

4

Análise de elementos unidimensionais

Neste capítulo é mostrado o desenvolvimento da formulação feita no capítulo anterior para um elemento de treliça e um elemento de viga de Timoshenko com amortecimento e base elástica (elementos unidimensionais).

São apresentadas as soluções das equações matriciais de equilíbrio e a montagem da matriz de rigidez, considerando dois casos, o desenvolvimento que leva ao método de superposição modal avançada (análise feita no domínio do tempo a partir de uma formulação no domínio da frequência) e a técnica da transformada de Laplace (inversão da resposta para o tempo de uma análise feita somente no domínio da frequência). Finalmente um exemplo é desenvolvido, onde as duas técnicas são comparadas com a solução analítica.

4.1

Elemento de treliça

Um elemento de treliça é definido como um elemento unidimensional, que trabalha unicamente sob cargas axiais que podem ser de compressão ou tração. A figura (4.1) mostra um elemento de treliça.

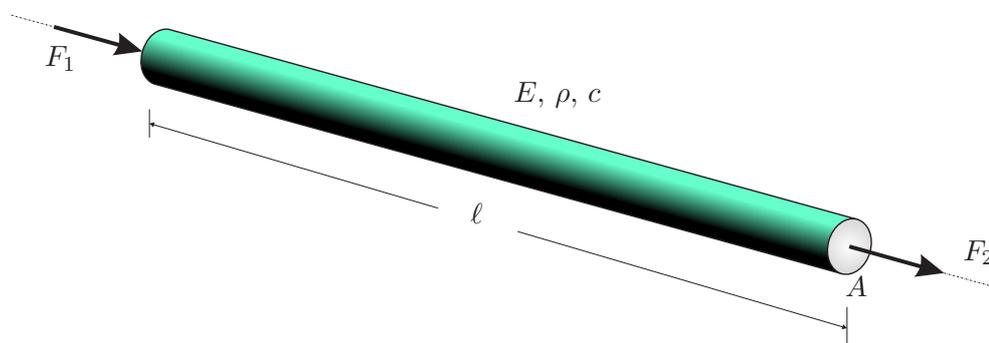


Figura 4.1: *Elemento de treliça.*

4.1.1

Formulação do problema

A equação diferencial parcial descrevendo o movimento de um elemento de treliça que pode vibrar longitudinalmente é dada por

$$E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (4-1)$$

onde a função $u(x, t)$ é o deslocamento longitudinal no tempo desde a posição de equilíbrio da seção transversal em x , E é o módulo de elasticidade longitudinal que depende das propriedades do material da treliça, ρ é o peso específico e $c = 2\zeta\rho$ é o coeficiente de amortecimento.

Supõe-se que o deslocamento esteja definido para valores de tempo $t > 0$ e espaço $0 \leq x \leq l$.

Técnica da transformada de Laplace

Para um desenvolvimento neste caso temos que levar a equação diferencial parcial (4-1) para o espaço da transformada de Laplace. Para fazer isto consideramos, por simplicidade, as condições iniciais do problema $u(x, 0)|_{t=0} = 0$ e $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0$.

Após os cálculos correspondentes e substituindo $y(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$ a nova equação diferencial passa a ser expressa como

$$E \frac{d^2 y(x, s)}{dx^2} - \rho(s^2 + 2\zeta s)y(x, s) = 0 \quad (4-2)$$

Fazendo $k^2 = -\frac{\rho(s^2 + 2\zeta s)}{E}$ na equação (4-2), obtém-se uma forma simplificada

$$\frac{d^2 y(x, s)}{dx^2} + k^2 y(x, s) = 0 \quad (4-3)$$

Técnica de superposição modal avançada

Supondo que a solução da equação diferencial parcial (4-1) admite uma solução por separação de variáveis $u(x, t) = u^*(x)e^{-i\omega t}$.

