

5 Exemplos numéricos

Neste capítulo são apresentados os exemplos numéricos que permitem avaliar a eficiência computacional da técnica de superposição modal avançada e a técnica da transformada de Laplace. Todos os exemplos apresentados, são feitos inicialmente (etapa de testes) no programa MAPLE, numa etapa final os algoritmos desses exemplos são desenvolvidos no programa Fortran 90.

O primeiro exemplo corresponde a uma barra elástica submetida a uma carga constante sem amortecimento. No segundo exemplo, para essa mesma barra, é considerado o amortecimento. Nesses dois exemplos a barra é discretizada em elementos de treliça.

Finalmente, o último exemplo trata do modelo de um trecho de ferrovia constituído por uma interação dinâmica entre trilho, palmilha, dormente e lastro. Esse último exemplo foi desenvolvido na dissertação de Mestrado de Oliveira (Oliveira-2006).

5.1 Barra elástica sem amortecimento

Para estudar o exemplo desta seção (e da seção 5.2, que trata da barra elástica com amortecimento) inicialmente é aplicada a técnica da transformada de Laplace, essa técnica requer o conhecimento da transformada inversa de Laplace. Diversos autores tem feito aproximações numéricas da transformada inversa de Laplace. Dentre os diversos métodos inicialmente testados, para os tipos de estruturas que trata esta dissertação, escolheu-se os que tiveram melhor desempenho; Dubner e Abate (Dubner-Abate-1968), Kenny Crump (Crump-1976) e De Hoog (de Hoog-1982). Seguidamente é feito o estudo aplicando o método de superposição modal avançada. Finalmente esses dois métodos são comparados.

Para cada um dos modelos, as matrizes de rigidez e massa são obtidas de acordo com a abordagem mostrada no capítulo [3] e a resposta transiente do sistema é obtida de acordo com a formulação dada nas seções [3.5] e [3.6].

Seja um elemento de barra elástica sem amortecimento cujo extremo $x = 0$ é fixo, no extremo livre $x = L$ submetido a um carregamento aplicado

constante $P(t) = 1000$ em sua direção longitudinal, figura (5.1), com condições iniciais $u(x, t)|_{t=0} = 0$ e $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

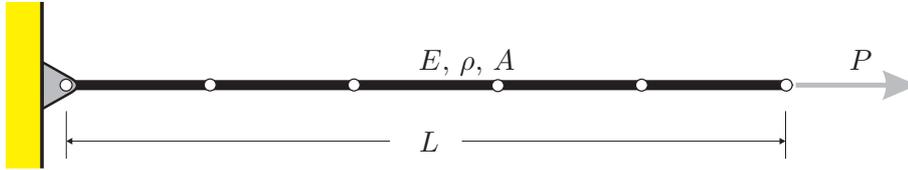


Figura 5.1: Barra com extremos fixo e livre, representada por 5 elementos de treliça

Os valores das propriedades geométricas e mecânicas do elemento, em unidades consistentes e coerentes segundo (Dumont-2007), são apresentadas na tabela (5.1):

L	1
A	1
E	1000
ρ	1

Tabela 5.1: Propriedades geométricas e mecânicas em unidades consistentes para a barra elástica sem amortecimento

A equação diferencial parcial que governa o exemplo é a equação (4-1) sem considerar a parcela do amortecimento, cuja solução analítica para valores de $t > 0$ e $0 < x < L$, é:

$$u(x, t) = -\frac{8PL}{\pi^2 EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left[\frac{1 - \cos(\omega_n t)}{(2n - 1)^2} \right] \text{sen} \left[\frac{(2n - 1)\pi x}{2L} \right] \right\} \quad (5-1)$$

$$\omega_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

5.1.1

Gráficos dos deslocamentos pela técnica da transformada de Laplace

Todos os deslocamentos plotados foram normalizados com relação ao valor estático correspondente, ao longo do tempo nos pontos nodais que ficam a $0.2L$, $0.6L$ e $1.0L$ e comparados com a solução analítica.

Observa-se nos gráficos (5.2) e (5.3) que quanto maior é o fator k melhor é a qualidade das respostas. Daqui em diante, para fins de comparação, será usado $k = 1000$, dado que o resultado é próximo da solução analítica.

Salienta-se que dos três métodos de inversão testados, os métodos desenvolvidos por Kenny Crump e De Hoog fornecem exatamente os mesmos

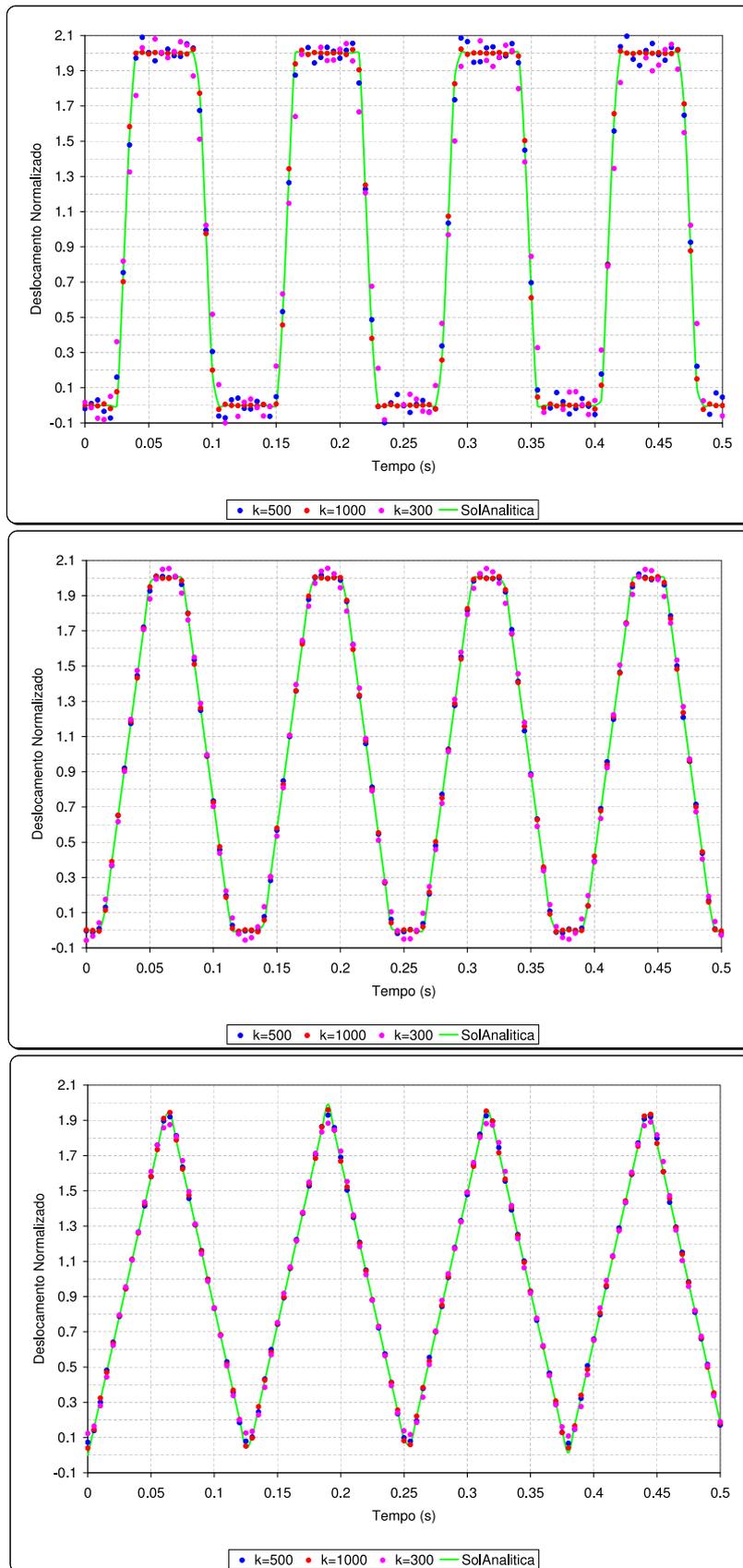


Figura 5.2: Deslocamentos em $x = 0.2L$, $x = 0.6L$ e $x = L$ da barra, aplicando o método de (Dubner-Abate-1968)

