

9 Flexão na Teoria da Elasticidade Gradiente

9.1. Introdução

Em Papargyiri-Beskou et al [28] foi desenvolvida uma análise da flexão para materiais de elasticidade gradiente considerando a hipótese de Euler Bernoulli; a isto acrescentou-se o estudo de flambagem que foi resolvido analiticamente na elasticidade gradiente mediante duas constantes constitutivas: a constante de deformação volumétrica g e a constante de energia de deformação superficial ℓ . As equações que regem o equilíbrio na flexão e no problema de flambagem são obtidas utilizando princípios variacionais e as hipóteses básicas de Euler Bernoulli. Finalmente são obtidas as condições de contorno clássicas e não-clássicas mediante a análise variacional usando-se a definição de energia de deformação e o método de resíduos ponderados.

O problema de flexão de vigas foi estudado por teorias não-clássicas com o objetivo de explicar resultados experimentais que não puderam ser explicados pela elasticidade clássica.

9.2. Abordagem do Problema

Admita-se uma viga submetida a um carregamento $q(x)$, um sistema de coordenadas segundo x ao longo da viga e os eixos restantes localizados como são ilustrados na Figura 43.

No trabalho desenvolvido por Papargyiri-Beskou et al [28], recorre-se à teoria simples de elasticidade gradiente proposta por Vardoulakis e Sulem [11]. Dessa teoria mistura-se os conceitos gerais da teoria de Mindlin [2] com o conceito dos efeitos da energia de deformação superficial de Casal [32], portanto são utilizadas 4 constantes constitutivas (2 clássicas e 2 não-clássicas) em vez de 18 constantes da teoria original de Mindlin.

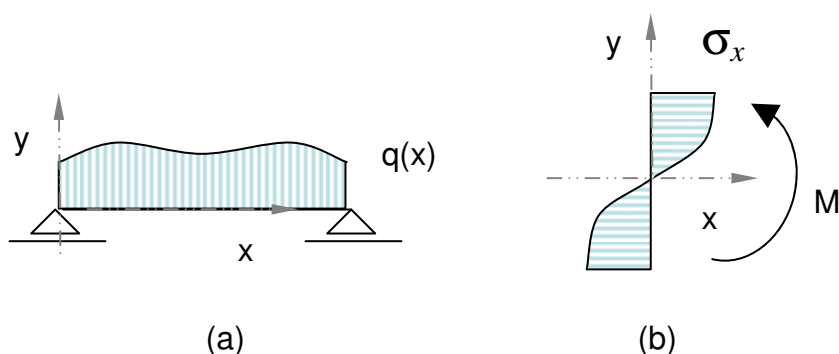


Figura 43 . - Sistema de coordenadas, carregamento e distribuição das tensões de uma viga na elasticidade gradiente.

As equações de Vardoulakis e Sulem para o cálculo de Cauchy, a tensão dupla e a tensão total são definidas como:

$$\tau_x = Ee_x + \ell Ee'_x \quad (9-1)$$

$$\mu_x = \ell Ee_x + g^2 Ee'_x \quad (9-2)$$

$$\sigma_x = \tau_x - \frac{d\mu_x}{dx} = E \left(e_x - g^2 \frac{d^2 e_x}{dx^2} \right) = E(e_x - g^2 e''_x) \quad (9-3)$$

onde

e_x : deformação axial da viga a flexão.

ℓ : constante da energia de deformação superficial.

g : constante de energia de deformação volumétrica.

E : módulo de Young

As condições de equilíbrio da seção transversal ilustradas na Figura 43-(b) são obtidas mediante as relações clássicas:

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad (9-4)$$

$$\int_A \sigma_x y dA = -M \quad (9-5)$$

Para a obtenção da equação de deslocamentos estabelece-se a relação clássica entre momento fletor e força cortante dada por:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \frac{dV}{dx} = -q(x) \quad (9-6)$$

e pela hipótese de Euler Bernoulli:

$$e_x = ky \quad (9-7)$$

identificando k como a curvatura na direção x . Consequentemente as equações de equilíbrio são:

$$E \left(k - g^2 \frac{d^2 k}{dx^2} \right) \int_A y dA = 0 \quad (9-8)$$

$$E \left(k - g^2 \frac{d^2 k}{dx^2} \right) \int_A y^2 dA = -M \quad (9-9)$$

Se for utilizada a hipótese de Euler Bernoulli, tem-se:

$$k - g^2 \frac{d^2 k}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (9-10)$$

$$k = -\frac{d^2 u}{dx^2} \quad (9-11)$$

então, obtém-se a equação diferencial de deslocamentos transversais na flexão de uma barra de elasticidade gradiente como:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = EI \left(u^{IV} - g^2 u^{VI} \right) = -q(x) \quad (9-12)$$

que é equivalente a:

$$EI \left(u^{IV} - g^2 u^{VI} \right) + q(x) = 0 \quad (9-13)$$

e cuja solução homogênea está representada pela equação:

$$u_h = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 + c_5 g^4 \sinh(x/g) + c_6 \cosh(x/g) \quad (9-14)$$