Após os cálculos correspondentes, a equação diferencial (4-1) se expressa como

$$E \frac{d^2 u^*(x)}{dx^2} + \rho(\omega^2 + 2i\zeta\omega)u^*(x) = 0 \quad (4-4)$$

Substituindo $k^2 = \frac{\rho(\omega^2 + 2i\zeta\omega)}{E}$ em (4-4) obtém-se

$$\frac{d^2 u^*(x)}{dx^2} + k^2 u^*(x) = 0 \quad (4-5)$$

4.1.2 Montagem da matriz de rigidez

Observa-se das equações (4-3) e (4-5) que para a montagem da matriz de rigidez só se precisa da solução de uma delas.

A solução geral da equação se expressa

$$u^* = A_1 \frac{\text{sen}(kx)}{k} + A_2 \cos(kx) \quad (4-6)$$

de tal modo que a solução estática alcançada no caso limite é:

$$\lim_{k \rightarrow 0} u^*(x) = A_1 x + A_2 \quad (4-7)$$

Como se está analisando um problema no domínio da frequência, em termos de uma superposição modal, pode-se usar $A_2 = 0$, já que a solução varia em torno de $u^*(0) = 0$.

Tendo uma solução que oscila em torno de $u^*(0) = 0$, uma forma de expressar o campo de deslocamentos nesse caso, (Dumont-2005), é como uma função de dois parâmetros de força p_1^* e p_2^* , os quais se interpretam como as bases do sistema interno ou auxiliar de coordenadas:

$$u^* = \frac{1}{EA} \left\langle \frac{\text{sen}[kx]}{k} \quad \frac{\text{sen}[k(\ell - x)]}{k} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} p_1^* \\ p_2^* \end{matrix} \right\} \equiv u^* p^* \quad (4-8)$$

Partindo da equação anterior pode-se obter também as tensões normais:

$$\sigma^* = E \frac{du^*(x)}{dx}$$

$$\sigma^* = \frac{1}{A} \left\langle \cos[kx] \quad -\cos[k(\ell - x)] \right\rangle \left\{ \begin{matrix} p_1^* \\ p_2^* \end{matrix} \right\} \equiv \sigma^* p^* \quad (4-9)$$

Os deslocamentos nas extremidades do elemento de treliça são descritos e definidos como os contornos Γ_1 e Γ_2 :

$$u = \langle 1 \quad 0 \rangle \left\{ \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix} \right\} \equiv N_1 d \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (4-10)$$

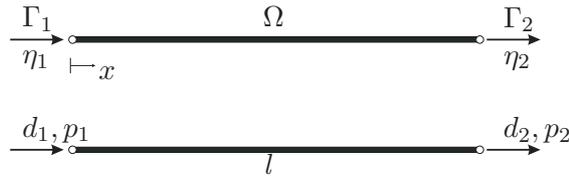


Figura 4.2: Sistemas de coordenadas de um elemento de treliça.

$$u = \langle 0 \ 1 \rangle \left\{ \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \end{matrix} \right\} \equiv N_2 d \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (4-11)$$

A matriz de transformação cinemática \mathbf{H} entre os sistemas d e p^* é expressa como:

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \sigma^{*t} N d\Gamma = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -\cos(k\ell) \end{matrix} \right\} (-1) \langle 1 \ 0 \rangle + \left\{ \begin{matrix} \cos(k\ell) \\ -1 \end{matrix} \right\} (1) \langle 0 \ 1 \rangle \quad (4-12)$$

Portanto

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & \cos(k\ell) \\ \cos(k\ell) & -1 \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

A matriz de flexibilidade no sistema interno p^* se expressa

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \sigma^t u^* N d\Gamma \quad (4-14)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{EA} \left[\left\{ \begin{matrix} 1 \\ -\cos(k\ell) \end{matrix} \right\} (-1) \left\langle 0 \ \frac{\text{sen}(k\ell)}{k} \right\rangle + \left\{ \begin{matrix} \cos(k\ell) \\ -1 \end{matrix} \right\} (1) \left\langle \frac{\text{sen}(k\ell)}{k} \ 0 \right\rangle \right]$$

$$\mathbf{F} = \frac{\text{sen}(k\ell)}{kEA} \begin{bmatrix} \cos(k\ell) & -1 \\ -1 & \cos(k\ell) \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