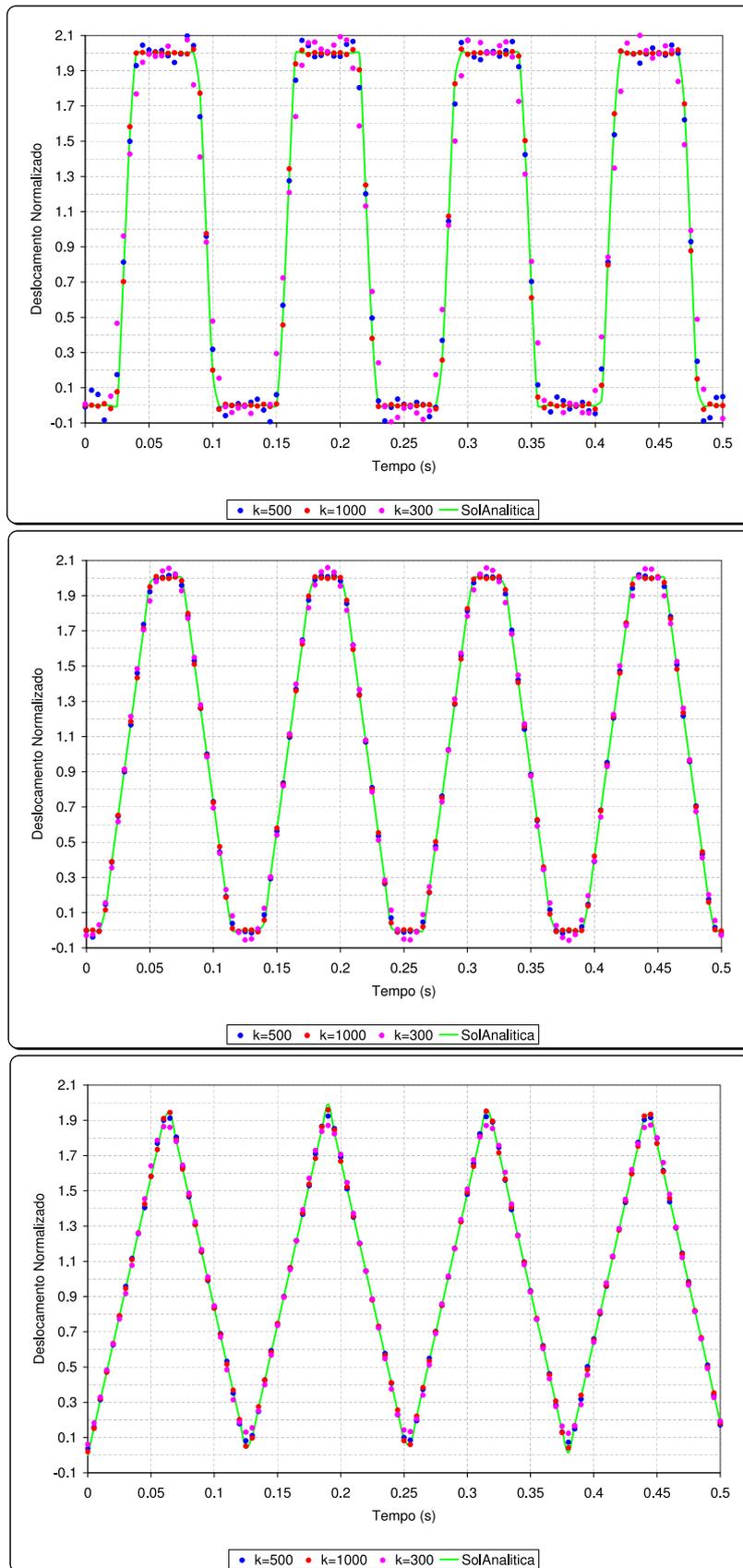


Figura 5.3: Deslocamentos em $x = 0.2L$, $x = 0.6L$ e $x = L$ da barra, aplicando o método de (Crump-1976)

resultados (embora convirjam com velocidade distinta). Portanto, são plotados apenas os resultados de Kenny Crump.

5.1.2

Desempenho computacional da técnica da transformada de Laplace

Como um passo prévio, é importante avaliar o desempenho computacional da variável tempo de execução dos programas entre os três métodos usados para a inversão numérica da transformada de Laplace. O objetivo é escolher apenas um deles, o mais eficiente, para assim, ser comparada com a resposta fornecida pelo método de superposição modal avançada.

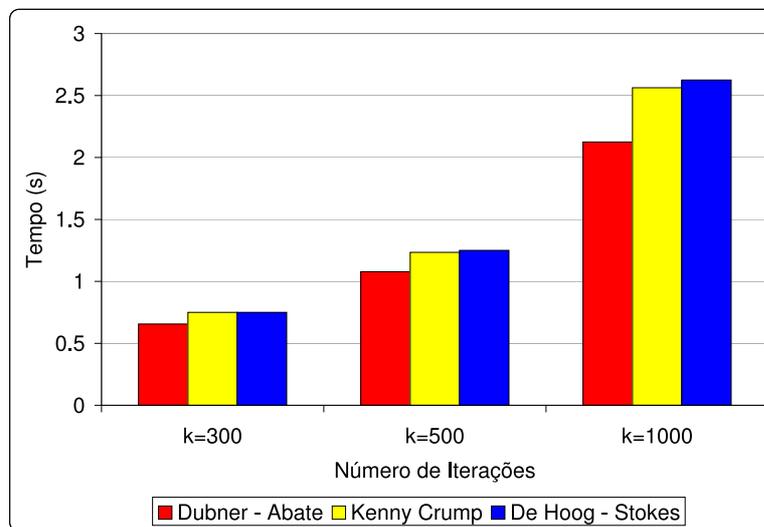


Figura 5.4: Comparação da eficiência dos três métodos

método	$k = 300$	$k = 500$	$k = 1000$
Dubner-Abate	0.656	1.078	2.125
Kenny Crump	0.750	1.234	2.563
De Hoog-Stokes	0.750	1.250	2.625

Tabela 5.2: Leituras do tempo de execução dos programas em segundos.

A partir da comparação dos tempos avaliados entre os métodos de inversão utilizados, o mais rápido é o método de Dubner-Abate. O método de Kenny Crump tem uma ligeira vantagem frente ao de De Hoog. Dado que os deslocamentos fornecidos pelo método de Kenny Crump e De Hoog são os mesmos, consideremos, em diante, apenas o método de Kenny Crump, junto ao de Dubner-Abate.

5.1.3 Avaliação da convergência das respostas

Escolheu-se plotar os graus de liberdade extremos (graus de liberdade 1 e 5) as quais fornecem maior informação do comportamento da convergência da solução.

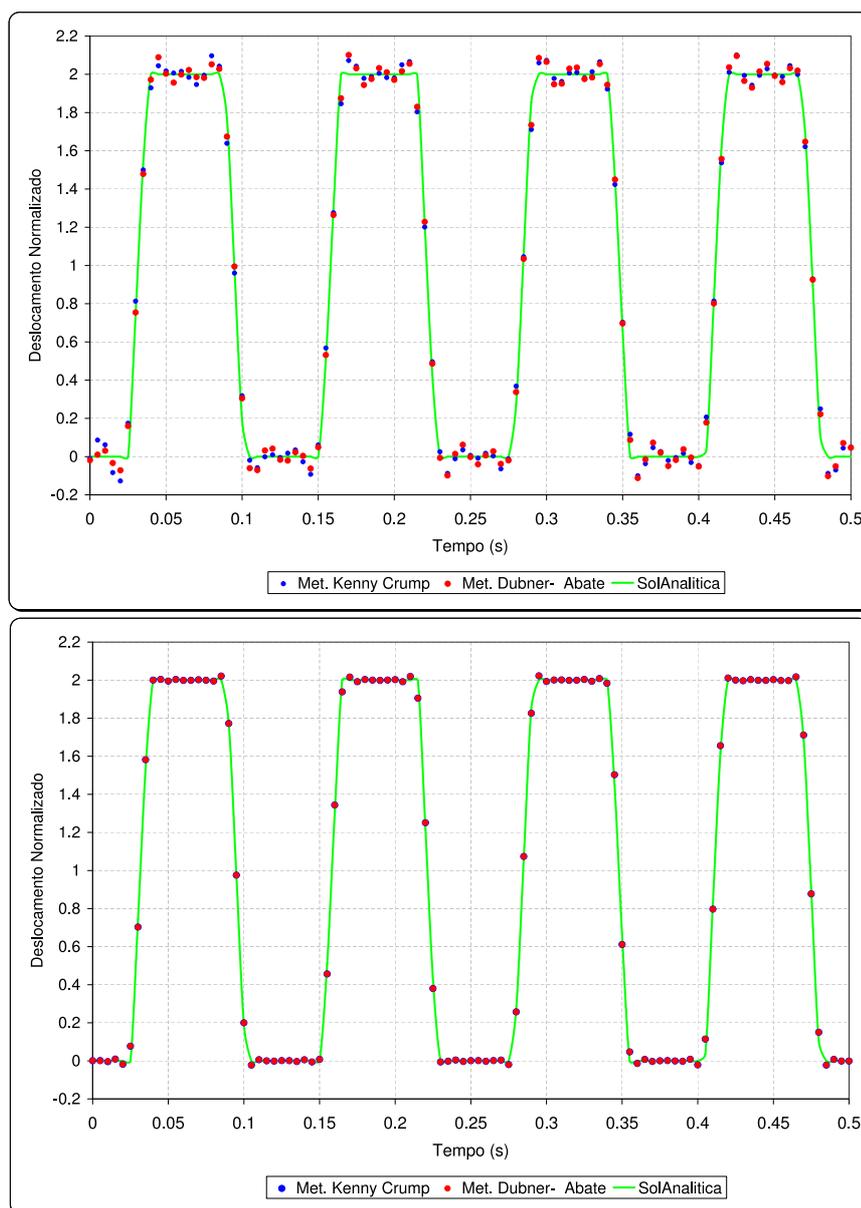


Figura 5.5: Deslocamentos em $x = 0.2L$ (grau de liberdade 1), para $k = 500$ e $k = 1000$.