Um exemplo desenvolvido por Papargyiri [28] é mostrado a seguir para o caso de uma viga em balanço submetida as seguintes condições de contorno clássicas e não-clássicas:

$$\begin{aligned} \delta u(0) &= \delta u'(0) = 0 \\ u''(0) &= [\ell u''(L) + g^2 u'''(L)] = 0 \\ u''(L) - g^2 u^{IV}(L) &= u'''(L) - g^2 u^V(L) = 0. \end{aligned} \quad (9-15)$$

A solução deste problema é apresentada nos gráficos na Figura 44 (a), (b) e (c), extraídos da referência. Nos gráficos observa-se a sensibilidade dos deslocamentos a ℓ ($\lambda = \ell/g$) e g ($c.d = g/L$) e a influência da sensibilidade desprezível dos deslocamentos na constante constitutiva de energia de deformação superficial ℓ , mantendo-se g constante. Assim, obtém-se que g tem quase toda a incidência no comportamento da barra submetida a flexão.

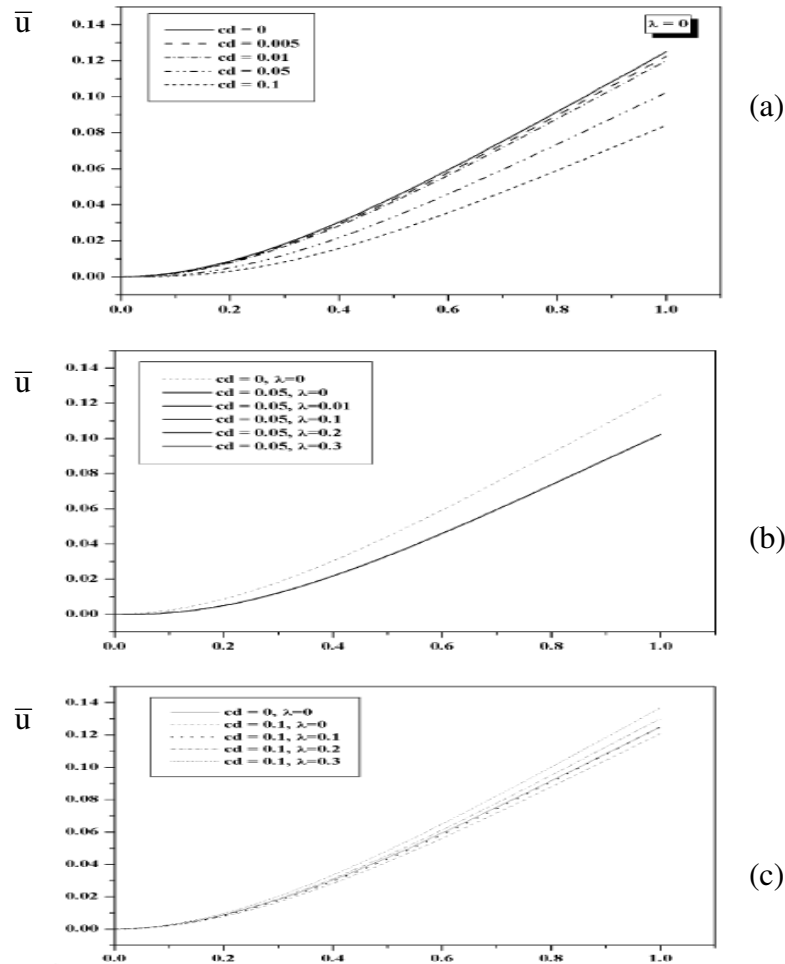


Figura 44. - Gráficos de deslocamentos para diferentes intervalos de ℓ ($\lambda = \ell/g$) e g ($c.d = g/L$). (a) sensibilidade de u a g para $\ell = 0$ (b) sensibilidade de u a ℓ para g pequeno, (c) sensibilidade de u a ℓ para um g grande.