Logo, inversa da matriz de flexibilidade é:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{-kEA}{\text{sen}^3(k\ell)} \begin{bmatrix} \cos(k\ell) & 1 \\ 1 & \cos(k\ell) \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

Finalmente obtém-se a matriz de rigidez para um elemento de treliça

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \quad (4-17)$$

$$\mathbf{K} = \frac{kEA}{\text{sen}(k\ell)} \begin{bmatrix} \cos(k\ell) & -1 \\ -1 & \cos(k\ell) \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

Se na matriz de rigidez da equação (4-18) $k \rightarrow 0$ com, então

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

Em resumo, tem-se que a matriz de rigidez desenvolvida para um elemento de treliça (para as duas técnicas) é

$$\mathbf{K} = \frac{kEA}{\text{sen}(k\ell)} \begin{bmatrix} \cos(k\ell) & -1 \\ -1 & \cos(k\ell) \end{bmatrix}$$

No caso da técnica da transformada de Laplace

$$k^2 = -\frac{\rho(s^2 + 2\zeta s)}{E}$$

e no caso da técnica de superposição modal avançada

$$k^2 = \frac{\rho(\omega^2 + 2i\zeta\omega)}{E}.$$

4.2

Viga de Timoshenko sobre base elástica e com amortecimento

A teoria de vigas de Timoshenko assume as seguintes hipóteses.

1. Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma mesma seção transversal são pequenos e iguais ao do eixo da viga.
2. O deslocamento lateral (segundo o eixo y) é nulo.
3. As seções planas normais para o eixo da viga antes da deformação mantêm-se planas, porém não necessariamente normais ao eixo depois da deformação.

4.2.1

Formulação do problema

Considera-se uma viga de comprimento L , área da seção transversal A e momento de inércia J , sobre uma base elástica e com amortecimento viscoso.

Devido à deformação do cisalhamento, sobre a qual o momento fletor realiza trabalho

$$M = EJ \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}, \quad (4-20)$$

a rotação $\psi(x, t)$ de uma seção transversal, e a derivada da elástica $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$ diferem entre si de uma parcela $\gamma_0(x, t)$:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \psi + \gamma_0 \quad (4-21)$$

devido à deformação causada pelo esforço cortante:

$$Q = GA\kappa\gamma_0 \quad (4-22)$$

onde κ é um fator que leva em conta como a seção se deforma sob cisalhamento. A equação (4-21) expressa a compatibilidade de deformações de uma seção de viga, para momento fletor M e esforço cortante Q obtidos segundo as equações constitutivas acima.

Temos da figura (4.3) um elemento infinitesimal de viga de Timoshenko, que está em equilíbrio segundo as equações:

$$\sum F_y = \frac{\partial Q}{\partial x} - m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - 2\zeta m \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - wu(x, t) = 0 \quad (4-23)$$

$$\sum M = Q - \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{mJ}{A} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \quad (4-24)$$

Das equações (4-23) e (4-24) obtemos as equações que governam o estudo da viga de Timoshenko com base elástica e amortecimento

$$GA\kappa \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right] - m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - 2\zeta m \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - wu(x, t) = 0 \quad (4-25)$$

$$GA\kappa \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \psi(x, t) \right] + EJ \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{mJ}{A} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \quad (4-26)$$