Os gráficos mostram que convergência é melhor, se o fator k é maior. Observa-se também que se o grau liberdade fica mais próximo do extremo livre, então a convergência também é rápida. Requerendo, nesse caso, um menor valor para k . Em contrapartida, se o grau de liberdade está próximo do nó fixo a convergência é lenta. Essas observações, são importantes, pois indicam que o valor de k pode ser mudado convenientemente (dependendo da posição

do grau de liberdade) de tal forma que possa ser melhorada a velocidade de convergência.

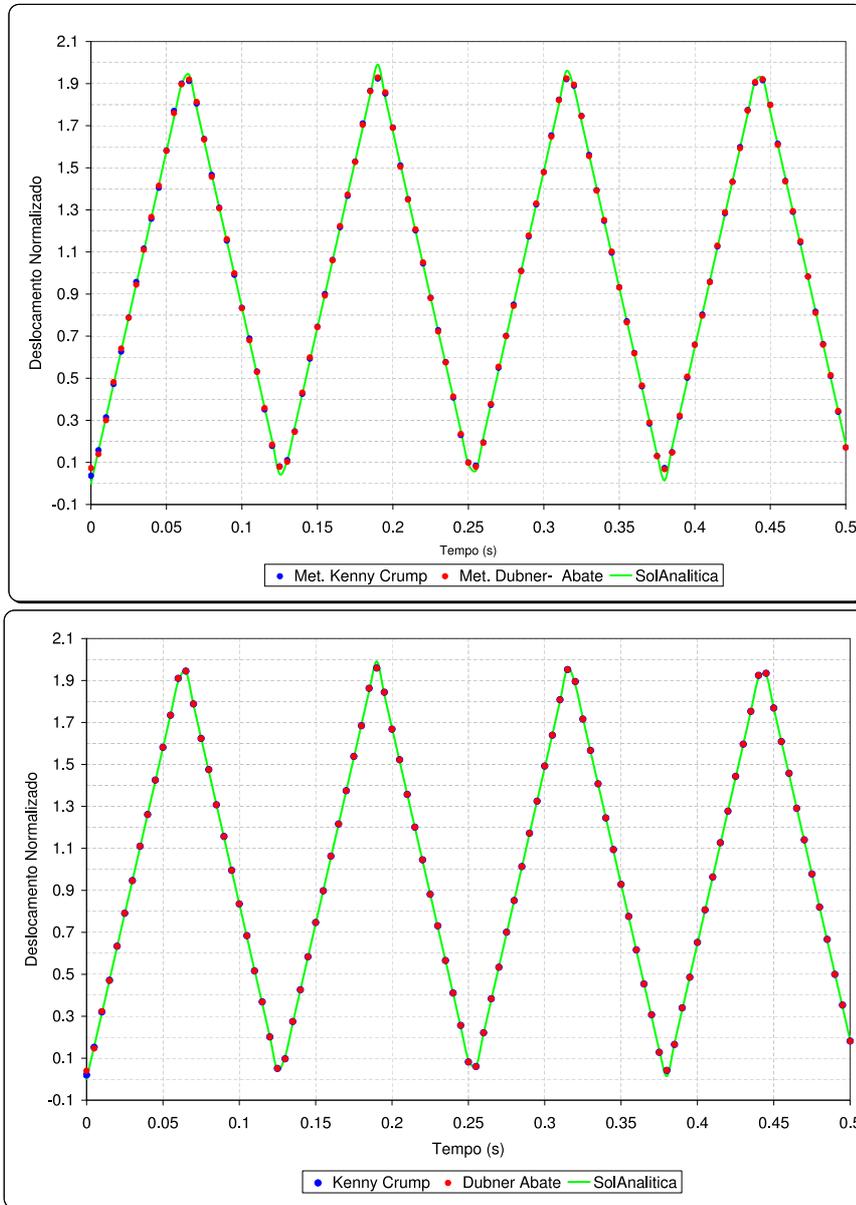


Figura 5.6: Deslocamentos em $x = L$ (grau de liberdade 5), para $k = 500$ e $k = 1000$.

Em nosso caso, dado que desejamos avaliar a barra em qualquer ponto, deve-se optar por um valor de k adequado de tal forma que garanta uma boa convergência.

Nos gráficos observa-se que a velocidade de convergência é diferente para $k = 500$, no entanto para um valor de $k = 1000$ a resposta é quase idêntica à solução analítica.

É importante observar que, para $k = 1000$, os resultados do método de inversão de Dubner-Abate e o de Kenny Crump praticamente estão superpostos e muito próximas da solução analítica o que demonstra a boa qualidade da

convergência desses dois métodos. Entretanto, é bom levar em conta que a vantagem do método de Dubner-Abate na eficiência no tempo faz a diferença.

Portanto, a partir dessas observações o método de inversão escolhido é o de Dubner-Abate, com um valor de $k = 1000$.

5.1.4

Gráficos dos deslocamentos pela técnica superposição modal avançada

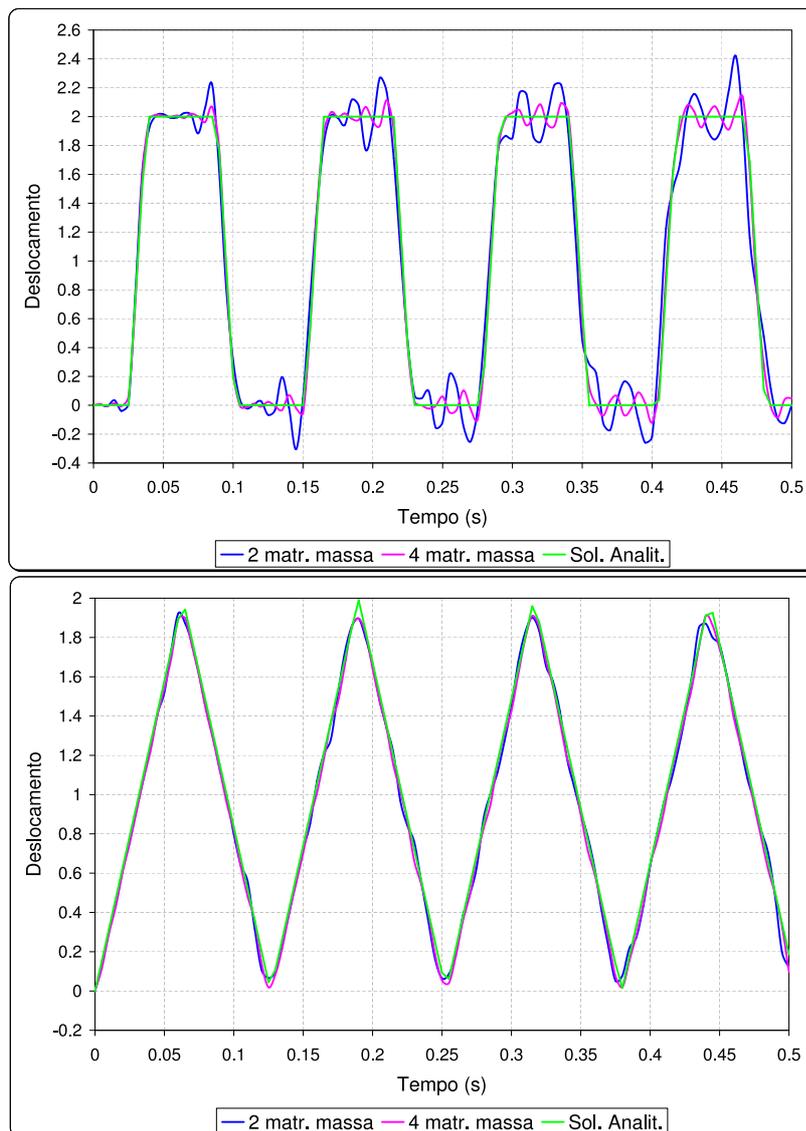


Figura 5.7: Deslocamentos em $x = 0.2L$ e $x = L$ (graus de liberdade 1 e 5), com 2, 4 e 6 matrizes de massa.

Observa-se nos gráficos que a qualidade da técnica de superposição modal vai melhorando com uma maior quantidade de matrizes de massa. Uma outra observação importante é que esta mesma qualidade diminui na medida que o tempo cresce.

