PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Daniel Huamán Mosqueira

Formulações de Elasticidade Gradiente para Elementos Híbridos de Contorno

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós - graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro

Agosto de 2008.

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Daniel Huamán Mosqueira

Formulações de Elasticidade Gradiente para Elementos Híbridos de Contorno

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós - graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ney Augusto Dumont
Presidente/Orientador
Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva
Departamento de Engenharia Civil –PUC-Rio

Prof. Paulo Batista Gonçalves
Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Rubens de Oliveira
UFJF

Rio de Janeiro, 8 de Agosto de 2008

Daniel Huamán Mosqueira

Graduado em Engenharia Civil na Pontificia Universidad Católica del Perú em 2006. Iniciou o curso de Mestrado na PUC-Rio em 2006, atuando na linha de pesquisa da Teoria de Elasticidade Gradiente aplicada ao Método Hibrido Elementos de Contorno.

Ficha Catalográfica

Huamán, Mosqueira Daniel

Formulação da Teoria de Elasticidade Gradiente para o Método Híbrido de Elementos de Contorno / Daniel Huamán Mosqueira; orientador: Ney Augusto Dumont - Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2008.

v., 91 f: il.; 29,7cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Tese. 2. Formulação da Teoria de Elasticidade Gradiente aplicada ao Método Híbrido de Elementos de Contorno. I. Dumont, Ney Augusto II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

A minha mãe Tarcila Mosqueira, quem assumiu como objetivo de sua vida educar aos seus cinco filhos sem se importar com a dificuldade que significasse isso.

A meu pai Jesús Huamán, por dar-me a vida.

Ao meu irmão Jesús, por ensinar-me a ler, escrever, álgebra e por todo o apoio brindado durante minha carreira profissional.

A minha irmã Cecibel, por ser uma positiva influência no âmbito espiritual.

A minha irmã Rocío e meu irmão Javier, por me estimular sempre a ser uma melhor pessoa.

Ao Prof. Ney Augusto Dumont, por ter-me ajudado a escolher este interessante tema de investigação e sua assistência.

A CNPq, à PUC-Rio e ao Governo do Brasil por oferecer-me esta grande oportunidade de incrementar meu conhecimento, na qualidade de bolsista.

Aos meus companheiros de Pós-Graduação que me proporcionam sempre informações que ignoro e deveria conhecer sobre o que acontece na Pós.

À Pontificia Universidad Católica del Perú por ter-me facilitado a oportunidade de formar-me na sua instituição e a todos os professores que gentilmente brindaram-me apoio para realizar esta Pós-Graduação.

À Administração do Programa de Pós-Graduação da PUC-Rio por assistir-me pacientemente em todos os assuntos administrativos que sempre ignoro e tenho que cumprir.

Resumo

Huamán Mosqueira, Daniel; Dumont, Ney Augusto. **Formulações de Elasticidade Gradiente para Elementos Híbridos de Contorno.** Rio de Janeiro, 2008. 91 p; Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A modelagem matemática de microdispositivos, em que estrutura e microestrutura têm aproximadamente a mesma escala de magnitude, assim como de macroestruturas de natureza predominantemente granular ou cristalina, requer uma abordagem não-local de deformações e tensões. Há mais de cem anos os irmãos Cosserat já tinham desenvolvido uma teoria de grãos rígidos. No entanto, e sem detrimento de desenvolvimentos devidos a Toupin e outros pesquisadores, os trabalhos de Mindlin na década de 1960 podem ser considerados a base da chamada teoria gradiente de deformações, que se tornou recentemente objeto de um grande número de investigações analíticas e experimentais, motivadas pelo desenvolvimento de novos materiais estruturais e do crescente uso de dispositivos micro- e nanomecânicos na indústria. Mais recentemente, Aifantis e colaboradores conseguiram desenvolver uma teoria gradiente de deformações mais simplificada, com base somente em duas constantes elásticas adicionais, representativas de comprimentos característicos relacionados às energias de deformação superficial e volumétrica. Uma série de trabalhos recentes desenvolvidos por Beskos e colaboradores estendeu o campo de aplicações da proposta inicial de Aifantis e introduziu uma solução fundamental que de fato remonta aos trabalhos de Mindlin. A equipe de pesquisa de Beskos propôs as primeiras implementações 2D e 3D de elementos de contorno para análises de elasticidade gradiente tanto estáticas quanto no domínio da freqüência, inclusive para problemas da mecânica da fratura. Desde o tempo de Toupin e Mindlin procura-se estabelecer uma base variacional da teoria e uma formulação consistente das condições de contorno cinemáticas e de equilíbrio, o que parece ter tido êxito com os recentes trabalhos de Amanatidou e Aravas. Esta dissertação faz uma revisão da teoria gradiente da deformações e apresenta um estudo didático do problema mais simples que se possa conceber, que é o de uma barra sob diferentes tipos de ações axiais (Aifantis, Beskos). A solução fundamental para problemas 2D e 3D também é apresentada e estudada, tanto em termos de forças pontuais aplicadas, para uma implementação em termos de elementos de contorno, quanto de desenvolvimentos polinomiais (no caso estático), para implementação em termos de elementos finitos. Mostra-se que a teoria gradiente de deformação de Aifantis é adequada a uma formulação no contexto do potencial de Hellinger-Reissner, o que possibilita implementações híbridas de elementos finitos e de contorno. O presente trabalho de pesquisa objetiva o estudo do estado da arte no tema, com uma abordagem dos principais problemas de implementação computacional, inclusive em termos das integrais singulares que surgem. O desenvolvimento completo de programas de análise de elementos híbridos finitos e de contorno, para problemas estáticos e dinâmicos, está planejado para uma tese de doutorado em futuro próximo.