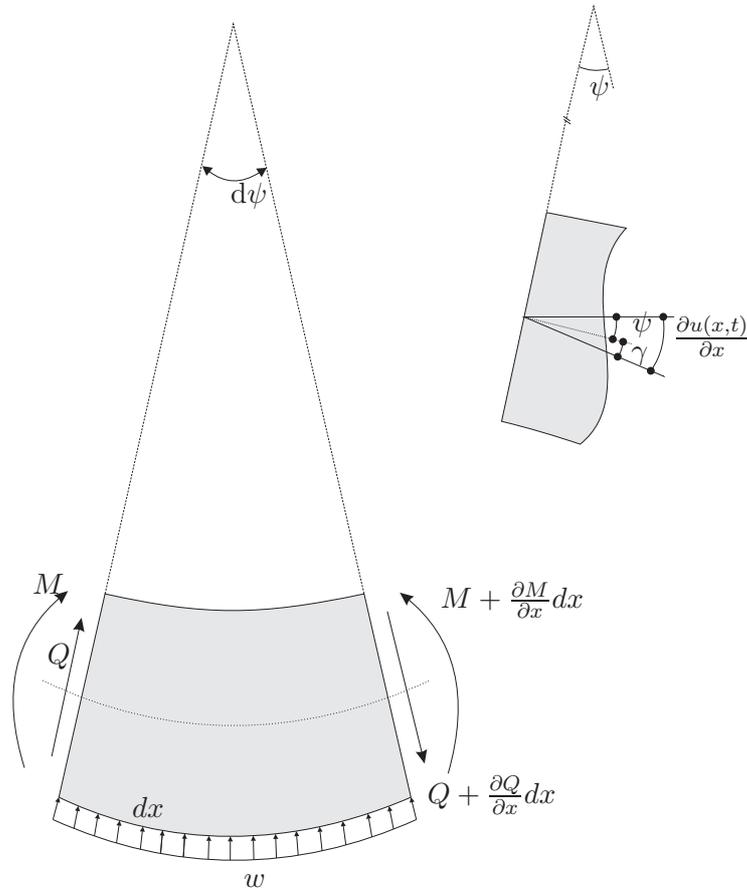


Figura 4.3: Equilíbrio de um elemento infinitesimal de viga de Timoshenko.

Técnica da transformada de Laplace

Nesse caso, leva-se as equações diferenciais parciais (4-25) e (4-26) ao espaço da transformada de Laplace. Para tal efeito, por simplicidade, considera-se apenas as condições de fronteira $u(x, t)|_{t=0} = 0$ e $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0$ na equação (4-25), $\psi(x, t)|_{t=0} = 0$ e $\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = 0$ na equação (4-26).

Após os cálculos correspondentes e substituindo $u^*(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$ e $\psi^*(x, s) = \mathcal{L}\{\psi(x, t)\}$ as novas equações diferenciais passam a ser expressas como

$$GA\kappa \left[\frac{\partial^2 u^*(x, s)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi^*(x, s)}{\partial x} \right] - (ms^2 + 2\zeta ms + w)u^*(x, s) = 0 \quad (4-27)$$

$$GA\kappa \left[\frac{\partial u^*(x, s)}{\partial x} - \psi^*(x, s) \right] + EJ \frac{\partial^2 \psi^*(x, s)}{\partial x^2} - \frac{mJs^2}{A} \psi^*(x, s) = 0 \quad (4-28)$$

Eliminando-se $\psi^*(x, s)$ nas equações (4-27) e (4-28) chega-se à seguinte equação

$$\frac{\partial^4 u^*(x, s)}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 u^*(x, s)}{\partial x^2} - k^4 u^*(x, s) = 0 \quad (4-29)$$

onde

$$T = -\frac{m}{EJ} \left[\left(1 + \frac{E}{G\kappa} \right) \frac{Js^2}{A} + \frac{EJ}{GA m \kappa} (ms^2 + 2\zeta ms + w) \right], \quad e \quad (4-30)$$

$$k^4 = -\frac{m}{EJ} \left[(s^2 + 2\zeta s + w/m) + \frac{J}{GA^2 \kappa} (ms^4 + 2\zeta ms^3 + ws^2) \right] \quad (4-31)$$

Técnica de superposição modal avançada

Nesse caso, supõe-se que as soluções das equações diferenciais parciais (4-25) e (4-26) admitem separação de variáveis $u(x, t) = u^*(x)e^{-i\omega t}$ e $\psi(x, t) = \psi^*(x)e^{-i\omega t}$.