5.1.5

Convergência dos resultados por número de graus de liberdade

É muito delicado e de muita responsabilidade tentar comparar dois métodos de solução que têm comportamentos diferentes durante seu desenvolvimento. É difícil poder afirmar alguma coisa, já que quando um dos métodos parece ter vantagem num quesito, essa vantagem acaba sendo uma desvantagem se observada desde um outro ângulo ou quando são consideradas outras variáveis.

Os gráficos (5.8) e (5.9) apresentam os resultados pelo método de inversão de Dubner-Abate e o método de superposição modal avançado, ambos comparados com a solução analítica para uma barra com 5 e 50 graus de liberdade. Observa-se que, quando aplicada a técnica da transformada de Laplace, os resultados são os mesmos com 5 ou bem com 50 graus de liberdade para $k = 1000$. Para o método de superposição modal avançado, com duas matrizes de massa, a convergência é melhor se o número de graus de liberdade for maior. Essa diferença na convergência (quando considerado o grau liberdade) se deve a que a técnica da transformada de Laplace trabalha com a matriz de rigidez efetiva sem perda de parcela alguma. Entretanto para o método de superposição modal avançada a matriz de rigidez efetiva, desenvolvida em series de freqüências, é truncada, levando conseqüentemente à perda de alguma parcela de rigidez.

Para contornar essa diferencia e assim fazer uma melhor comparação dessas duas técnicas, ambas matrizes de rigidez efetivas são desenvolvidas em series de potências e plotadas para 1, 3 e 5 matrizes de massa. Sob essa nova consideração, observa-se nos gráficos (5.10) e (5.11) que essas duas técnicas fornecem os mesmos resultados, não existindo mais a diferença observada no gráfico (5.8). Note que quando o número de matrizes de massa é 1, os resultado obtidos (aplicando superposição modal avançada) correspondem às respostas da teoria clássica (superposição modal).

Nos gráficos (5.12) e (5.14) foram plotados respostas das duas técnicas, considerando uma matriz de massa, as quais são equivalentes aos resultados da teoria clássica (superposição modal). Os gráficos das figuras (5.13) e (5.15) são as respostas correspondentes à técnica de superposição modal avançada com 3 matrizes de massa. Onde é evidente as vantagens de um sobre o outro.

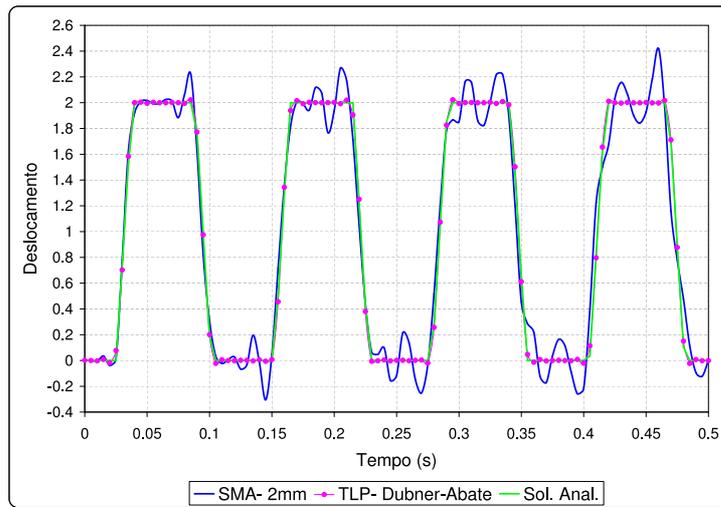


Figura 5.8: Barra discretizada em 5 elementos de treliça.

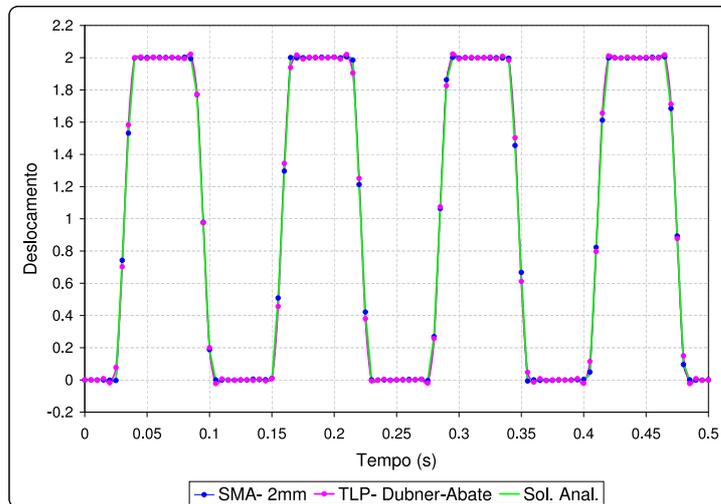


Figura 5.9: Barra discretizada em 50 elementos de treliça.

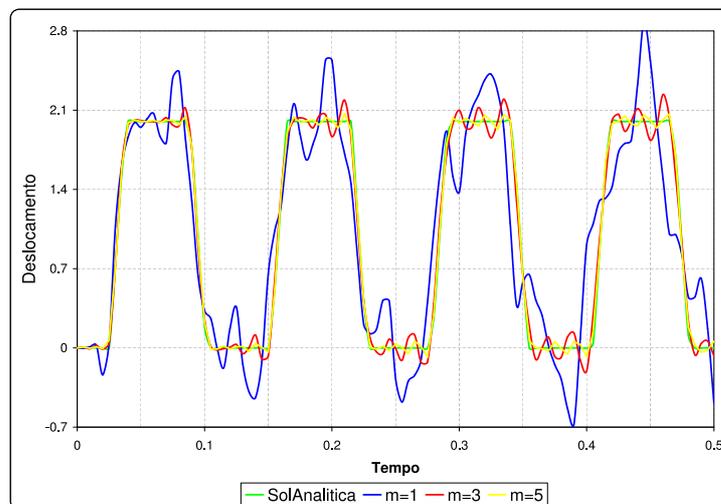


Figura 5.10: Deslocamento em $x = 0.2L$ (grau de liberdade 1) aplicando superposição modal avançada.

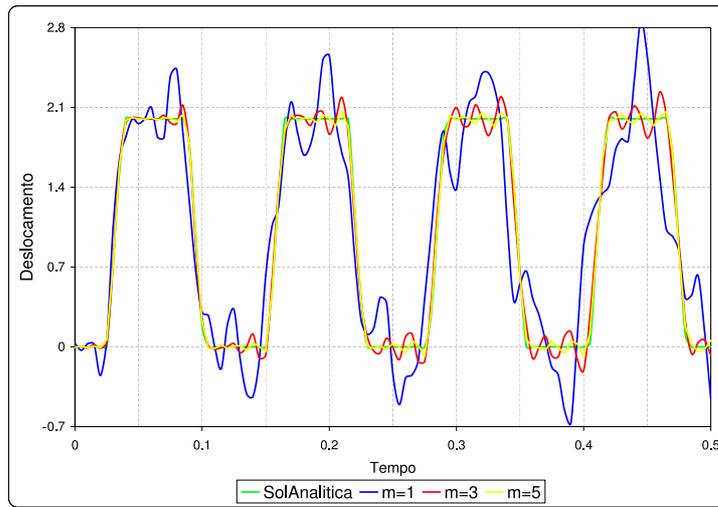


Figura 5.11: Deslocamento em $x = 0.2L$ (grau de liberdade 1) aplicando transf. de Laplace.

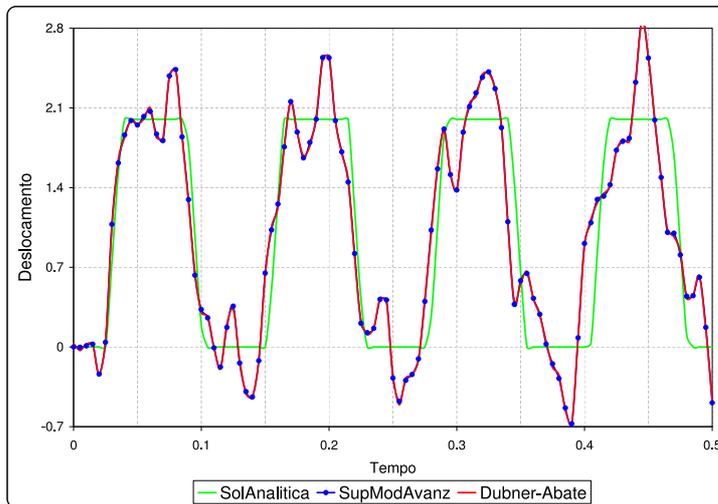


Figura 5.12: Deslocamentos em $0.2L$ (grau de liberdade 1), aplicando superposição modal.

