\rho \ddot{u}_j \delta u_j + \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{kj} \delta \psi_{kj} \right) d\Omega \right] dt \quad (2-23)$$

b) Energia Potencial

A energia potencial na elasticidade das microestruturas é influenciada pela nova componente da microdeformação κ_{ijk} mostrada na expressão (2-17).

$$U=U(\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}) \quad (2-24)$$

Define-se:

$$\tau_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ji}} \text{ Tensor de tensão de Cauchy} \quad (2-25)$$

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}} \text{ Tensor de tensão relativa} \quad (2-26)$$

$$\mu_{jik} = \frac{\partial U}{\partial \kappa_{jik}}, \text{ Tensão de segunda ordem ou tensão dupla} \quad (2-27)$$

Finalmente a variação da Energia Potencial é definida por:

$$\delta U = \int_{\Omega} (\tau_{ji} \delta \varepsilon_{ji} + \sigma_{ji} \delta \gamma_{ji} + \mu_{jik} \delta \kappa_{jik}) d\Omega \quad (2-28)$$

c) Trabalho das Forças Externas

O trabalho das forças externas difere do caso clássico pelo par de momentos Φ_{ji} e T_{ji} os quais são descritos na seguinte equação:

$$\delta V = \int_{\Omega} (f_i \delta u_i + \Phi_{ji} \delta \psi_{ji}) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_i \delta u_i + T_{ji} \delta \psi_{ji}) d\Gamma \quad (2-29)$$

onde:

Φ_{ji} : interpretada como uma força dupla por unidade de volume

T_{ji} : força dupla por unidade de área

A diagonal de Φ_{ji} e a diagonal de T_{ji} são forças duplas que não contêm momento, enquanto as forças restantes são forças duplas que sim contem momento.

Os tensores $\Phi_{[ji]}$ e $T_{[ji]}$ são respectivamente as somas anti-simétricas da força dupla de massa Φ_{ji} e da tensão dupla T_{ji} . $T_{[ji]}$ é o vetor de esforço duplo de Cosserat.

Quando $\psi_{(ji)}=0$ é possível obter as equações do continuo de Cosserat, dando como resultado que $\sigma_{(ji)}= \tau_{ij}$ e $\mu_{j(ik)}=0$; e que apenas os termos diferentes de zero sejam $\mu_{i[jk]}$ e $\sigma_{[ji]}$. O termo $\mu_{i[jk]}$ representa a tensão dupla de Cosserat e $\sigma_{[ji]}$ é considerada como a parcela anti-simétrica da tensão assimétrica τ_{ji} .

e) Equações de Equilíbrio Dinâmico.

Mindlin [2] deduz através de equações variacionais de movimento 12 equações de equilíbrio e tensão:

$$\tau_{ji,j} + \sigma_{ji,j} = \rho \ddot{u}_i ; 3 \text{ equações em } \Omega \quad (2-30)$$

$$\mu_{jik,j} + \sigma_{ik} + \Phi_{ik} = \frac{1}{3} \rho' d_{li}^2 \ddot{\psi}_{lk} ; 9 \text{ equações em } \Omega \quad (2-31)$$

f) Equações de Condições de Contorno

De forma análoga Mindlin [2] mostra 12 condições de contorno:

$$t_i = \eta_j (\tau_{ji} + \sigma_{ji}) , \text{ em } \Gamma \quad (2-32)$$

$$T_{ik} = \eta_j \mu_{jik} , \text{ em } \Gamma \quad (2-33)$$

2.2.4. Equações Constitutivas

Nas equações constitutivas de um material isotrópico o número de coeficientes é consideravelmente menor. As equações constitutivas estão dadas por:

$$\tau_{pq} = c_{ijpq} \varepsilon_{ij} + g_{ijpq} \gamma_{ij} + f_{ijkpq} \kappa_{ijk} \quad (2-34)$$

$$\sigma_{pq} = g_{ijpq} \varepsilon_{ij} + b_{ijpq} \gamma_{ij} + d_{ijkpq} \kappa_{ijk} \quad (2-35)$$

$$\mu_{pqr} = f_{pqrij} \varepsilon_{ij} + d_{ijpq} \gamma_{ij} + a_{pqrijk} \kappa_{ijk} \quad (2-36)$$

as quais somam 42 variáveis ε_{ij} , γ_{ij} , μ_{ijk} e 45 equações constitutivas. Dos $42 \times 42 = 1764$ coeficientes só $1/2 \times 42 \times 43 = 903$ são independentes.