Fazendo as substituições adequadas, as equações se expressam como

$$GA\kappa \left[\frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial x} \right] + (m\omega^2 + 2i\zeta m\omega - w)u^*(x) = 0 \quad (4-32)$$

$$GA\kappa \left[\frac{\partial u^*(x)}{\partial x} - \psi^*(x) \right] + EJ \frac{\partial^2 \psi^*(x)}{\partial x^2} + \frac{mJ\omega^2}{A} \psi^*(x) = 0 \quad (4-33)$$

Eliminando-se $\psi^*(x)$ nas equações (4-32) e (4-33) obtém-se

$$\frac{\partial^4 u^*(x)}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} - k^4 u^*(x) = 0 \quad (4-34)$$

onde

$$T = \frac{m}{EJ} \left[\left(1 + \frac{E}{G\kappa} \right) \frac{J\omega^2}{A} + \frac{EJ}{GA m \kappa} (m\omega^2 + 2i\zeta m\omega - w) \right], \quad e \quad (4-35)$$

$$k^4 = \frac{m}{EJ} \left[(\omega^2 + 2i\zeta\omega - w/m) - \frac{J}{GA^2 \kappa} (m\omega^4 + 2i\zeta m\omega^3 - w\omega^2) \right]. \quad (4-36)$$

Observa-se que nas duas técnicas, fazendo algumas modificações, pode-se

chegar às mesmas equações (4-34) e (4-29), cuja solução é expressa convenientemente na forma

$$y^*(x) = C_1 \frac{\text{sen } k_1 x + \sinh k_2 x}{k} + C_2 \frac{\text{sen } k_1 x - \sinh k_2 x}{k^3} + C_3 (\cos k_1 x + \cosh k_2 x) + C_4 \frac{\cos k_1 x - \cosh k_2 x}{k^2} \quad (4-37)$$

onde

$$k_1 = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{T^2}{4}} + \frac{T}{2}} \quad \text{e} \quad k_2 = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{T^2}{4}} - \frac{T}{2}} \quad (4-38)$$

De modo similar, obtém-se das equações anteriores a expressão de $\psi^*(x)$

$$\psi^*(x) = C_1 \frac{K_2 \cos k_1 x + K_1 \cosh k_2 x}{k} + C_2 \frac{K_2 \cos k_1 x - K_1 \cosh k_2 x}{k^3} + C_3 (-K_2 \text{sen } k_1 x + K_1 \sinh k_2 x) + C_4 \frac{-K_2 \text{sen } k_1 x - K_1 \sinh k_2 x}{k^2} \quad (4-39)$$

onde

$$K_1 = \frac{k_1^2 + \frac{ms^2}{EA}}{k_2} \quad \text{e} \quad K_2 = \frac{k_1^2 - \frac{ms^2}{EA}}{k_2} \quad (4-40)$$

Analogamente, para o método de transformadas de Laplace, obtém-se a mesma $\psi^*(x)$ porém com as constantes K_1 e K_2 abaixo (é imediato ver as diferenças com as anteriores constantes)

$$K_1 = \frac{k_1^2 - \frac{m\omega^2}{EA}}{k_2} \quad \text{e} \quad K_2 = \frac{k_1^2 + \frac{m\omega^2}{EA}}{k_2} \quad (4-41)$$

As expressões de $y^*(x)$ e $\psi^*(x)$ foram obtidas de tal modo que

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} y^*(x) = 2C_3 + 2C_1 x - C_4 x^2 - C_2 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{EJx}{2GA\kappa} \right) \quad (4-42)$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0}} \psi^*(x) = 2C_1 - 2C_4x - C_2 \left(x^2 + \frac{3EJ}{2GA\kappa} \right) \quad (4-43)$$

4.2.2

Obtenção da matriz de rigidez

O campo de deslocamentos transversais $y^*(x)$ é expresso por

$$y^*(x) = \langle y_1^*(x) \quad y_2^*(x) \quad y_3^*(x) \quad y_4^*(x) \rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} = y^* p^* \quad (4-44)$$

onde

$$\begin{aligned} y_1^*(x) &= \frac{\text{sen } k_1x + \sinh k_2x}{k} & y_2^*(x) &= \frac{\text{sen } k_1x - \sinh k_2x}{k^3} \\ y_3^*(x) &= \cos k_1x + \cosh k_2x & y_4^*(x) &= \frac{\cos k_1x - \cosh k_2x}{k^2} \end{aligned} \quad (4-45)$$