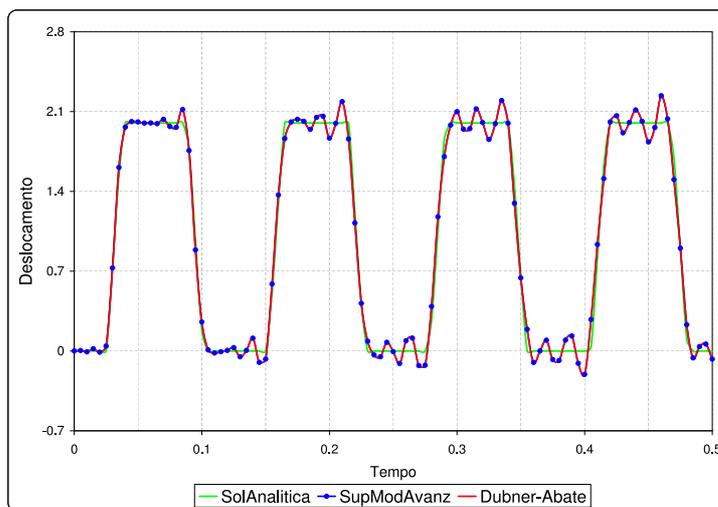


Figura 5.13: Deslocamentos em $0.2L$ (grau de liberdade 1), aplicando superposição modal avançada (3 matrizes de massa).

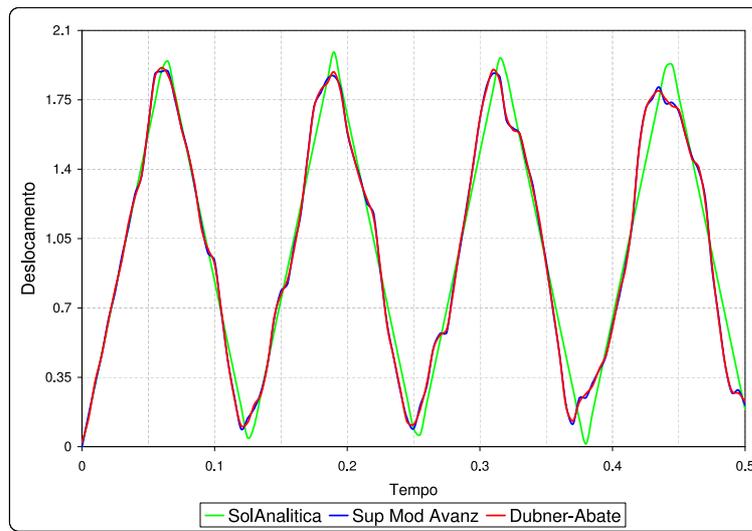


Figura 5.14: Deslocamentos em L (grau de liberdade 5), aplicando superposição modal (teoria clássica).

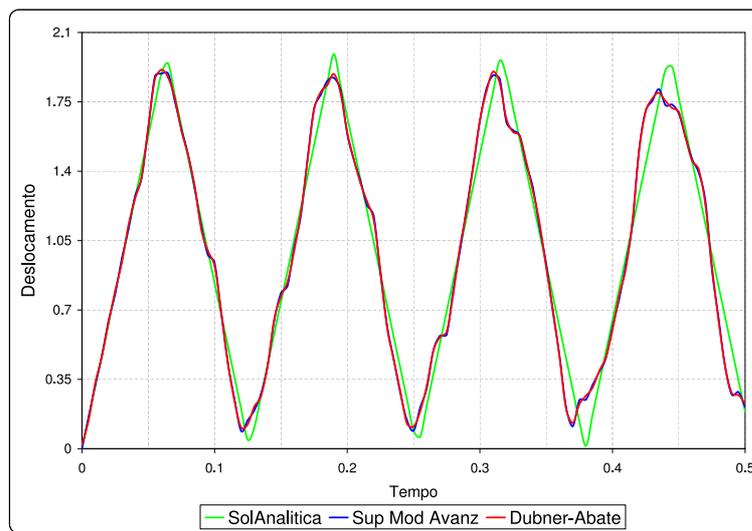


Figura 5.15: Deslocamentos em L (grau de liberdade 1), aplicando superposição modal avançada (3 matrizes de massa).

5.1.6 Desempenho computacional das duas técnicas

No caso da técnica de superposição modal avançada para poder garantir um bom desempenho (e assim compará-la com os métodos de transformada de Laplace) é suficiente fazer os cálculos com duas matrizes de massa. Lembre que entre os métodos de transformada de Laplace foi escolhido o método de Dubner-Abate, com um valor de $k = 1000$.

Quando é considerado um número baixo de graus de liberdade (por exemplo, menores do que 5), observa-se na figura (5.16) que os resultados são praticamente iguais à da solução analítica. Ainda mais, o tempo de execução para ambos métodos, é próximo de zero. Portanto, não é possível compará-los

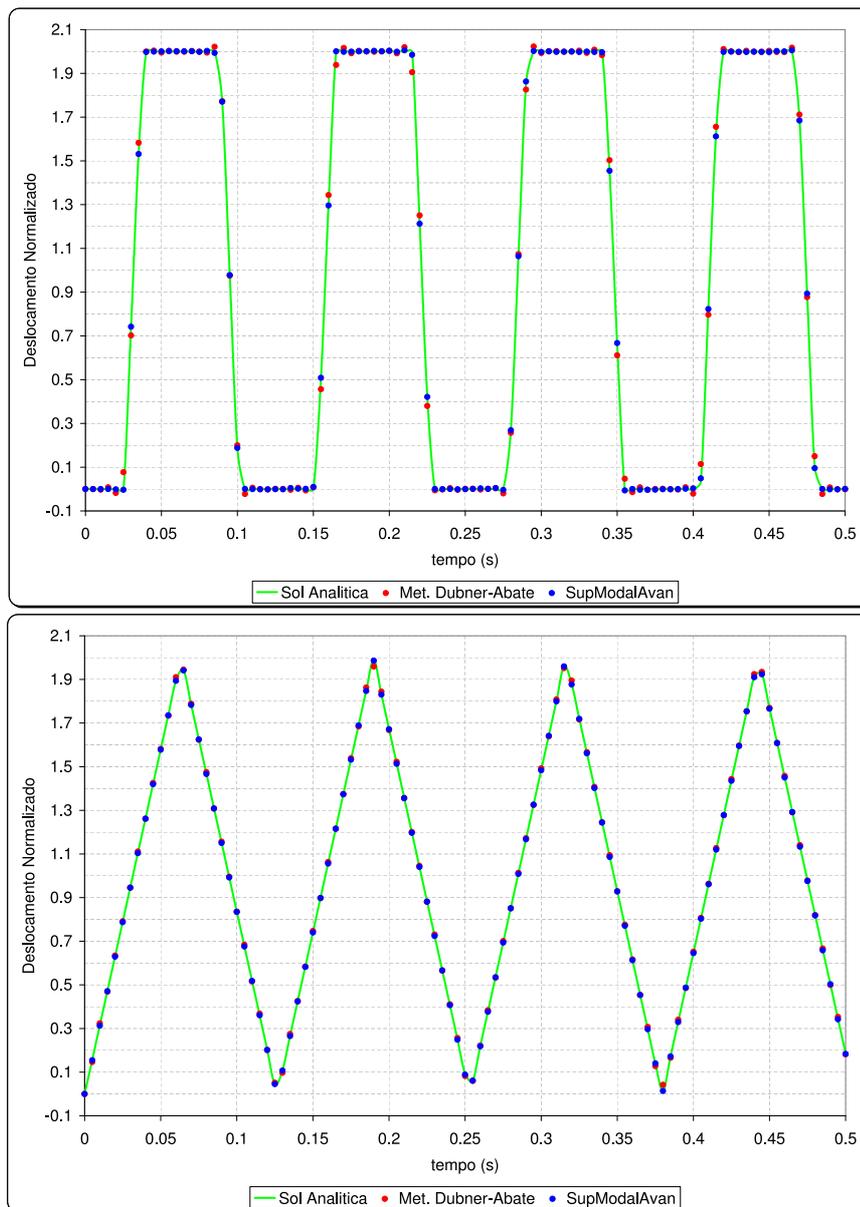


Figura 5.16: Deslocamentos em $0.2L$ e L , aplicando superposição modal avançada (2 matrizes de massa) e o método de Dubner-Abate ($k = 1000$).

de forma adequada e ver qual método tem melhor performance. Uma forma de contornar isso é incrementar o número de graus de liberdade. Para tal, discretiza-se a barra em 50 e 100 graus de liberdade.

Ao fazer os cálculos com 50 graus de liberdade, praticamente não há diferença na velocidade de convergência desses dois métodos, veja a figura(5.17). Porém, se duplicamos o número de graus de liberdade (ou seja, 100) o tempo de execução com o método da transformada de Laplace (Dubner-Abate) é melhor do que aplicando superposição modal avançada. Veja na figura 5.17 que nesse caso o método de transformada de Laplace é quase três vezes mais rápida do que o de superposição modal avançada.