Palavras - chave

Elasticidade gradiente, Elementos finitos híbridos, Elementos de Contorno.

Abstract

Huaman Mosqueira Daniel. Ney Dumont. **Formulation of Gradient Elasticity for Hybrid Boundary Methods.** Rio de Janeiro, 2008. 91 p. M.Sc. Dissertation – Department of Civil Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The mathematical modeling of micro-devices in which structure and the microstructure are about the same scale of magnitude, as well as of macrostructure of markedly granular or crystal nature (microcomposites), demands a nonlocal approach for strains and stresses. More than one hundred years ago the Cosserat brothers had already developed a theory for rigid grains. However, and in no detriment due to Toupin and other researchers, Mindlin's work in the 1960s may be accounted the basis of the so-called strain gradient theory, which has recently become the subject of a large number of analytical and experimental investigations motivated by the development of news structural materials together with the increasing use of micro and nano-mechanical devices in the industry. More recently, Aifantis and coworkers managed to develop a simplified strain gradient theory based only on two additional elasticity constants that are representative of material lengths related to surface and volumetric strain energy. A series of very recent works done by Beskos and collaborators extended the field of applications of Aifantis' propositions and introduced a fundamental solution that actually remounts to developments already laid down by Mindlin. Beskos' workgroup may be regarded as the proponent of the first of the first boundary element 2D and 3D implementations on the subject for both statics and frequency-domain analyses, also including crack problems. Since Toupin and Mindlin's time, investigations have been under development to establish the variational basis of the theory and to consistently formulate equilibrium and kinematic boundary conditions established by Amanatidou and Aravas. This dissertation makes a revision of the gradient strain elasticity theory and presents a didactic study of the simplest problem that can be conceived, i.e., a bar under different axial actions (Aifantis, Beskos). The fundamental solution for 2D and 3D problems is also presented and studied for an elastic medium submitted to a point force, for boundary methods developments, as well as submitted to polynomial stress fields (for static problems), as in the hybrid finite element method. It is shown that Aifantis' strain gradient theory may be developed in the context of the Hellinger-Reissner potential, for the sake of hybrid finite and boundary element implementations. Goal of the present research work is as a detailed study of state art of the theme, which comprises an investigation of the singular integrals one must deal with in a computational implementation. The complete computational development for static and dynamic hybrid boundary/finite analyses is planned for a future doctoral thesis.

Key Words

Gradient Elasticity, Hybrid Finite Element Method, Hybrid Boundary Element Method.

Sumário

1 Introdução 13

2 Teorias de Elasticidade Linear Não-Clássicas 15

2.1. Ecuações de Equilíbrio de Cosserat 15
2.2. Elasticidade Linear das Microestruturas de Mindlin 16
2.2.1. Cinemática 17
2.2.2. Equações de Compatibilidade 19
2.2.3. Equações Variacionais de Movimento 20
2.2.4. Equações Constitutivas 22
2.2.5. Equações de Movimento 22
2.3. Caso Particular de Mindlin 24
2.4. A Simplificação Adicional de Aifantis 24
2.5. Teorema da Reciprocidade e o Teorema de Castigliano 25

3 Análise do problema de Elasticidade Gradiente realizado por E. Amanatidou e N. Aravas. 28

3.1. Campo de Deslocamentos Polinomiais 32

4 Solução Fundamental na Elasticidade Gradiente 35

4.1. Introdução 35
4.2. Solução da Equação Diferencial 35
4.3. Comparação das Forças de Superfície Clássicas e Não-clássicas 37
4.4. Comportamento da Solução Fundamental 38

5 Formulação do Método de Elementos de Contorno na Elasticidade Gradiente 43

6 Implementação Numérica 52

6.1. Introdução 52
6.2. Montagem das Matrizes 52
6.3. Análise da Singularidade na Integração Numérica para Elasticidade Gradiente 55
6.3.1. Transformação dos Termos de Integração a Series de Potências 55
6.3.2. Integração Numérica 57
6.4. Ponto Fonte $\bar{x}$ 57