2.2.5. Equações de Movimento

Como não existem tensores isotrópicos de posto ímpar então $d_{ijklm} = 0$ e $f_{ijklm} = 0$. Os coeficientes restantes são homogêneos e resultam em funções lineares dos produtos de delta de Kronecker. Se forem feitas essas reduções os coeficientes reduzem-se a 18: λ , μ , b_1 , b_2 , b_3 , g_1 , g_2 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_8 , a_{10} , a_{11} , a_{13} , a_{14} , a_{15} ; dessa forma as equações constitutivas são dadas por (2-37) e (2-38).

Na teoria da elasticidade gradiente o caso isotrópico é relativamente simples e contem muitas propriedades do material homogêneo:

$$\begin{aligned}
 & (\mu + 2g + b_2)u_{i,jj} + (\lambda + \mu + 2g_1 + 2g_2 + b_1 + b_3)u_{j,ij} - (g_1 + b_1)\psi_{ji,i} \\
 & - (g_2 + b_2)\psi_{ji,j} - (g_2 + b_3)\psi_{ij,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i
 \end{aligned} \tag{2-37}$$

Para o micromeio a equação diferencial de deslocamento é:

$$\begin{aligned}
 & (a_1 + a_5)(\delta_{ij}\psi_{kl,kl} + \psi_{kk,ij}) + (a_2 + a_{11})(\psi_{ki,jk} + \psi_{jk,ik}) \\
 & + (a_3 + a_{14})\psi_{kj,ik} + a_4\delta_{ij}\psi_{ll,kk} + (a_8 + a_{15})\psi_{ik,jk} + a_{10}\psi_{ij,kk} + a_{13}\psi_{ji,kk} \\
 & g_1\delta_{ij}u_{k,k} + g_2(u_{j,i} + u_{i,j}) + b_1(u_{k,k} - \psi_{kk})\delta_{ij} + b_2(u_{j,i} - \psi_{ij}) + \\
 & b_3(u_{i,j} - \psi_{ji}) + \Phi_{ij} = \frac{1}{3}\rho'd^2\ddot{\psi}_{ij}
 \end{aligned} \tag{2-38}$$

As componentes da tensão dupla μ_{ijk} da microdeformação são determinadas pelas funções de forma ilustradas na Figura 26 e configuram formas particulares de microdeformações:

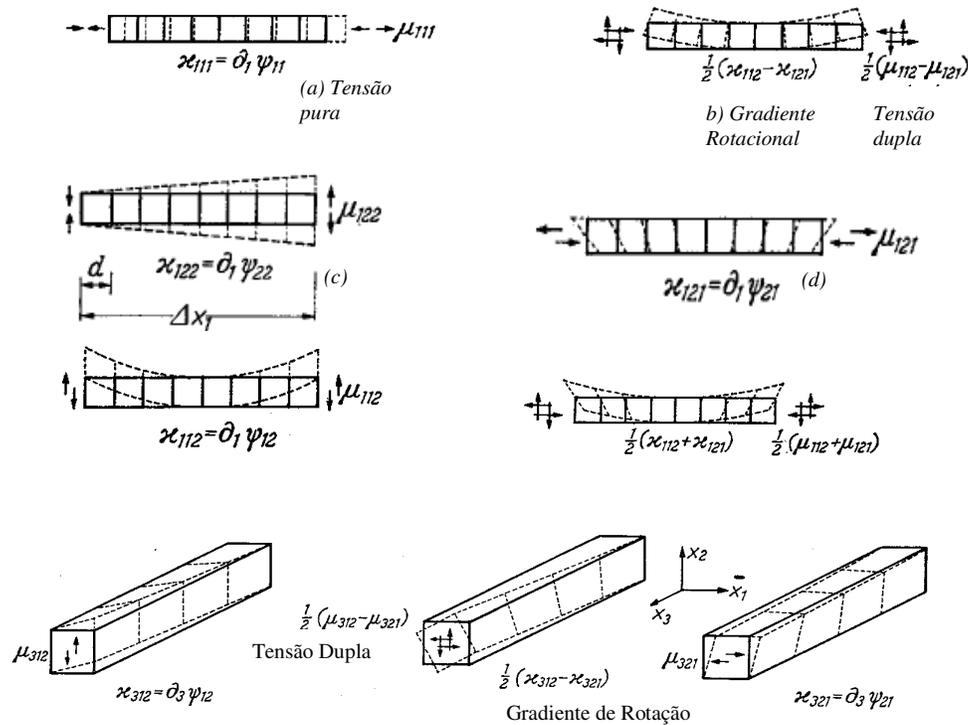


Figura 26. - Configuração de algumas deformações de segunda ordem identificadas por Mindlin para a formulação da teoria de elasticidade gradiente dele [2].

2.3. Caso Particular de Mindlin

Para o caso especial de materiais isotrópicos, onde a deformação macroscópica coincide com a microdeformação, na teoria de Mindlin é apresentada uma modificação particular da Lei de Hooke:

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} &= \tau_{ji} + s_{ji} \\ \tau_{ji} &= 2\mu\varepsilon_{ji} + \lambda u_{k,k} \delta_{ji} \\ \varepsilon_{ji} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \\ s_{ji} &= -(2\mu c_3 \varepsilon_{ji,kk} + \lambda c_1 u_{k,kl} \delta_{ji} + \lambda c_2 u_{k,kji})\end{aligned}\quad (2-39)$$

onde σ_{ji} é conhecido como o tensor de tensão total, τ_{ji} o tensor de tensão de Cauchy, ε_{ji} é o tensor de deformação e s_{ji} é o tensor de tensão relativa.

É possível notar que nas equações anteriores são apresentadas 5 constantes constitutivas: as duas conhecidas constantes de Lamè, λ e μ , e três novas constantes que representam a elasticidade gradiente c_1 , c_2 e c_3 .

2.4. A Simplificação Adicional de Aifantis

Uma simplificação adicional foi proposta em Aifantis et al [7]-[8]. Essa simplificação relaciona a tensão de segunda ordem μ_{kij} com a tensão relativa através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\mu_{kij} &= g^2 \tau_{ij,k} \\ s_{ij} &= -\mu_{kij,k} = -g^2 \tau_{ij,kk}\end{aligned}\quad (2-40)$$

onde g é o coeficiente da energia de deformação volumétrica, a única constante que relaciona a microdeformação com a macroestrutura.

É fácil conferir que esta simples teoria pode ser obtida como um caso particular da simplificação de Mindlin quando $c_1=c_2=g^2$ e $c_3=0$.

Considerando a formulação de Aifantis é possível estabelecer a equação de equilíbrio estático:

$$\tau_{ji,j} - \mu_{kji,kj} + f_i = \tau_{ji,j} - g^2 \tau_{ji,kkj} + f_i = 0 \quad (2-41)$$

Assim, obtém-se finalmente a equação diferencial de deslocamentos de quarta ordem para u_i no caso estático para um material de elasticidade gradiente:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} - g^2 (\mu u_{i,jkk} + (\lambda + \mu) u_{j,jikk}) + f_i = 0 \quad (2-42)$$

A equação de equilíbrio estático é expressa por:

$$(\tau_{ji} - \mu_{kji,k} - \Phi_{ji})_{,j} + f_i = 0 \quad (2-43)$$

onde Φ_{ji} representa as forças duplas de massa e f_i as forças de massa clássicas.