Uma possível explicação para essa demora, no tempo de execução, do

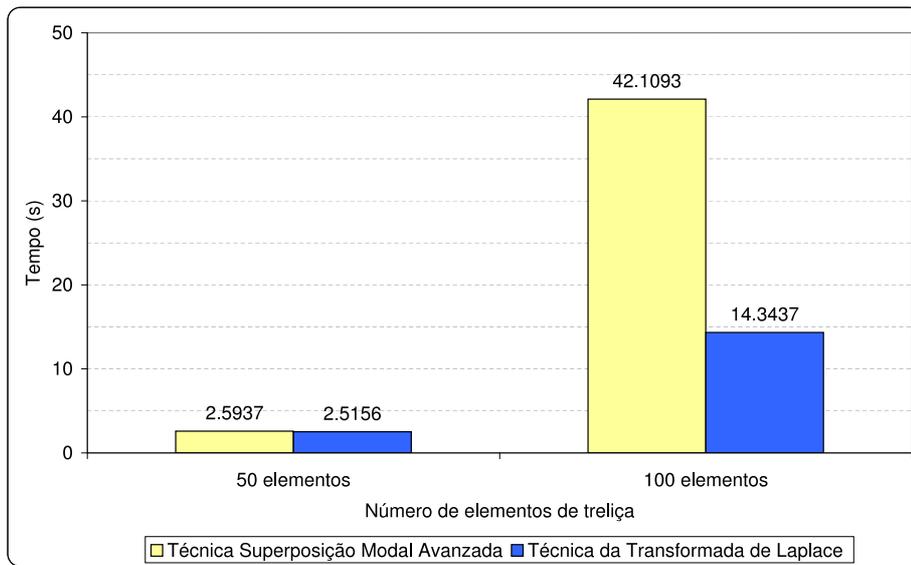


Figura 5.17: Comparação dos tempos (em segundos).

método de superposição modal avançada é a seguinte: o algoritmo implementado para esse método, calcula *todos* os autovalores e autovetores, o que obviamente implica num maior tempo de execução. Por outro lado, é conhecido que para fazer a análise de uma estrutura não é necessário calcular todos os autovalores, é suficiente calcular os mais representativos. Sendo assim, é preciso implementar algoritmos mais eficientes, o que com certeza deve melhorar a performance desse método.

5.2 Barra elástica com amortecimento

Para este segundo exemplo consideramos a mesma barra elástica do exemplo, portanto, com as mesmas condições iniciais e carregamento $P(t) = 1000$, figura (5.1).

Os valores das propriedades geométricas e mecânicas estão representadas na tabela (5.3).

L	1
A	1
E	1000
ρ	1
ζ	5

Tabela 5.3: Propriedades geométricas e mecânicas em unidades consistentes para a barra elástica com amortecimento

A equação diferencial parcial que governa esse exemplo é a equação (4-1), cuja solução analítica para valores de $t > 0$ e $0 < x < L$, é

$$u(x, t) = \frac{2P}{\rho LA} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{\omega_n^2} \left[1 - e^{\frac{\mu t}{2\rho}} \left(\cosh(\Omega_n t) + \frac{\mu}{2\Omega_n \rho} \sinh(\Omega_n t) \right) \right] \operatorname{sen} \left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right] \right\} \quad (5-2)$$

onde

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{e} \quad \Omega_n = \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\rho^2 \omega_n^2}}{2\rho}.$$

Todos os cálculos, modelos, resultados e gráficos, aplicando superposição modal avançada e os métodos de inversão de da transformada de Laplace para este modelo (barra elástica com amortecimento), son inteiramente análogos aos obtidos no seção anterior (barra elástica sem amortecimento). Portanto, dar todos esses detalhes seria repetitivo. Por tanto, no que segue, é mostrado diretamente a comparação do desempenho computacional de método de inversão de Dubner e Abate e o método de superposição modal avançada.

5.2.1

Desempenho computacional das duas técnicas

A figura (5.18) mostra os resultados obtidos pela aplicação da técnica de superposição modal avançada (com duas matrizes de massa) e a técnica da transformada de Laplace (com um valor de $k = 1000$), ambas comparadas com a solução analítica da equação (5-2). Observa-se a boa convergência que têm as duas técnicas.

De modo inteiramente análogo ao tratamento de uma barra elástica sem amortecimento, Quando é considerado um número baixo de graus de liberdade, os resultados são praticamente iguais à da solução analítica e o tempo de execução para ambos métodos, é próximo de zero. Portanto, impossibilitando fazer uma comparação adequada do performance desses dois métodos. Uma forma de contornar isso, é incrementar o número de graus de liberdade. Por tanto, discretiza-se a barra em 50 e 100 graus de liberdade. Para 50 graus de liberdade o desempenho de método de transformada de Laplace e duas vezes mais rápido. Quando considerado 100 graus de liberdade a diferença é ainda maior, quase 6 vezes mais rápido.

Uma possível explicação para essa demora, no tempo de execução, pelo método de superposição modal avançada é: quando é considerado o amortecimento os cálculos desse método precisam trabalhar com números complexos, acarretando numa maior quantidade de variáveis, e conseqüentemente num maior tempo de execução. Entretanto quando não é considerado o amorteci-

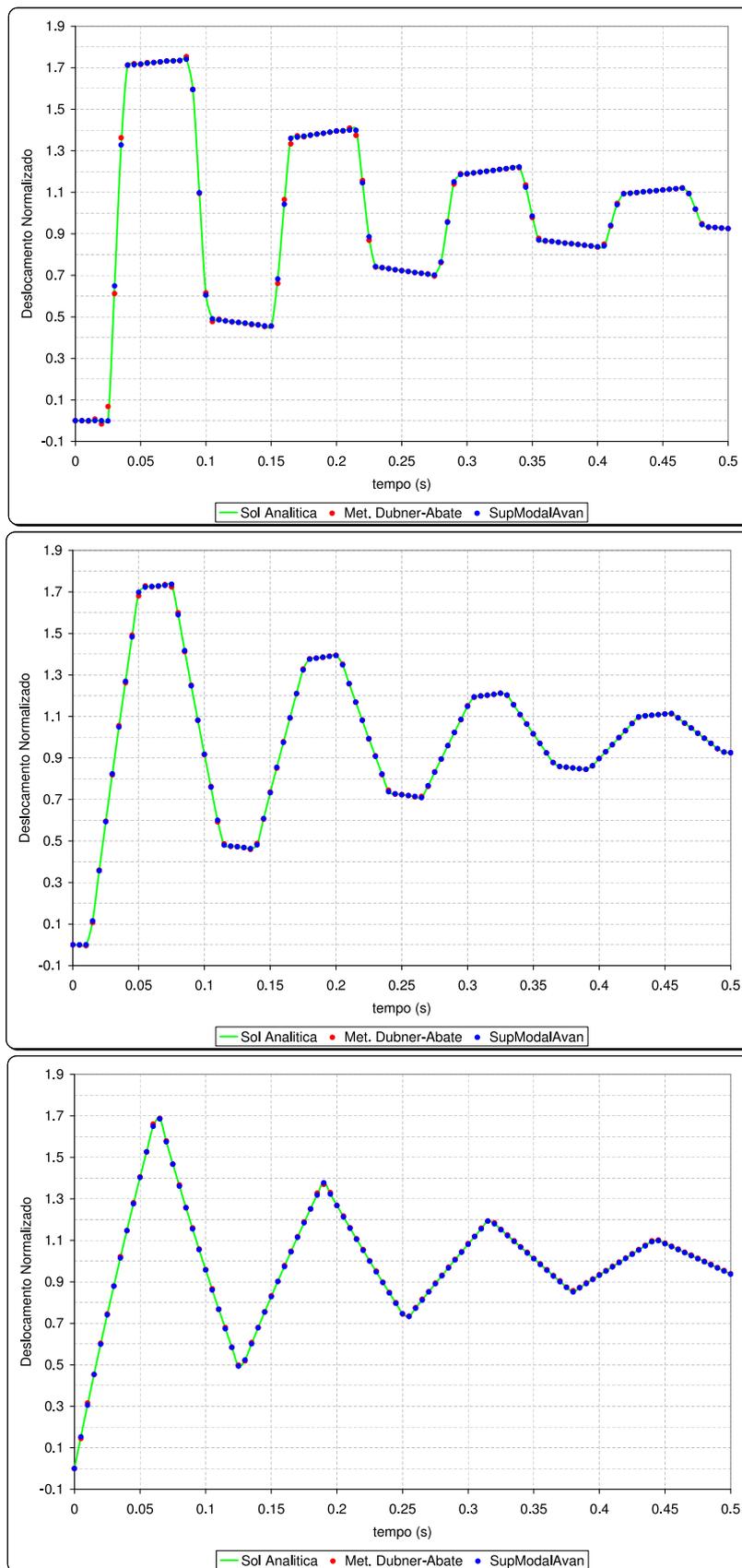


Figura 5.18: Deslocamentos em $0.2L$, $0.6L$ e L , aplicando superposição modal avançada (2 matrizes de massa) e o método de Dubner-Abate ($k = 1000$).

mento esse método trabalha apenas com números reais ficando assim o seus cálculos bem mais simples.