As rotações $\psi^*(x)$ são expressas por

$$\psi^*(x) = \langle \psi_1^*(x) \quad \psi_2^*(x) \quad \psi_3^*(x) \quad \psi_4^*(x) \rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} = \psi^* p^* \quad (4-46)$$

onde

$$\begin{aligned} \psi_1^*(x) &= \frac{K_2 \cos k_1x + K_1 \cosh k_2x}{k} & \psi_2^*(x) &= \frac{K_2 \cos k_1x - K_1 \cosh k_2x}{k^3} \\ \psi_3^*(x) &= -K_2 \text{sen } k_1x + K_1 \sinh k_2x & \psi_4^*(x) &= \frac{-K_2 \text{sen } k_1x - K_1 \sinh k_2x}{k^2} \end{aligned} \quad (4-47)$$

os p_1^* , p_2^* , p_3^* e p_4^* são os parâmetros de força numa formulação de elementos finitos híbridos, p^* não têm sentido físico definido, embora seja possível fazer alguma atribuição a partir dos limites das equações (4-42) e (4-43).

Para estabelecer as equações que governam o problema da viga, escreve-

se utilizando a mesma notação usada no elemento de treliça:

$$\begin{Bmatrix} y^*(x) \\ \psi^*(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^*(x) & y_2^*(x) & y_3^*(x) & y_4^*(x) \\ \psi_1^*(x) & \psi_2^*(x) & \psi_3^*(x) & \psi_4^*(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} = \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \quad (4-48)$$

Conseqüentemente, obtém-se os esforços seccionais, segundo as equações (4-20) e (4-22):

$$\begin{Bmatrix} Q^* \\ M^* \end{Bmatrix} = \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (4-49)$$

onde

$$\mathbf{N}^* = EJ \begin{bmatrix} \frac{d^2 \psi_1^*}{dx^2} - \frac{ms^2}{EA} \psi_1^* & \frac{d^2 \psi_2^*}{dx^2} - \frac{ms^2}{EA} \psi_2^* & \frac{d^2 \psi_3^*}{dx^2} - \frac{ms^2}{EA} \psi_3^* & \frac{d^2 \psi_4^*}{dx^2} - \frac{ms^2}{EA} \psi_4^* \\ \frac{d\psi_1^*}{dx} & \frac{d\psi_2^*}{dx} & \frac{d\psi_3^*}{dx} & \frac{d\psi_4^*}{dx} \end{bmatrix} \quad (4-50)$$

ou, no caso da técnica de superposição modal avançada,

$$\mathbf{N}^* = EJ \begin{bmatrix} \frac{d^2 \psi_1^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_1^* & \frac{d^2 \psi_2^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_2^* & \frac{d^2 \psi_3^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_3^* & \frac{d^2 \psi_4^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_4^* \\ \frac{d\psi_1^*}{dx} & \frac{d\psi_2^*}{dx} & \frac{d\psi_3^*}{dx} & \frac{d\psi_4^*}{dx} \end{bmatrix} \quad (4-51)$$

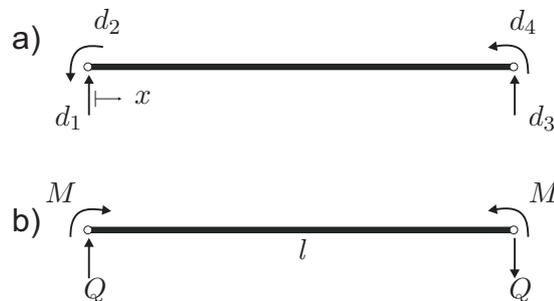


Figura 4.4: a) Sistema de coordenadas da matriz de rigidez, b) Convenção de esforços.