2.5. Teorema da Reciprocidade e o Teorema de Castigliano

Em Amanatidou et al [9] é demonstrada uma versão do teorema da reciprocidade, o princípio de Saint Venant e o teorema de Castigliano para matérias de elasticidade gradiente. Esses temas são utilizados no desenvolvimento da formulação dos elementos de contorno.

Teorema da Reciprocidade

No caso onde tenham-se forças duplas de massa diferentes de zero não é possível estabelecer o teorema da reciprocidade na sua forma geral e por tanto assume-se que $\Phi_{ji} = 0$. Nesse caso a expressão do teorema da reciprocidade está dada por:

$$\int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} \left(P_i u_i^* + R_i \frac{\partial u_i^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_a \oint_{C_a} E_i u_i^* = \int_{\Omega} f_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} \left(P_i^* u_i + R_i^* \frac{\partial u_i}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_a \oint_{C_a} E_i^* u_i dC_a \quad (2-44)$$

onde P_i são as forças de superfície vinculada com τ_{ji} e μ_{kj} . Usando o operador gradiente de superfície $D_i(\cdot) = (\cdot)_{,i} - n_i n_k (\cdot)_{,k}$ a força P_i fica definida da seguinte forma:

$$P_i = n_j \tau_{ji} - n_j \mu_{kji,k} - n_j \Phi_{ji} - D_j (n_j \mu_{kji}) + (D_p n_p) (n_j \mu_{kji}) \quad (2-45)$$

e R_i , as forças duplas de segunda ordem, são definidas como:

$$R_i = n_k n_j \mu_{kji} \quad (2-46)$$

Para o caso de tensões descontínuas entre diferentes sub-contornos suaves C_a (que no caso plano está representado pelos pontos em esquinas), as tensões de descontinuidade geométrica são representadas pela seguinte expressão:

$$E_i = \llbracket \ell_j n_k \mu_{kji} \rrbracket \quad (2-47)$$

onde $\ell_j = e_{jik} s_i n_k$; s_i e n_k são, respectivamente, o vetor tangente e o vetor normal às curvas C_a .

A terceira parcela da direita da equação (2-44) representa o trabalho realizado pelas tensões de segunda ordem que se apresentam na teoria de elasticidade gradiente devido às tensões E_i nas descontinuidades geométricas.

Se não tem se forças de massa, $f_i=0$, e se só tem-se superfícies suaves, então $E_i=0$ e o teorema de Betti está dado por:

$$\int_{\Gamma} \left(P_i u_i^* + R_i \frac{\partial u_i^*}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(P_i^* u_i + R_i^* \frac{\partial u_i}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2-48)$$

As equações apresentadas estão de acordo com os resultados obtidos por Polyzos et al [13]-[14] na formulação do método de elementos de contorno apresentada do capítulo 5.

Teorema de Castigliano

O teorema de Castigliano para elasticidade gradiente apresentado em Amanatidou et al [9] é expresso por:

$$P^{(n)} = \frac{\partial U}{\partial u^{(n)}} \text{ e } R^{(m)} = \frac{\partial U}{\partial (\partial u^{(m)} / \partial n)} \quad (2-49)$$

onde:

$$U = U(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}; \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}, \dots, \frac{\partial u^{(M)}}{\partial n}) = \sum_{n=1}^N P^{(n)} u^{(n)} + \sum_{m=1}^M R^{(m)} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial n} \quad (2-50)$$

e representa a energia de deformação elástica.

O segundo teorema é:

$$u^{(n)} = \frac{\partial U^c}{\partial P^{(n)}} \text{ e } \frac{\partial u^{(m)}}{\partial n} = \frac{\partial U^c}{\partial R^{(m)}} \quad (2-51)$$

onde U^c representa a energia de deformação elástica complementar.

Em Amanatidou et al [9] é comprovada a validade do princípio de Saint Venant no contexto não clássico. Utilizando o método de elementos finitos em exemplos numéricos para tensão pura, cortante e flexão de vigas, esses teoremas e princípios são comprovados satisfatoriamente.