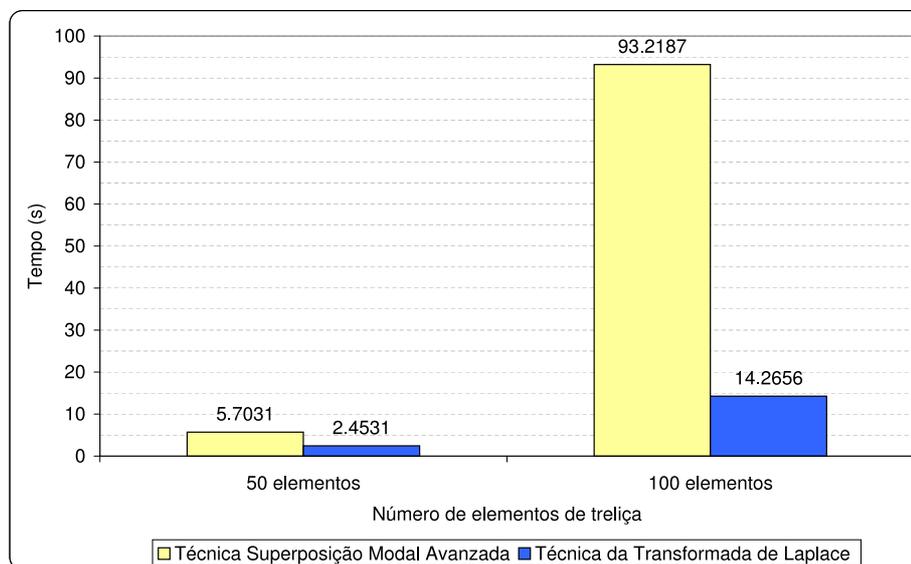


Figura 5.19: Comparação dos tempos (em segundos).

Por outro lado, para fazer a transformada inversa numérica a técnica da transformada de Laplace usa o método de Dubner-Abate, que desde sua formulação é feito para trabalhar no campo dos números complexos; assim a eficiência computacional é quase a mesma independentemente se a análise é com amortecimento ou não.

5.3

Modelo para representação da ferrovia

O modelo adotado neste exemplo, é um dos exemplos da dissertação de mestrado (Oliveira-2006) ao mesmo tempo os dados tomados do trabalho de (Zhai-2003). Esse exemplo foi desenvolvido pela técnica de superposição modal avançada no programa Maple usando para o cálculo de autovalores e autovetores uma rotina desenvolvida no programa Fortran.

O exemplo simula um trecho de ferrovia constituído por uma interação dinâmica entre trilho, palmilha, dormente e lastro. O modelo tem 140 graus de liberdade, figura (5.20), constituído por 10 dormentes e um trilho sujeito a uma carga retangular constante $P(t) = 100kN$ aplicado no grau de liberdade 64.

Os diferentes elementos estruturais são representados da seguinte forma

Trilho: por um elemento de viga de Timoshenko sem amortecimento e sem base elástica, considerando-se sua inércia à rotação e deformação por

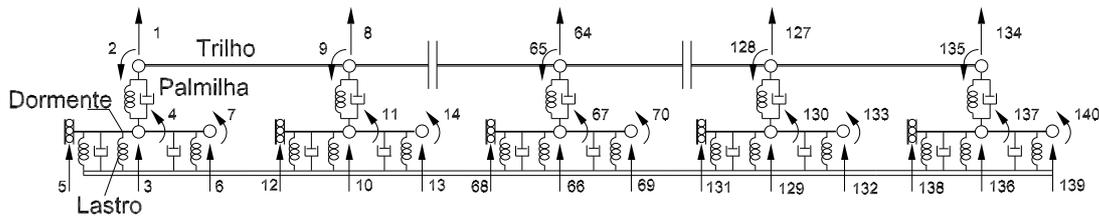


Figura 5.20: Modelo representando um trecho de ferrovia.

esforço cortante.

Palmilha: por um elemento de treliça com amortecimento.

Dormente: por uma viga de Timoshenko com amortecimento e com base elástica, considerando-se sua inércia à rotação e deformação por esforço cortante. Finalmente,

Lastro: representado como uma base elástica.

A figura (5.21), considerando a simetria da via férrea, representa a metade da vista frontal do modelo global a partir do eixo de simetria.

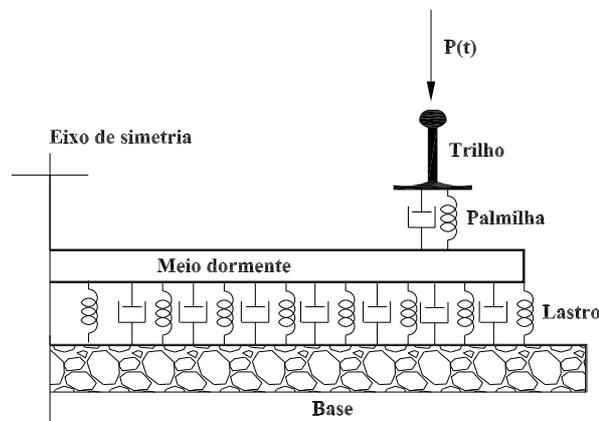


Figura 5.21: Corte frontal das componentes estruturais do modelo de ferrovia.

5.3.1 Considerações iniciais

O desenvolvimento feito no capítulo anterior, para um elemento de treliça com amortecimento, vide (4-18), é utilizado em cada elemento de palmilha. A matriz de rigidez apresentada na equação (4-56), é utilizada para cada elemento de trilho e dormente. Para o caso de dormente, precisa-se fazer algumas modificações na matriz de rigidez. O dormente é discretizado como dois elementos de viga de Timoshenko, de comprimentos L e b com suas respectivas matrizes de rigidez K e K_b .

5.3.2 Propriedades dos elementos da via férrea

Para o trilho considerou-se a seção UIC60 e para o dormente adotou-se o modelo NS90 de monobloco de concreto com pretensão.

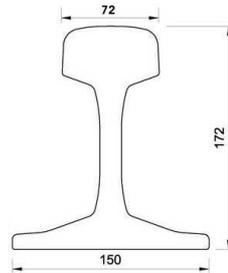


Figura 5.22: Medidas geométricas da seção transversal do trilho UIC60 em mm (CORUS).

Os valores numéricos dos parâmetros físicos são tomados levando em conta as definições do capítulo anterior. Para o elemento de palmilha temos

$$\zeta = \frac{\mu}{2\rho A} \tag{5-3}$$

onde μ é definido como força por unidade de comprimento dividida por velocidade, ρ é a massa específica definida por unidade de volume, o módulo de elasticidade E tem unidade de tensão e ζ tem unidade de frequência.

O dormente tem sua massa total distribuída ao longo de seu comprimento assim como seu amortecimento segundo a equação (5-4), de acordo com as definições de m e μ dadas anteriormente

$$\zeta = \frac{\mu}{2m}. \tag{5-4}$$

Para as medidas geométricas do meio dormente e trilho, veja a figura (5.23).

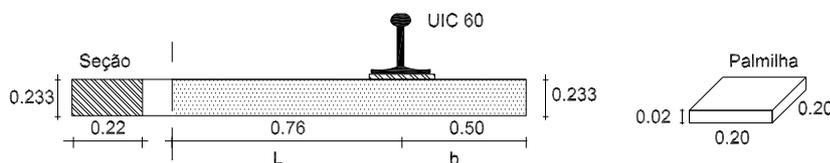


Figura 5.23: Medidas geométricas do dormente e palmilha (em metros).

Em relação ao trilho, a massa m também é definida por unidade de comprimento.

Para o trilho e dormentes o módulo de elasticidade transversal foi calculado utilizando a equação (5-5), com $\nu = 0.25$. Assim, a relação fica

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \cong \frac{E}{2.5} \quad (5-5)$$

O valor da rigidez do lastro é $w = 1.1 \times 10^8$ em kN/m^2 , (Zhai-2003).

$L(m)$	0,545
$A(m^2)$	$76,86 \cdot 10^{-4}$
$J(m^4)$	$3,217 \cdot 10^{-5}$
κ	1
$E(N/m^2)$	$2,059 \cdot 10^{11}$
$m(kg/m)$	60,640

Tabela 5.4: Propriedades físicas e geométricas para o trilho UIC60. Fonte: (Zhai-2003).

$L(m)$	1,26
$A(m^2)$	$5,126 \cdot 10^{-2}$
$J(m^4)$	$2,31 \cdot 10^{-4}$
κ	5/6
$E(N/m^2)$	$2,1 \cdot 10^{10}$
$m(kg/m)$	99,603
$\zeta(1/s)$	$2,343 \cdot 10^2$

Tabela 5.5: Propriedades físicas e geométricas para o dormente. Fonte: (Zhai-2003)

$L(m)$	0,02
$A(m^2)$	0,04
$E(N/m^2)$	$3,25 \cdot 10^8$
$m(kg/m)$	3,920
$\zeta(1/s)$	$4.783 \cdot 10^4$

Tabela 5.6: Propriedades físicas e geométricas para a palmilha. Fonte: (Zhai-2003)

5.3.3

Análise de resultados

Este terceiro exemplo, como veremos, confirma o que foi dito nos exemplos anteriores, que é muito difícil tentar dar uma resposta definitiva, no que se refere ao desempenho das técnicas da transformada de Laplace e de superposição modal avançada, tendo ambos os métodos desenvolvimentos diferentes.