6.5. Parâmetros no cálculo de $\tilde{\mathbf{P}}^*, \tilde{\mathbf{R}}^*, \tilde{\mathbf{U}}^*, \tilde{\mathbf{Q}}^*$ etc. 58
6.6. Cálculo dos tensores das equações principais do método. 59

7 Elementos Híbridos de Contorno 61

7.1. Equações Matriciais de Equilíbrio 61

8 Tensão Axial Pura na Teoria de Elasticidade Gradiente 63

8.1. Introdução 63
8.2. Equações que regem o problema de Tensão Pura 63
8.3. Princípio dos Trabalhos Virtuais 64
8.4. Principio de Forças Virtuais 65
8.5. Equações de Movimento Longitudinal de uma Barra a Tensão 66
8.6. Formulação Híbrida na Elasticidade Gradiente de uma Barra sujeita a tensão axial pura 67
8.6.1. Análise no Domínio da Freqüência. 70
8.6.2. Análise Estática 71
8.7. Exemplos 73

9 Flexão na Teoria da Elasticidade Gradiente 83

9.1. Introdução 83
9.2. Abordagem do Problema 83

10 Conclusões 87

11 Referências Bibliográficas 89

Lista de Figuras

Figura 1. - Sistemas de partículas que conformam um sólido submetido a forças externas que são equilibradas por forças internas diferenciais clássicas $d\vec{\mathbf{F}}$ e a uma densidade de momentos $d\vec{\mathbf{M}}$ não-clássicos. 15

Figura 2. - Esquema do deslocamento no macromeio **u** e micromeio **u'**. 18

Figura 3.- Representação de dois deslocamentos ilustrativos de segunda ordem identificadas por Mindlin [2] 19

Figura 4. - Configuração de algumas deformações de segunda ordem identificadas por Mindlin para a formulação da teoria de elasticidade gradiente dele [2]. 23

Figura 5. - Grandezas vetoriais utilizadas para a integração do Método de Elementos de Contorno. 36

Figura 6. - Integração da força de superfície no contorno circular Γ 38

Figura 7.- Comportamento da Solução Fundamental: Deslocamento na direção da Carga 40

Figura 8.- Comportamento da Solução Fundamental: Deslocamento Perpendicular á Carga 41

Figura 9.- Comportamento da Solução Fundamental: Deformações 42

Figura 10. - Elemento de contorno que mostra os parâmetros utilizados para a integração 52

Figura 11.- (a) Sistema de Coordenadas da matriz de rigidez; e (b) definição do domínio $\mathbf{\Omega}$, os contornos $\mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Gamma_2}$ correspondentes aos cossenos diretores η_1 e η_2 do elemento. 65

Figura 12. - Condições de contorno de una barra gradiente elástica engastada. 73

Figura 13. - Resultado dos Deslocamentos e Deformações de uma Barra de elasticidade gradiente submetida tensão pura; (a) sensibilidade de *u* a g/L (b) sensibilidade de *u* a ℓ/g (c) sensibilidade de *u*' a g/L (d) sensibilidade de *u*' a ℓ/g. 75

Figura 14. - Funções de Forma de uma Barra de Elasticidade Gradiente a tensão. 75

Figura 15 . - Comportamento da Força de Segunda Ordem R para diferentes valores de ℓ, Exemplo 3; (a) ℓ=0 (b) *g*=0.1 (c) *g* =0.3 (d) *g* =0.5 (e) *g* =0.7, 79

Figura 16. - Deslocamentos (a) e deformações (b) no problema de tensão pura na elasticidade gradiente 80

Figura 17 . - Deslocamentos *u(x)* barra a tensão, Exemplo 3. para diferente valores de α: (a) α = 0.3 (b) α = 0.5 (c) α = 0.8 80

Figura 18. - Deformação *u'(x)* de uma Barra a Tensão, α: (a) α = 0.3 (b) α = 0.5 (c) α = 0.8. Exemplo 3. 81

Figura 19. - Barra com um extremo engastado e outro livre submetida a uma força pulso. Barra discretizada em 5 elementos por Oliveira [26]. 81

Figura 20 . - Resposta da Superposição Modal de uma barra discretizada em cinco elementos, com *n=4* que implica uma expansão da series de freqüências até $O(\omega^8)$. 82

Figura 21 . - Sistema de coordenadas, carregamento e distribuição das tensões de uma viga na elasticidade gradiente. 84

Figura 22. - Gráficos de deslocamentos para diferentes intervalos de $\ell(\lambda=\ell/g)$ e g(c.d=g/L). (a) sensibilidade de *u* a *g* para ℓ=0 (b) sensibilidade de u a ℓ para *g* pequeno, (c) sensibilidade de *u* a ℓ para um *g* grande. 86