Usando a parte a) da figura 4.4 (para definir as grandezas do sistema externo de coordenadas) e a parte b) (para a convenção dos momentos fletores e esforços cortantes positivos) pode-se descrever os extremos do elemento como sendo os contornos Γ_1 e Γ_2 (para os deslocamentos e rotações). Do mesmo

modo, as matrizes Λ como sendo os co-senos diretores:

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_1 \mathbf{d} \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_1 \quad (4-52)$$

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_2 \mathbf{d} \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_2 \quad (4-53)$$

A matriz \mathbf{H} de transformação cinemática entre os sistemas \mathbf{d} e \mathbf{p}^* se expressa

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}^{*T}|_{x=0} \Lambda_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}^{*T}|_{x=l} \Lambda_2 \mathbf{N}_2 \quad (4-54)$$

A matriz de flexibilidade no sistema interno \mathbf{p}^* se expressa

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}^{*T}|_{x=0} \Lambda_1 \mathbf{u}^{*T}|_{x=0} + \mathbf{N}^{*T}|_{x=l} \Lambda_2 \mathbf{u}^{*T}|_{x=l} \quad (4-55)$$

Após a avaliação da inversa \mathbf{F}^{-1} , a partir de (3-32), obtém-se a matriz de rigidez efetiva

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}.$$

ou como alternativa, a partir de (3-36), tem-se que $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T (\mathbf{U}^*)^{-1}$.

Desse modo, é possível fazer um desenvolvimento da matriz de rigidez efetiva da viga de Timoshenko com base elástica e amortecimento. Para o caso da técnica de transformadas de Laplace, a matriz de rigidez efetiva fica em função dos parâmetros definidos pelas equações (4-30) e (4-31). Ou bem, pelas equações (4-35) e (4-36) no caso da técnica de superposição modal avançada.

Para simplificar a notação de cada um dos elementos da matriz de rigidez efetiva (dada a quantidade de termos que possuem), denota-se $C = \cosh k_2 x$, $c = \cos k_1 x$, $S = \sinh k_2 x$ e $s = \sin k_1 x$. Assim, a matriz de rigidez efetiva é expressa como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (4-56)$$

onde

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= -\frac{EJK_1K_2(cK_1S + CK_2s)(k_1^2 + k_2^2)}{K_1K_2((C^2 - c^2)^2 + s^2 - S^2) - Ss(K_2^2 - K_1^2)} \\
 K_{12} &= -\frac{EJK_1K_2(K_2k_1(C^2 - Cc - S^2) + K_1k_2(Cc - s^2 - c^2)) + Ss(k_1K_1 + k_2K_2)}{K_1K_2((C^2 - c^2)^2 + s^2 - S^2) - Ss(K_2^2 - K_1^2)} \\
 K_{13} &= \frac{EJK_1K_2(K_1S + K_2s)(k_1^2 + k_2^2)}{K_1K_2((C^2 - c^2)^2 + s^2 - S^2) - Ss(K_2^2 - K_1^2)} \\
 K_{14} &= -\frac{EJK_1K_2(C - c)(k_1^2 + k_2^2)}{K_1K_2((C^2 - c^2)^2 + s^2 - S^2) - Ss(K_2^2 - K_1^2)} \\
 K_{22} &= \frac{EJ(cK_2S - sCK_1)}{K_1K_2((C^2 - c^2)^2 + s^2 - S^2) - Ss(K_2^2 - K_1^2)} \\
 K_{23} &= \frac{EJK_1K_2(C - c)(K_2k_1 + K_1k_2)}{K_1K_2((C^2 - c^2)^2 + s^2 - S^2) - Ss(K_2^2 - K_1^2)} \\
 K_{24} &= -\frac{EJ(K_2S - sK_1)(K_2k_1 + K_1k_2)}{K_1K_2((C^2 - c^2)^2 + s^2 - S^2) - Ss(K_2^2 - K_1^2)} \\
 K_{33} &= -\frac{EJK_1K_2(cK_1S + CK_2s)}{K_1K_2((C^2 - c^2)^2 + s^2 - S^2) - Ss(K_2^2 - K_1^2)} \\
 K_{34} &= \frac{EJK_1K_2(cK_1S + CK_2s)}{K_1K_2((C^2 - c^2)^2 + s^2 - S^2) - Ss(K_2^2 - K_1^2)} \\
 K_{44} &= \frac{EJK_1K_2(cK_1S + CK_2s)}{K_1K_2((C^2 - c^2)^2 + s^2 - S^2) - Ss(K_2^2 - K_1^2)}
 \end{aligned} \tag{4-57}$$