Se o número de iterações é $k = 1000$, para os exemplos anteriores esse valor de k é satisfatório. Entretanto, a figura (5.24) mostra que no caso do modelo da ferrovia esse valor $k = 1000$ é insuficiente quando aplicado o método de Dubner-Abate. Na medida que o valor de k é aumentado até chegar a $k = 4000$, os resultados têm um melhor comportamento.

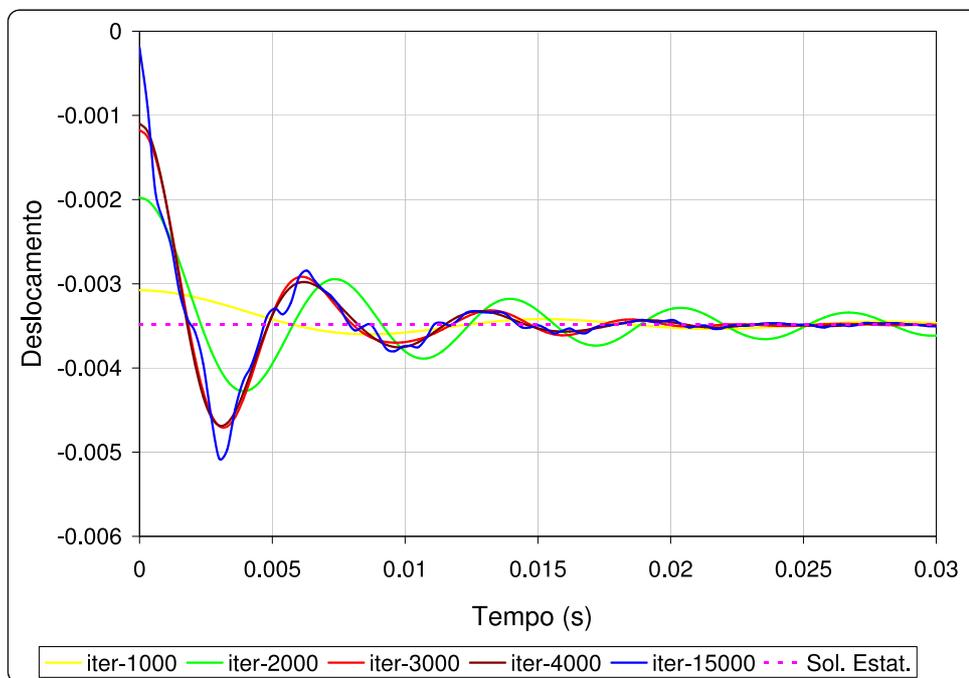


Figura 5.24: Deslocamentos no grau de liberdade 64 do trecho de ferrovia aplicando o método de Dubner-Abate.

A figura 5.25 mostra as soluções dada pela técnica de superposição modal avançada com 1, 2 e 3 matrizes de massa.

Observa-se na figura (5.26) que a técnica da transformada de Laplace com um valor de $k = 15000$ consegue ter um comportamento adequado em relação à técnica de superposição modal avançada.

Nos exemplos anteriores a técnica da transformada de Laplace tinha uma vantagem em relação à técnica de superposição modal avançada. Mas, neste exemplo sua convergência é muito lenta.

Quanto à eficiência computacional para este exemplo (ao invés dos resultados dos exemplos anteriores) a técnica de superposição modal avançada levou uma vantagem significativa.

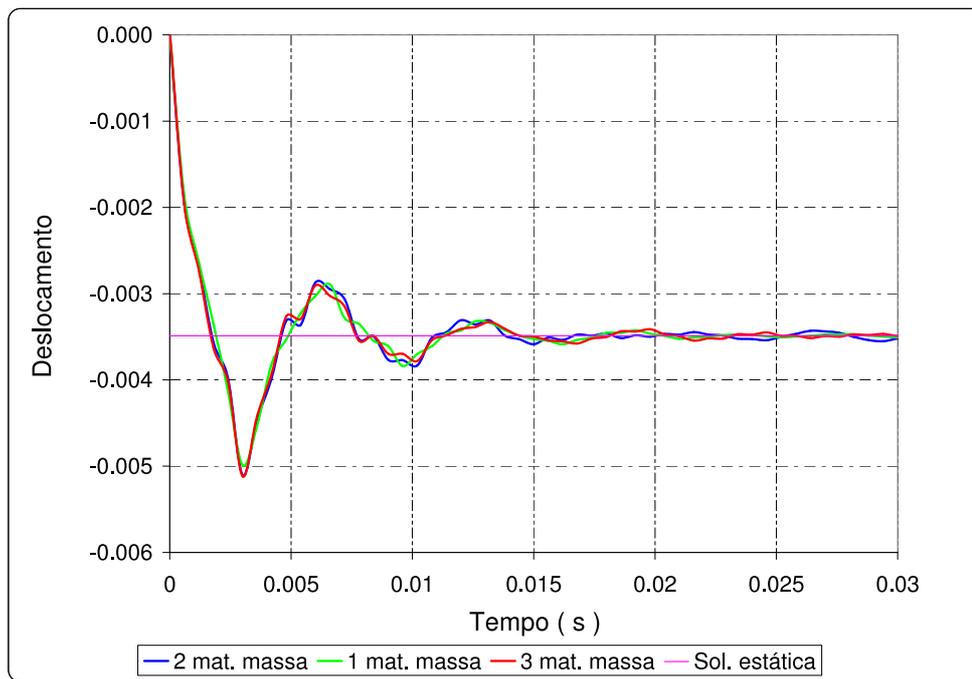


Figura 5.25: Deslocamentos no grau de liberdade 64 do trecho de ferrovia aplicando superposição modal avançada.

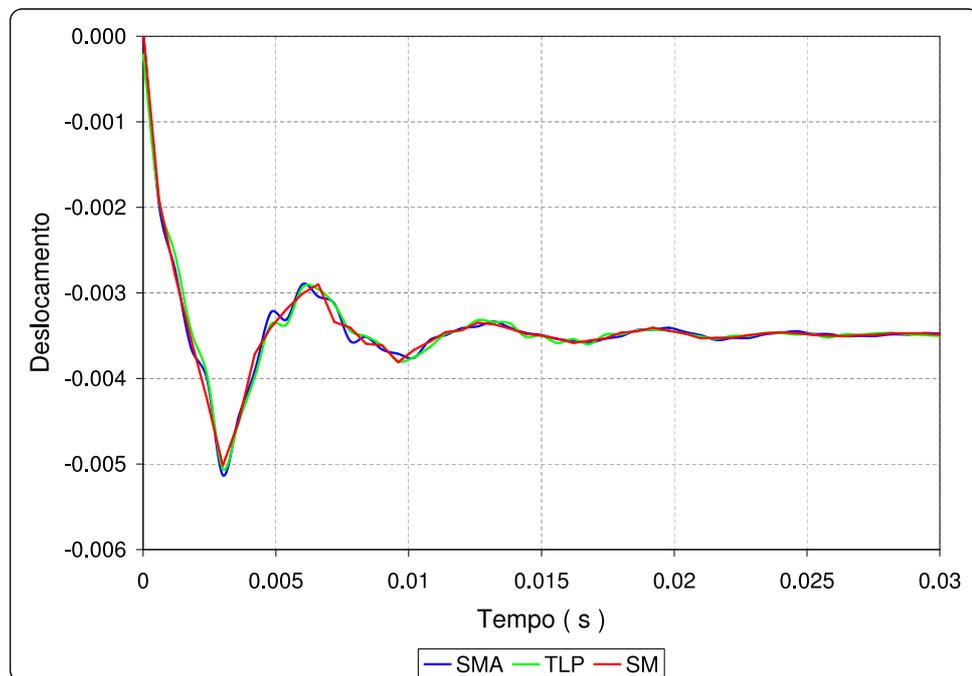


Figura 5.26: Comparação dos deslocamentos (no grau de liberdade 64) aplicando: superposição modal avançada, transformada de Laplace (Dubner-Abate) e superposição modal (clássica).

Um possível motivo dessa convergência lenta pode ser devido a que técnica da transformada de Laplace não tem um deslocamento zero num tempo zero. Dado que para valores de tempo próximos de zero, para obter resultados aceitáveis, é necessário incrementar consideravelmente o valor de k , o que

incrementa o tempo de execução.

Transformada de Laplace	530.875s
Superposição modal avançada	455.578s
Superposição modal	306.406

Tabela 5.7: Comparação dos tempos de execução.